

Integral por Partes

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

OCTUBRE DE 2023

Teorema de integración por partes

Teorema

Sean f, g funciones derivables, entonces:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

Teorema de integración por partes

Teorema

Sean f, g funciones derivables, entonces:

$$\int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

En general usaremos esta versión simplificada de escritura:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

Explicación del teorema:

Por regla del producto:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Luego:

Explicación del teorema:

Por regla del producto:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Luego:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

Explicación del teorema:

Por regla del producto:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Luego:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

Pero claramente $(f(x)g(x))$ es antiderivada de $(f(x)g(x))'$:

Explicación del teorema:

Por regla del producto:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

Luego:

$$\int (f(x) \cdot g(x))' dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

Pero claramente $(f(x)g(x))$ es antiderivada de $(f(x)g(x))'$:

$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx$$

Una ayuda para saber cómo elegir las variables

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Para saber cuál de las dos funciones que se multiplican debe ser llamada “ u ”, puede seguirse el siguiente orden de prioridad, de izquierda a derecha:

Una ayuda para saber cómo elegir las variables

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

Para saber cuál de las dos funciones que se multiplican debe ser llamada “ u ”, puede seguirse el siguiente orden de prioridad, de izquierda a derecha:

Regla ILATE

- I: Inversa trigonométrica (ej: arcsin, arc cos)
- L: Logaritmo
- A: Aritmética (polinomios y funciones racionales)
- T: Trigonométrica (ej: sin, cos, tan)
- E: Exponencial

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$

Solución:

$$u =$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$

Solución:

$$u = x \Rightarrow du =$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$

Solución:

$$u = x \Rightarrow du = 1 dx$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$

Solución:

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$

Solución:

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\int x e^x dx =$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\int x e^x dx = uv - \int v du$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= uv - \int v du \\ &= x \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$u = x \Rightarrow du = 1 dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= uv - \int v du \\ &= x e^x - \int\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= uv - \int v du \\ &= x e^x - \int e^x . \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= uv - \int v du \\ &= x e^x - \int e^x \cdot 1 dx \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$\begin{aligned} u = x &\Rightarrow du = 1 dx \\ dv = e^x &\Rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x e^x dx &= uv - \int v du \\ &= x e^x - \int e^x \cdot 1 dx \\ &= x e^x - e^x + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encontrar $\int x e^x dx$ **Solución:**

$$\begin{aligned}u &= x \Rightarrow du = 1 dx \\ dv &= e^x \Rightarrow v = e^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= uv - \int v du \\ &= x e^x - \int e^x \cdot 1 dx \\ &= x e^x - e^x + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^x(x - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad du = \frac{1}{x} dx$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx =$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx = \ln(x) \cdot$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx = \ln(x) \cdot x -$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx = \ln(x) \cdot x - \int$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$

Solución: Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx = \ln(x) \cdot x - \int x$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$ **Solución:** Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx = \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$ **Solución:** Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(x)x - \int 1 dx \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$ **Solución:** Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(x)x - \int 1 dx \\ &= \ln(x)x - x + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encontrar $\int \ln(x) dx$ **Solución:** Escribamos $\ln(x) = \ln(x) \cdot 1$. Definimos:

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = 1 \Rightarrow v = x$$

$$\begin{aligned}\int \ln(x) dx &= \ln(x) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= \ln(x)x - \int 1 dx \\ &= \ln(x)x - x + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= x(\ln(x) - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \sin(x) dx = uv - \int v du$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \sin(x) dx = uv - \int v du$$

$$=$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= uv - \int v du \\ &= \sin(x)e^x - \int \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= uv - \int v du \\ &= \sin(x)e^x - \int e^x \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular $\int e^x \sin(x) dx$

$$u = \sin(x) \Rightarrow du = \cos(x) dx$$

$$dv = e^x \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= uv - \int v du \\ &= \sin(x)e^x - \int e^x \cos(x) dx \end{aligned}$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos(x) dx =$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \cos(x)e^x - \int$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \cos(x)e^x - \int e^x$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\int e^x \cos(x) dx = \cos(x)e^x - \int e^x(-\sin(x)) dx$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x) dx &= \cos(x)e^x - \int e^x(-\sin(x)) dx \\ &= \cos(x)e^x + \int e^x\end{aligned}$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x) dx &= \cos(x)e^x - \int e^x(-\sin(x)) dx \\ &= \cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx\end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \int e^x \cos(x) dx$$

Calculamos $\int e^x \cos(x) dx$ por partes:

$$u = \cos(x) \Rightarrow du = -\sin(x)$$

$$dv = e^x dx \Rightarrow v = e^x$$

$$\begin{aligned}\int e^x \cos(x) dx &= \cos(x)e^x - \int e^x(-\sin(x)) dx \\ &= \cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx\end{aligned}$$

Reemplazamos:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \int e^x \cos(x) dx \\ &= \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right)\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right)$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right) \\ \int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right)$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx$$

$$2 \int e^x \sin(x) dx =$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right) \\ \int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx \\ 2 \int e^x \sin(x) dx &= e^x (\sin(x) - \cos(x))\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right)$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx$$

$$2 \int e^x \sin(x) dx = e^x (\sin(x) - \cos(x))$$

$$\int e^x \sin(x) dx =$$

Por lo tanto:

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right)$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx$$

$$2 \int e^x \sin(x) dx = e^x (\sin(x) - \cos(x))$$

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \left(\cos(x)e^x + \int e^x \sin(x) dx \right) \\ \int e^x \sin(x) dx &= \sin(x)e^x - \cos(x)e^x - \int e^x \sin(x) dx \\ 2 \int e^x \sin(x) dx &= e^x (\sin(x) - \cos(x)) \\ \int e^x \sin(x) dx &= \frac{e^x}{2} (\sin(x) - \cos(x)) + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Tarea

Aplique el razonamiento anterior para encontrar la primitiva de $\sin^2(x)$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u =$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx =$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot \ln(x) -$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ 2 \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ 2 \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= (\ln(x))^2 \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encontrar $\int \frac{\ln(x)}{x} dx$

Solución: Primero, notar que $Dom(f) = \mathbb{R}^+$

$$u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx$$

$$dv = \frac{1}{x} dx \Rightarrow v = \ln(x)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \ln(x) \cdot \ln(x) - \int \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \\ 2 \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= (\ln(x))^2 \\ \int \frac{\ln(x)}{x} dx &= \frac{(\ln(x))^2}{2} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$

Solución:

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$

Solución:

$$u = \arctan(x) \Rightarrow$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$

Solución:

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$

Solución:

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$

Solución:

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \arctan(x) dx =$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$ **Solución:**

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) -$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$ **Solución:**

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int$$

Ejemplo 5

Encontrar $\int \arctan(x) dx$ **Solución:**

$$u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$dv = 1 dx \Rightarrow v = x$$

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int x \cdot \frac{1}{1+x^2} dx$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$.

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx =$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c =$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Finalmente:

$$\int \arctan(x) dx = x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

Para calcular $\int \frac{x}{1+x^2} dx$ aplicamos cambio de variable:

Sea $t = 1 + x^2$, luego $dt = 2x dx$. Podemos escribir $\frac{1}{2}dt = x dx$. Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \frac{1}{t} \cdot \frac{1}{2} dt = \frac{1}{2} \ln |t| + c = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + c = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \int \arctan(x) dx &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx \\ &= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Solución: Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2xe^{x^2}$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Solución: Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2xe^{x^2}$

$$u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Solución: Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2xe^{x^2}$

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx \\ dv = 2xe^{x^2} dx &\Rightarrow v = e^{x^2} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Solución: Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2xe^{x^2}$

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx \\ dv = 2xe^{x^2} dx &\Rightarrow v = e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx =$$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Solución: Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2x e^{x^2}$

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx \\ dv = 2x e^{x^2} dx &\Rightarrow v = e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\int 2x^3 e^{x^2} dx = x^2 \cdot e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2x dx$$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$

Solución: Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2x e^{x^2}$

$$\begin{aligned} u = x^2 &\Rightarrow du = 2x dx \\ dv = 2x e^{x^2} dx &\Rightarrow v = e^{x^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int 2x^3 e^{x^2} dx &= x^2 \cdot e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2x dx \\ &= x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 6

Encontrar $\int 2x^3 e^{x^2} dx$ **Solución:** Escribimos $2x^3 e^{x^2} = x^2 \cdot 2x e^{x^2}$

$$\begin{aligned}u &= x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x dx \\dv &= 2x e^{x^2} dx \quad \Rightarrow \quad v = e^{x^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int 2x^3 e^{x^2} dx &= x^2 \cdot e^{x^2} - \int e^{x^2} \cdot 2x dx \\&= x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + c \quad c \in \mathbb{R} \\&= e^{x^2}(x^2 - 1) + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular las siguientes primitivas:

① $\int x^3 \cos(x^2) dx$

② $\int x \ln(x)$

③ $\int e^x \cos(x) dx$

④ $\int \sin^2(x) dx$

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{2}(\cos(x^2) + x^2 \sin(x^2)) + c$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{x^2}{4}(2 \ln(x) - 1) + c$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{1}{2} e^x (\sin(x) + \cos(x)) + c$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{\cos(x)}{2}(x - \sin(x)) + c$$