



EXAMEN
MATEMÁTICAS III

NOMBRE: Pauito N° CAD. CURSO: 3°EJ .

1. **DOCENTE(S):** S. Baquedano, C. Hardy, A. Rauch.
2. **FECHA:** NOVIEMBRE 2025.
3. **UNIDAD(ES) TEMÁTICA(S):** Integral indefinida - Integral definida - Aplicaciones
4. **TIEMPO:** 120 minutos
5. **PUNTAJE TOTAL - PUNTAJE PARA APROBAR:** 100 puntos – 60 puntos
6. **MATERIALES:** de escritorio, calculadora no algebraica.
7. **INDICACIONES:**
 - Lea cuidadosamente cada pregunta o problema propuesto, efectuando un análisis cuidadoso de la interrogante planteada.
 - Utilice lápiz pasta azul o negro. **Si escribe con lápiz grafito pierde derecho a corrección.**
 - **No se puede usar corrector. Si se equivoca, tache el error.**
 - Resuelva su prueba en forma ordenada, respetando la secuencia lógica que acompaña el desarrollo de un problema matemático.
 - Conteste todo en las hojas destinadas para responder.

8. **RESULTADOS OBTENIDOS:**

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	32	
2	15	
3	18	
4	18	
5	17	
Puntaje total	100	
NOTA		



PREGUNTA N°1 (32 puntos)

Capacidad : Razonamiento Lógico.

Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y reglas de integración.

Contenido : Reglas básicas de integración. Métodos de integración.

Resolver las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \left(ax^2 - \operatorname{sen}(x) + \frac{4}{x} - \frac{7}{x^2 + 4} \right) dx$

$$= \int ax^2 dx - \int \operatorname{sen}(x) dx + \int \frac{4}{x} dx - \int \frac{7}{x^2 + 4} dx$$

$$= a \frac{x^3}{3} + \cos(x) + 4 \ln|x| - \frac{7}{2} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

b) $\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x) + 1} dx$

$$u = \operatorname{sen}(x)$$

$$du = \cos(x) dx$$

$$\int \frac{du}{u^2 + 1} = \operatorname{arctg}(u) + C$$

$$= \operatorname{arctg}(\operatorname{sen}(x)) + C$$



c) $\int e^{2x} \cdot \sin(5x) dx$

$$\begin{aligned} u &= \sin(5x) & dv &= e^{2x} dx \\ du &= 5 \cos(5x) dx & v &= \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

$$\int e^{2x} \sin(5x) dx = \sin(5x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot 5 \cos(5x) dx$$

$$\int e^{2x} \sin(5x) dx = \sin(5x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{5}{2} \int e^{2x} \cos(5x) dx$$

$$\begin{aligned} u &= \cos(5x) & dv &= e^{2x} dx \\ du &= -5 \sin(5x) dx & v &= \frac{e^{2x}}{2} \end{aligned}$$

$$\int e^{2x} \sin(5x) dx = \sin(5x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{5}{2} \left(\cos(5x) \frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2} \cdot (-5 \sin(5x)) dx \right)$$

$$\int e^{2x} \sin(5x) dx = \sin(5x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{5}{4} \cos(5x) e^{2x} - \frac{25}{4} \int e^{2x} \sin(5x) dx$$

$$\frac{29}{4} \int e^{2x} \sin(5x) dx = \sin(5x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{5}{4} \cos(5x) \cdot e^{2x}$$

$$\int e^{2x} \sin(5x) dx = \frac{4}{29} \left[\sin(5x) \cdot \frac{e^{2x}}{2} - \frac{5}{4} \cos(5x) \cdot e^{2x} \right] + C //$$



$$d) \int \frac{2x^2 - 3x + 5}{(x+1)(x^2+4)} dx$$

$$\frac{2x^2 - 3x + 5}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} \quad | \quad (x+1)(x^2+4)$$

$$2x^2 - 3x + 5 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$$
$$= Ax^2 + 4A + Bx^2 + Bx + Cx + C$$

$$2x^2 - 3x + 5 = x^2(A+B) + x(B+C) + 4A + C$$

$$\left. \begin{array}{l} A+B=2 \\ B+C=-3 \\ 4A+C=5 \end{array} \right\} \begin{array}{l} A=2 \\ B=0 \\ C=-3 \end{array}$$

$$\therefore \int \frac{2}{x+1} dx + \int \frac{-3}{x^2+4} dx$$

$$= 2 \ln|x+1| - 3 \cdot \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C //$$



PREGUNTA N°2 (15 puntos)

Capacidad	: Razonamiento Lógico.
Objetivo	: Aplicar teoremas y propiedades en el cálculo de integrales definidas
Contenido	: Integral definida

Obtener el valor de $t \in \mathbb{R}$, tal que

$$\int_2^t (x^2 + 2) dx = 45$$

$$\left(\frac{x^3}{3} + 2x \right) \Big|_2^t = 45$$

$$\frac{t^3}{3} + 2t - \left(\frac{8}{3} + 4 \right) = 45$$

$$\frac{t^3}{3} + 2t - \frac{20}{3} - 45 = 0 \quad | \cdot 3$$

$$t^3 + 6t - 20 - 135 = 0$$

$$t^3 + 6t - 155 = 0$$

$$\boxed{t=5}$$



PREGUNTA N°3 (18 puntos)

Capacidad : Razonamiento Lógico.

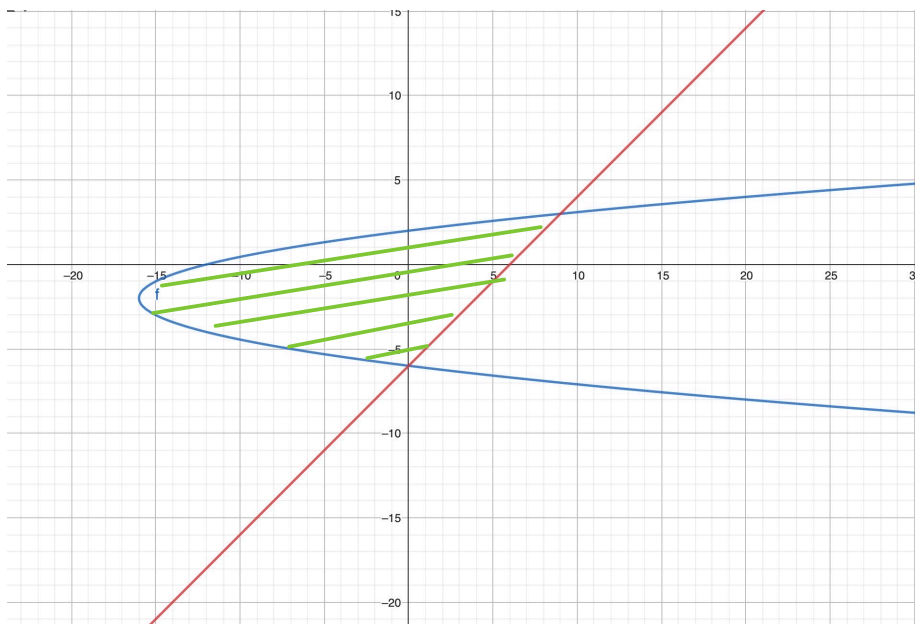
Objetivo : Aplicar la integral definida en la resolución de problemas de áreas de curvas definidas en coordenadas rectangulares.

Contenido : Área entre curvas.

Grafique, achure y calcule, mediante integrales, el área de la región limitada por las curvas:

$$x = y^2 + 4y - 12$$

$$y = x - 6$$



Pro. 1:

$$y^2 + 4y - 12 = y + 6$$

$$y^2 + 3y - 18 = 0$$

$$(y + 6)(y - 3) = 0$$

$$y = -6$$

$$y = 3$$

$$A = \int_{-6}^3 [y + 6 - (y^2 + 4y - 12)] dy = \int_{-6}^3 [y + 6 - y^2 - 4y + 12] dy$$

$$A = \int_{-6}^3 (-y^2 - 3y + 18) dy = \left(-\frac{y^3}{3} - \frac{3y^2}{2} + 18y \right) \Big|_{-6}^3$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} - \frac{3 \cdot 3^2}{2} + 18 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{(-6)^3}{3} - \frac{3 \cdot (-6)^2}{2} + 18 \cdot (-6) \right)$$

$$= \frac{63}{2} - 90 = \frac{243}{2} \text{ u}^2 //$$



PREGUNTA N°4 (18 puntos)

Capacidad	: Razonamiento Lógico. Resolver Problemas.
Objetivo	: Formular un plan de trabajo al resolver problemas que involucren aplicaciones de la integral.
Contenido	: Problemas de aplicación.

Se sabe que cierto material radiactivo se desintegra a una razón proporcional a la cantidad presente. Si inicialmente hay 40 miligramos de material y después de 2 horas se observa que el material ha perdido el 10% de su masa original.

Encontrar:

- Una expresión para la masa de material restante en el momento t .
- ¿Cuántos miligramos de material quedan después de 3 horas?
- ¿Después de cuánto tiempo quedan 25 ^{mil}gramos de material?

$$x(0) = 40$$

$$x(2) = 36$$

$$\frac{dx}{dt} = k \cdot x$$

$$\frac{dx}{x} = k dt \quad | \int$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int k dt$$

$$\ln|x| = k \cdot t + C \quad | e$$

$$x = e^{k \cdot t + C} = e^{k \cdot t} \cdot e^C$$

$$x = C_1 \cdot e^{k \cdot t}$$

$$x(0) = 40$$

$$40 = C_1 \cdot e^0$$

$$C_1 = 40$$

$$x(2) = 36$$

$$36 = 40 \cdot e^{k \cdot 2}$$

$$\frac{36}{40} = e^{2k}$$

$$k = -0,0527$$

$$\therefore a) x(t) = 40 \cdot e^{-0,0527 \cdot t}$$

$$b) x(3) = 40 \cdot e^{-0,0527 \cdot 3}$$

$$x(3) = 34,1506 \text{ mg}$$

$$c) 25 = 40 \cdot e^{-0,0527 \cdot t}$$

$$t = 8,9185 \text{ h.}$$



PREGUNTA N°5 (17 puntos)

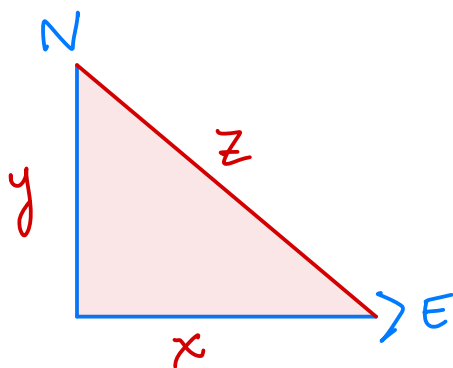
Capacidad Evaluada: Razonamiento lógico. Resolver problemas.

Objetivo: Formular un plan de trabajo al resolver problemas que involucren aplicaciones de la derivada.

Contenido: Problemas de aplicación de derivadas, razón de cambio.

5. Un barco sale desde un muelle y navega hacia el ESTE a una velocidad constante de nudos. Al mismo tiempo, otro barco ~~sale desde el muelle y navega hacia el NOROCCIDENTE~~ el NOROCCIDENTE del muelle y navega hacia el NOROCCIDENTE a una velocidad de 4 nudos.

¿Cuál es la razón de cambio de la distancia entre los dos barcos después de 2 horas?



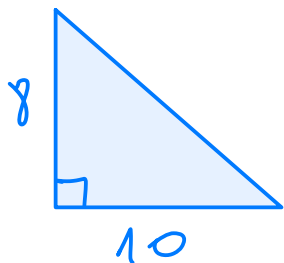
$$\frac{dy}{dt} = 4$$

$$\frac{dx}{dt} = 5$$

$$t = 2$$

$$x = 5 \cdot 2 = 10$$

$$y = 4 \cdot 2 = 8$$



$$10^2 + 8^2 = z^2$$

$$100 + 64 = z^2$$

$$z^2 = 164$$

$$z = 12,8$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$
$$2x \cdot x' + 2y \cdot y' = 2z \cdot z'$$
$$2 \cdot 10 \cdot 5 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 2 \cdot 12,8 \cdot z'$$

$$z' = 6,4 \text{ nudos}$$