

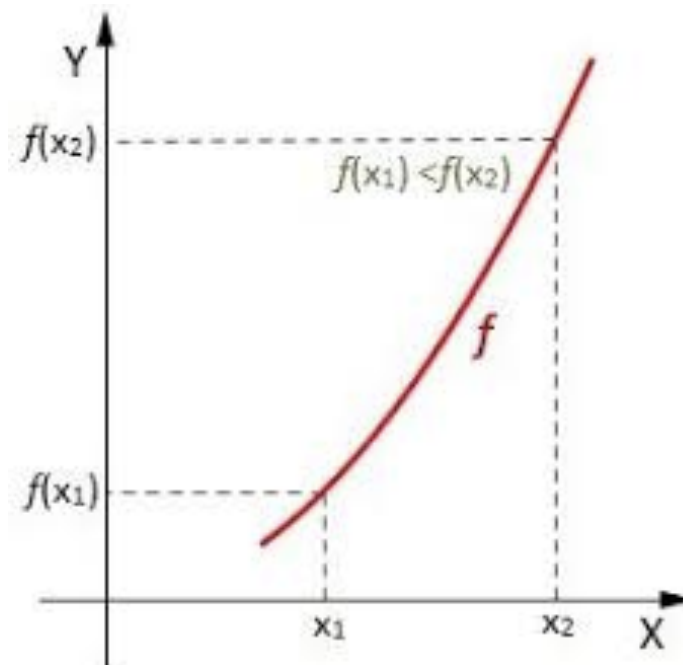
# **Funciones crecientes y decrecientes.**

## **Criterio de la primera derivada.**

Cálculo Diferencial.  
Profesora: Catherine Hardy

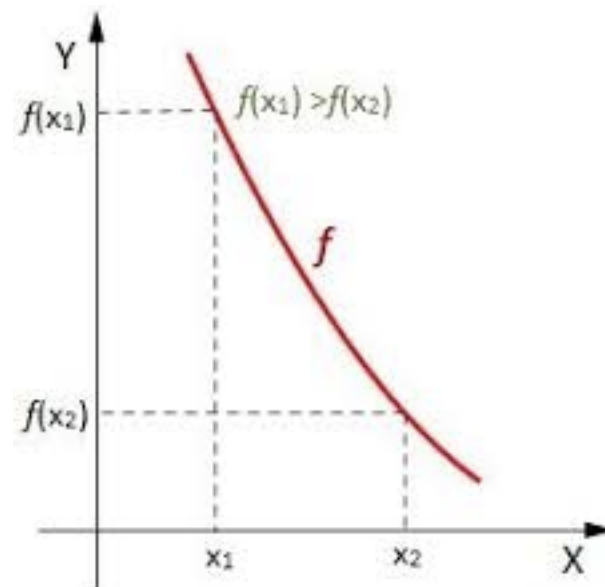
## Definición:

- Una función  $f$  es creciente sobre un intervalo si para 2 números cualquiera  $x_1, x_2$ , si  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$



## Definición:

- Una función  $f$  es decreciente sobre un intervalo si para 2 números cualquiera  $x_1, x_2$ , si  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$



# Teorema: criterio de la primera derivada para funciones crecientes y decrecientes

Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado  $[a,b]$  y derivable en  $]a,b[$ :

1) Si  $f'(x) > 0, \forall x \in ]a,b[ \Rightarrow f$  es creciente en  $[a,b]$

2) Si  $f'(x) < 0, \forall x \in ]a,b[ \Rightarrow f$  es decreciente en  $[a,b]$

3) Si  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a,b[ \Rightarrow f$  es constante en  $[a,b]$

## Puntos críticos:

**Si  $c \in \text{Dom}(f)$  y  $f'(c)=0$  o  $f'(c)$  no existe, entonces c se denomina punto crítico de  $f$**

# Ejemplo:

Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función  $f(x) = x^3 - 6x^2$

Pasos:

1º) Derivar la función

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

2º) Buscar los puntos críticos (igualar a cero la derivada y despejar x)

$$3x^2 - 12x = 0$$

$$3x(x - 4) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 4$$

3º) Hacer una tabla de valores (como en inecuaciones)

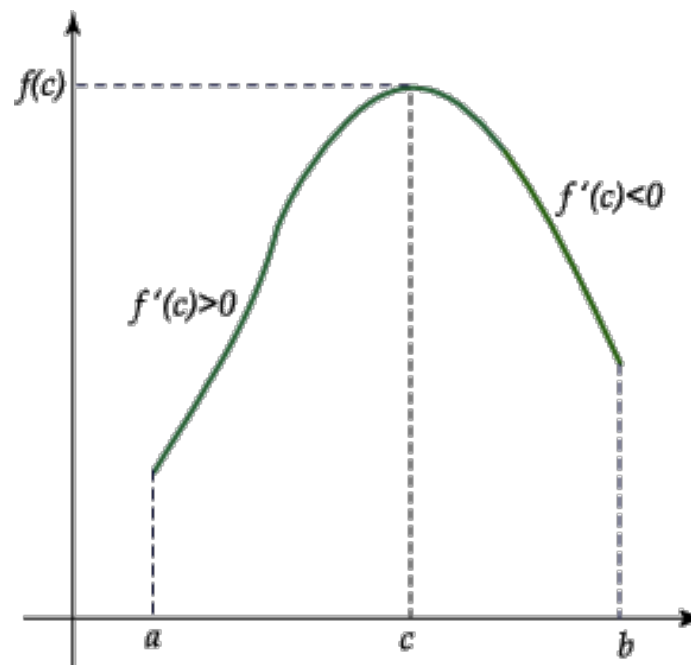
|       | $-\infty$ | 0 | 4 | $\infty$ |
|-------|-----------|---|---|----------|
| x     |           | - | + | +        |
| x-4   |           | - | - | +        |
| f'(x) |           | + | - | +        |

Por lo tanto, f es creciente en  $]-\infty, 0[ \cup ]4, \infty[$   
y decreciente en  $]0, 4[$

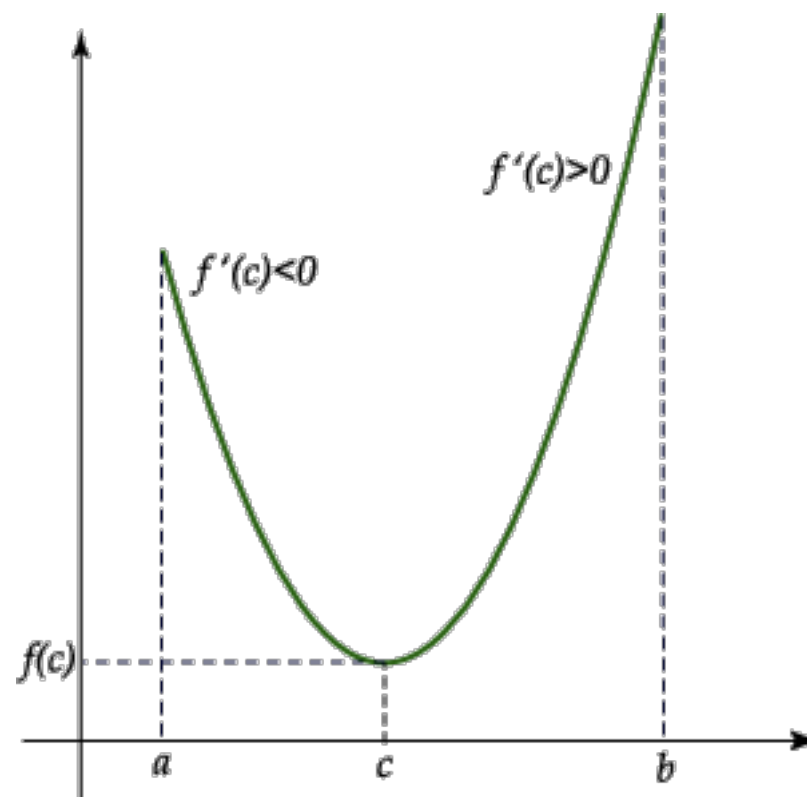
# Teorema:

Sea  $c$  un punto crítico de una función  $f$  que es continua en un intervalo abierto que contiene a  $c$ . Si  $f$  es derivable en dicho intervalo, excepto posiblemente en  $c$ , entonces:

1. Si  $f'(x)$  cambia de positiva a negativa en  $c$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $(c, f(c))$



2. Si  $f'(x)$  cambia de negativa a positiva en  $c$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $c$ ,  $(c, f(c))$



**3. Si  $f'(c)$  es positiva o negativa a ambos lados de  $c$ , entonces  $f(c)$  no es ni mínimo ni máximo relativo**

**Ejemplo: Del ejercicio anterior, teníamos**

$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

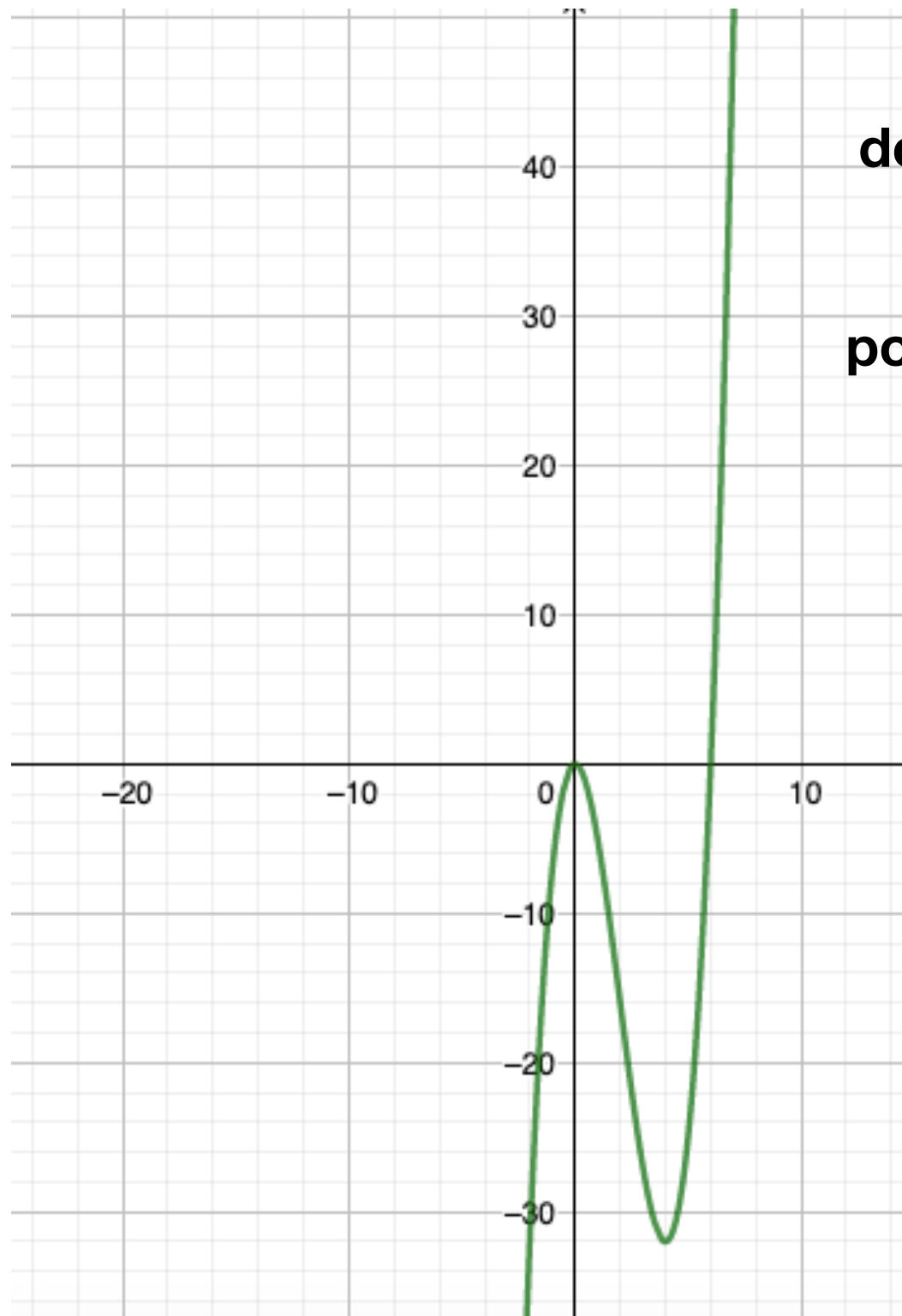
|       | $-\infty$ | 0 | 4 | $\infty$ |
|-------|-----------|---|---|----------|
| x     | -         | - | + | +        |
| x-4   | -         | - | - | +        |
| f'(x) | +         | + | - | +        |



**Como en  $x=0$   $f'(x)$  cambia de positiva a negativa, entonces en  $(0, f(0)) = (0, 0)$  hay un máximo relativo.**

**Como en  $x=4$   $f'(x)$  cambia de negativa a positiva, entonces en  $(0, f(4)) = (0, -32)$  hay un mínimo relativo.**

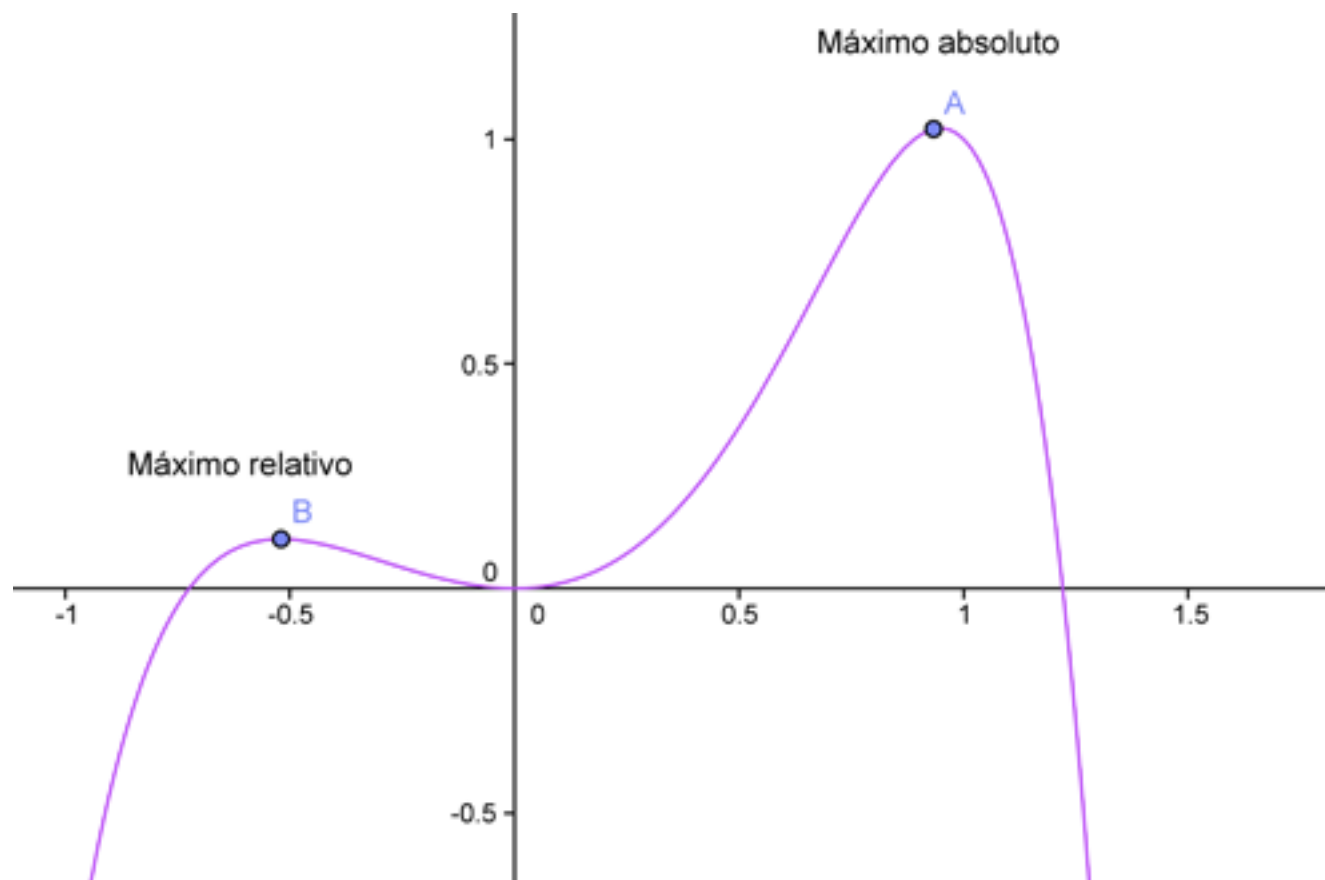
**Al traficar quedaría de la siguiente forma:**



**Con lo que sabemos hasta ahora,  
solo podemos determinar  
dónde la función es creciente y decreciente,  
y como encontrar máximos y mínimos.  
Con el criterio de la segunda derivada  
podremos determinar la “forma” de la curva.**

# Máximo Absoluto:

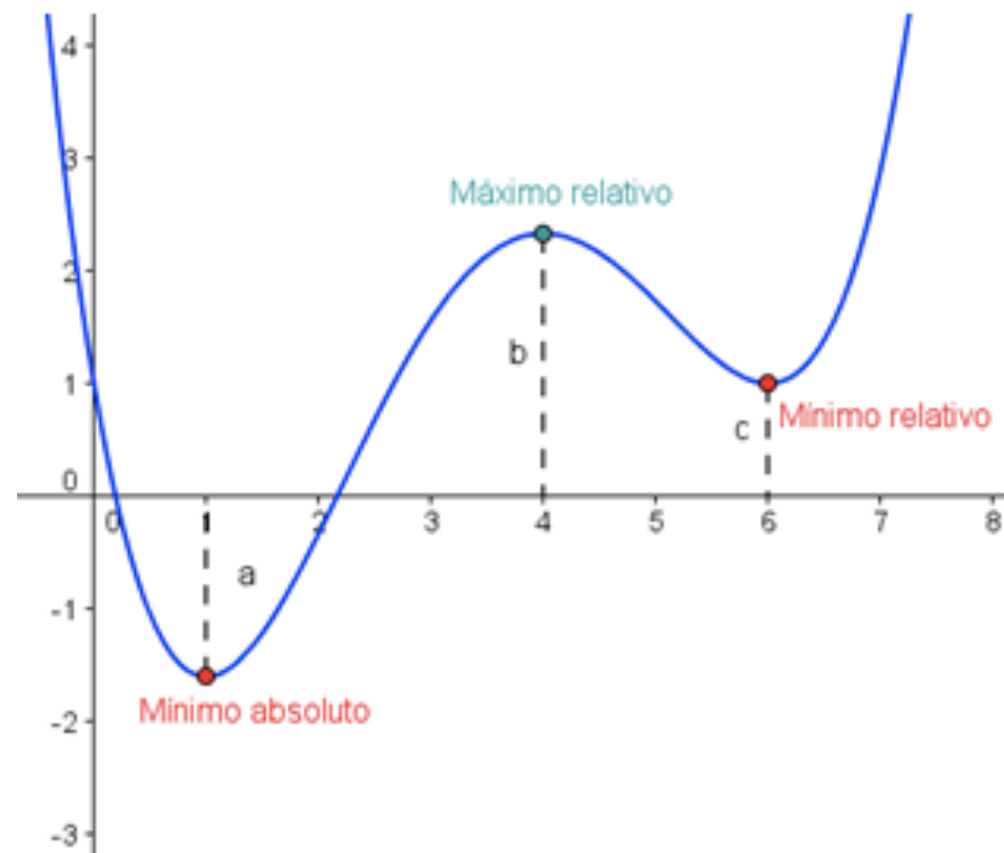
$f(c)$  es el valor máximo absoluto de  $f$  si  $c \in \text{Dom}(f)$  y  $f(c) \geq f(x) \forall x \in \text{Dom}(f)$   
(corresponde al mayor de todos los máximos relativos)



# Mínimo Absoluto:

$f(c)$  es el valor mínimo absoluto de  $f$  si  $c \in Dom(f)$  y  $f(c) \leq f(x) \forall x \in Dom(f)$

(corresponde al menor de todos los mínimos relativos)



# Criterio de la segunda derivada para extremos relativos.

Sea  $c$  un punto crítico de  $f$ , donde  $f'(c)=0$  y existe  $f''(x)$

- 1) Si  $f''(c) < 0$ , entonces  $f$  tiene un máximo relativo en  $c$
- 2) Si  $f''(c) > 0$ , entonces  $f$  tiene un mínimo relativo en  $c$

# Ejemplo:

**Utilizando el mismo ejemplo anterior:**

$$f(x) = x^3 - 6x^2$$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x$$

**Los puntos críticos son  $x=0$  y  $x=4$**

**Calculamos la segunda derivada:**

$$f''(x) = 6x - 12$$

**Evaluamos los puntos críticos en la segunda derivada:**

$f''(0) = -12$ , como es menor que cero en  $x=0$  hay un máximo relativo  $(0, f(0))$

$f''(4) = 12$ , como es mayor que cero en  $x=4$  hay un mínimo relativo  $(4, f(4))$