

GUÍA DE EJERCICIOS: FUNDAMENTOS DE CÁLCULO

Estudio de Intervalos, Inecuaciones, Ecuaciones Exponenciales de Igual y Distinta Base y Logaritmos

INSTRUCCIONES PARA EL CADETE:

1. Resuelva cada uno de los ejercicios propuestos de manera ordenada en su cuaderno de trabajo, detallando rigurosamente los pasos algebraicos empleados.

1. Operaciones con Conjuntos e Intervalos

Considere los siguientes conjuntos numéricos definidos en el universo de los números reales ($\mathbb{R}$):

$$A = \{x \in \mathbb{R} / -5 \leq x < 3\} \mid B = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\} \mid C = \{x \in \mathbb{R} / x < -2\}$$

Determine y escriba en forma de intervalo el resultado de las siguientes operaciones:

a) $A \cup B$

b) $B \cap C$

c) $A - B$

d) A^c

e) $B \cap C^c$

f) $(A \cap B)^c$

g) $(B \cup C)^c \cap A$

h) $B^c - C$

2. Inecuaciones

Determine el conjunto solución en $\mathbb{R}$ para cada una de las siguientes inecuaciones. Exprese el intervalo solución final; indicar en cada caso Solución Restricción (SR) y Solución Final (SF):

a) $6x - 4(x - 3) > 2 - (x + 1)$

b) $(x - 1)^2 + 4x < 15 - 2x + (x + 2)^2$

c) $8 - (x - 2)^2 < 3 - (x + 4)^2$

d) $-10 - 3(x - 1) > x - 2(x + 5)$

e) $3(4 - 2x) + 15 \leq 2(x + 5) - 8x$

f) $\frac{x}{3} + 2 - \frac{2x}{5} \geq \frac{x}{15} - 1$

g) $(x - 2)(x + 7) > 0$

h) $(x + 4)(x - 2)(x - 5) \leq 0$

i) $x^2 - 2x - 8 > 0$

j) $x^3 - 9x^2 + 14x < 0$

k) $\frac{x + 8}{x - 4} \leq 0$

l) $\frac{x - 2}{x + 5} < 2$

3. Sistemas de Inecuaciones e Inecuaciones Simultáneas

Determine el intervalo solución en $\mathbb{R}$ para cada caso, resolviendo las inecuaciones que componen el sistema:

$$\text{a) } \begin{cases} 4x - 2(x + 2) \geq x - 1 \\ 5x - 3(x - 1) < 12 - x \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (x - 1)^2 + 3x > 5 + (x - 2)^2 \\ \frac{x}{3} - 2 \geq 4x - \frac{5}{2}(x - 1) \end{cases}$$

$$\text{c) } -6 < \frac{x+2}{4} \leq 8$$

$$\text{d) } 2 \leq \frac{3x}{4} - 1 < 8$$

4. Sección de Logaritmos: Cálculo y Reducción

I. Calcular el valor de x utilizando la definición fundamental de logaritmo:

$$\text{a) } \log_4(64) = x \qquad \text{b) } \log_2(128) = x \qquad \text{c) } \log_3(\sqrt{\frac{1}{27}}) = x \qquad \text{d) } \log_{16}(8) = x$$

$$\text{e) } \log_x(243) = 5 \qquad \text{f) } \log_x\left(\frac{1}{16}\right) = -4$$

II. Calcular el valor numérico exacto de las siguientes expresiones aritméticas:

$$\text{a) } \log_2(64) - \log_3(27) + \log_5(125)$$

$$\text{b) } \log_6\left(\frac{1}{36}\right) + \log_2\left(\frac{1}{8}\right) - \log_5\left(\frac{1}{5}\right)$$

III. Reducir las siguientes expresiones compuestas a un solo término logarítmico:

$$\text{a) } 2\log(x) + 4\log(y) - \frac{1}{3}\log(z)$$

$$\text{b) } \frac{1}{2}\log(a) + \frac{3}{2}\log(b) - \frac{1}{2}\log(c)$$

$$\text{c) } \log(x + 2) + \log(x - 2) - 3\log(y)$$

5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales (De igual y distinta base)

Resuelva las siguientes ecuaciones en el conjunto de los reales, analizando restricciones cuando corresponda. Para las ecuaciones de distinta base, exprese su resultado en términos de logaritmos:

a) $\log(x + 6) - \log(x) = \log(3)$

b) $\log_3(x) + \log_3(x - 6) = \log_3(27)$

c) $\log_2(x + 3) + \log_2(x - 3) = 4$

d) $3^{2x} \cdot 27 = 9$

e) $2^{x+2} \cdot 16 = 4^{x-1}$

f) $\frac{27 \cdot 9^{2x}}{3^x} = 81$

g) $5^{3x-6} = 1$

h) $3^x = 8$

i) $4^{x+1} = 3^x$

j) $2^{x+3} = 5^{2x-1}$

k) $3 \cdot 2^{3x+1} = 5^{x-1}$

PAUTA DE SOLUCIONES FINALES

SOLUCIONES DE LA GUÍA DE EJERCICIOS

1. Operaciones con Conjuntos e Intervalos

- | | | | |
|--------------------|-------------------------------------|--------------|--------------------------------------|
| a) $[-5, +\infty[$ | b) $\emptyset$ | c) $[-5, 1[$ | d) $]-\infty, -5[\cup [3, +\infty[$ |
| e) $[1, +\infty[$ | f) $]-\infty, 1[\cup [3, +\infty[$ | g) $[-2, 1[$ | h) $[-2, 1[$ |

2. Inecuaciones (Revisadas Rigurosamente)

- | | |
|--|---|
| a) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-11/3, +\infty[$ | b) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, +\infty[(\mathbb{R})$ |
| c) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, -17/12[$ | d) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, 3/2[$ |
| e) $SR = \mathbb{R} \mid SF = \emptyset$ | f) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, 45/2[$ |
| g) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, -7[\cup]2, +\infty[$ | h) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, -4[\cup [2, 5[$ |
| i) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, -2[\cup [4, +\infty[$ | j) $SR = \mathbb{R} \mid SF =]-\infty, 0[\cup [2, 7[$ |
| k) $SR = \mathbb{R} - \{4\} \mid SF = [-8, 4[$ | l) $SR = \mathbb{R} - \{-5\} \mid SF =]-\infty, -12[\cup]-5, +\infty[$ |

3. Sistemas de Inecuaciones e Inecuaciones Simultáneas

- a) $\emptyset$ (Intersección vacía de $x \geq 3$ con $x < 3$).
- b) $\emptyset$ (Intersección vacía de $x > 8/5$ con $x \leq -27/7$).
- c) $]-26, 30]$.
- d) $[4, 12[$.

4. Sección de Logaritmos

I. Valores de x: a) $x = 3$ | b) $x = 7$ | c) $x = -\frac{3}{2}$ | d) $x = \frac{3}{4}$ | e) $x = 3$ | f) $x = 2$

II. Valores numéricos: a) 6 | b) -4

III. Reducción: a) $\log\left(\frac{x^2 \cdot y^4}{3\sqrt{z}}\right)$ | b) $\log\left(\sqrt{\frac{a \cdot b^3}{c}}\right)$ | c) $\log\left(\frac{x^2 - 4}{y^3}\right)$

5. Ecuaciones Logarítmicas y Exponenciales

- | | | |
|-----------------------|----------------------------------|---|
| a) $x = 3$ | b) $x = 9$ | c) $x = 5$ |
| d) $x = -\frac{1}{2}$ | e) $x = 6$ | f) $x = \frac{1}{3}$ |
| g) $x = 2$ | h) $x = \frac{\log(8)}{\log(3)}$ | i) $x = \frac{-\log(4)}{\log(4) - \log(3)}$ |

$$\text{j) } x = \frac{3\log(2) + \log(5)}{2\log(5) - \log(2)} = \frac{\log(40)}{\log(25/2)}$$

$$\text{k) } x = \frac{-\log(3) - \log(2) - \log(5)}{3\log(2) - \log(5)} = -\frac{\log(30)}{\log(8/5)}$$