



PREGUNTA 1: (25 puntos, 10 – 9 – 6)

Indicador(es) de Evaluación:

Analizar características destacadas de funciones algebraicas o trascendentes de variable real, por medio del análisis informal y formal del límite de ellas.

Contenidos Esenciales:

Límite y continuidad de funciones.

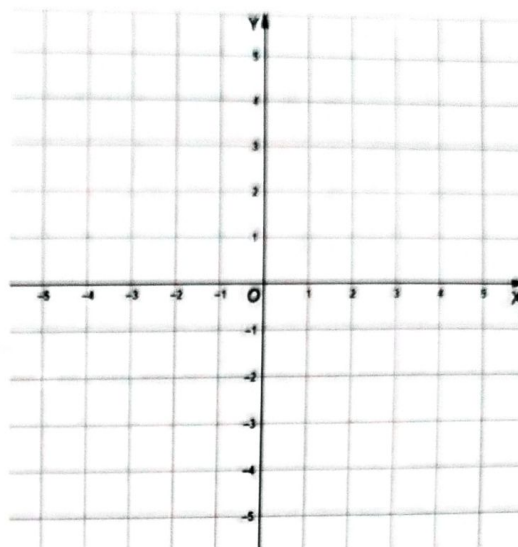
(1.1) Grafique en el siguiente plano cartesiano una función f que cumpla, al mismo tiempo, las siguientes condiciones:

i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

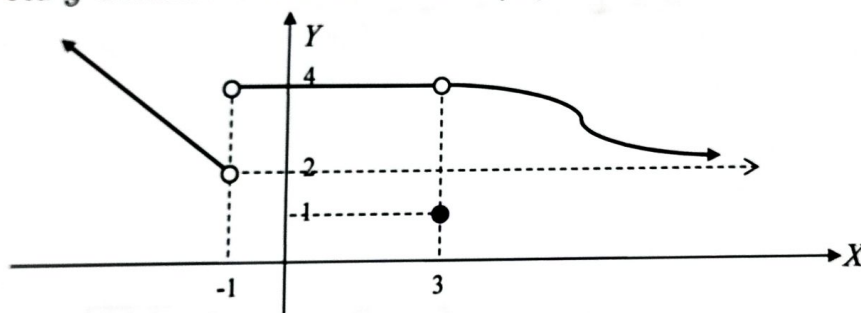
ii. $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$

iii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ no exista

iv. f sea continua en $\mathbb{R} - \{2, 4\}$



(1.2) Sea g una función real de variable real cuya grafica es la siguiente:



a) A partir de la gráfica de g complete la siguiente tabla. Justifique en caso de No existir:

$Dom(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$	$Rec(g) =]2, \infty[\cup \{-1\}$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty \therefore \text{no existe}$
$g(-1) = \text{no existe, } -1 \notin Dom(g)$	$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = 2$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = 4$
$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \text{no existe, límites laterales no coinciden}$	$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$	$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 2$

b) Determine, en cada caso (si existe), un valor de x donde g es:

- i. Discontinua irreparable : $x = -1$
- ii. Discontinua reparable : $x = 3$
- iii. Continua : $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$



PREGUNTA 2: (32 puntos, 8 cada una)

Indicador(es) de Evaluación:

Aplicar las técnicas y propiedades en el cálculo del valor del límite de una función de variable real.

Contenidos Esenciales:

Límite de funciones.

Determine el valor de los siguientes límites (si es que existen):

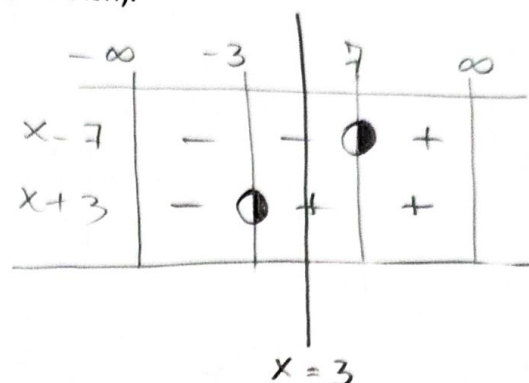
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-7| - 4}{|x+3| - 6} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado!!}$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-7) - 4}{+(x+3) - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x + 7 - 4}{x + 3 - 6}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x + 3}{x - 3}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-(x-3)}{(x-3)} = -1$$



b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^3 - 1} = \frac{2 - 2}{-1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0 //$



$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x^3 - 8} = \frac{0}{0} \text{ indet.}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)}(x+2)(x^2+4)}{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x^2+4)}{x^2+2x+4} = \frac{4 \cdot 8}{3 \cdot 4} = \frac{8}{3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x) + 9x}{\text{sen}(7x) - x^2} = \frac{0}{0} \text{ indet.} ||$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(5x) + 9x}{\text{sen}(7x) - x^2} \quad : x$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{sen}(5x)}{x} + \frac{9x}{x}}{\frac{\text{sen}(7x)}{x} - \frac{x^2}{x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \cdot \text{sen}(5x) - 9}{7 \cdot \text{sen}(7x) - x} = \frac{5 - 9}{7 - 0} = -\frac{4}{7}$$



PREGUNTA 3: (15 puntos, 3 cada una)

Indicador(es) de Evaluación:

Analizar límite y continuidad de funciones reales de variable real.

Contenidos Esenciales:

Límite y continuidad de funciones.

Marque con una cruz la alternativa correcta:

1) Si $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$, entonces el valor de $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ está dado por:

a) 0

☒ b) $\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{2}$

d) No existe

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2) \cdot (\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4 - 4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

2) Si $f(x) = \begin{cases} x+1 & ; x < 2 \\ 5 & ; x = 2 \\ x^2 & ; x > 2 \end{cases}$ es una función, entonces en $x = 2$ se tiene que:

a) Existe el límite y la función es continua.

b) Existe el límite, pero la función no es continua.

☒ c) No existe el límite porque sus límites laterales son distintos.

d) El límite existe y su valor es 5.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 4 \end{aligned}$$

3) El valor de $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)}$ es:

☒ a) $\frac{1}{2}$

b) 1

c) 0

d) 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{\cos^2(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{1 - \sin^2(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin(x)}{(1 - \sin(x))(1 + \sin(x))} \\ &= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

4) El valor de $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x + 5}{2x^2 - 1}$ es:

a) 0

b) 3

c) 6

☒ d) No existe.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 2x + 5}{2x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\infty}{\infty}}{\frac{\infty}{\infty}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6 + \frac{2}{x^2} + \frac{5}{x^3}}{\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{6}{0} = \infty \end{aligned}$$

5) El valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2} + 4x}$ es:

a) $\frac{1}{13}$

b) $\frac{1}{7}$

c) 0

☒ d) 1

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2} + 4x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{3|x| + 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-3x + 4x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x} = 1 \end{aligned}$$



PREGUNTA 4: (28 puntos)

Indicador(es) de Evaluación:

Analizar la continuidad de una función real de variable real, relacionando los conceptos de límite y continuidad de la función en un punto.

Contenidos Esenciales:

Continuidad de una función

Sea f una función real de variable real definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2ax}{\sin(x)} & ; x < 0 \\ b + 5 & ; x = 0 \\ \frac{4x}{x^2 - x} & ; x > 0 \end{cases}$$

Determine para que valor(es) de $a, b \in \mathbb{R}$ la función f , es:

- Discontinua irreparable en $x = 0$
- Discontinua reparable en $x = 0$
- Continua en $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2ax}{\sin(x)} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2a \cdot x}{\sin(x)} = 2a$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{x^2 - x} = \frac{0}{0} \text{ indeterminado}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x}{x(x-1)} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \text{ existe si } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$2a = -4$$

$$\boxed{a = -2}$$

luego si $a = -2$ entonces $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -4$

$$\bullet f(0) = b + 5$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \text{ si } -4 = b + 5 \Rightarrow \boxed{b = -9}$$

a) f es discontinua irreparable si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ no existe $\therefore \boxed{a \neq -2 ; b \in \mathbb{R}}$

b) f es disc. reparable si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe pero $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0) \therefore \boxed{a = -2 ; b \neq -9}$

c) f es continua si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ existe y $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \therefore \boxed{a = -2 \text{ y } b = -9}$