

RAZÓN DE CAMBIO

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

7 de agosto de 2023

Razón de cambio

Razón (tasa) de cambio

La razón de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un intervalo $[x, x_0]$ es el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Este es igual a la pendiente de la secante a la curva que pasa por $(x, f(x))$ y $(x_0, f(x_0))$

Razón de cambio

Razón (tasa) de cambio

La razón de cambio promedio de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un intervalo $[x, x_0]$ es el cociente

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

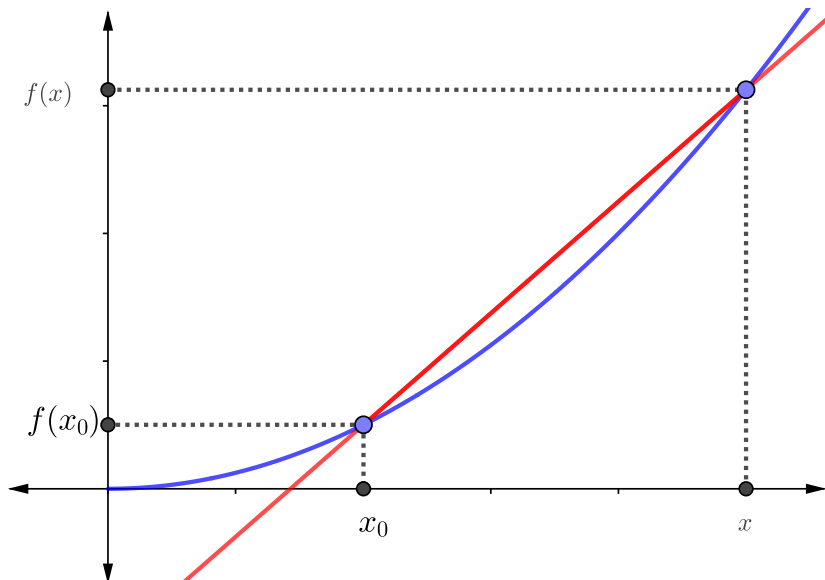
Este es igual a la pendiente de la secante a la curva que pasa por $(x, f(x))$ y $(x_0, f(x_0))$

Razón (tasa) de cambio instantánea

La razón **instantánea de cambio** de una función $y = f(x)$ con respecto a x en un $x = x_0$ es el valor

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Este límite es igual a la pendiente de la tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$



Ejemplos

¿Qué representa la razón de cambio en cada caso?

- $f(x)$ velocidad en el instante x

Ejemplos

¿Qué representa la razón de cambio en cada caso?

- $f(x)$ velocidad en el instante x
- $a(x)$ desplazamiento en el instante x

Ejemplos

¿Qué representa la razón de cambio en cada caso?

- $f(x)$ velocidad en el instante x
- $a(x)$ desplazamiento en el instante x
- $F(x)$ cantidad de trabajo en el instante x

Ejemplos

¿Qué representa la razón de cambio en cada caso?

- $f(x)$ velocidad en el instante x
- $a(x)$ desplazamiento en el instante x
- $F(x)$ cantidad de trabajo en el instante x
- $G(x)$ carga eléctrica en el instante x

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)
- h : altura (en metros) del globo

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)
- h : altura (en metros) del globo (en el instante t)

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)
- h : altura (en metros) del globo (en el instante t)
- s : distancia (en metros) del globo al observador

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)
- h : altura (en metros) del globo (en el instante t)
- s : distancia (en metros) del globo al observador (en el instante t)

Ejercicio 1

Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)
- h : altura (en metros) del globo (en el instante t)
- s : distancia (en metros) del globo al observador (en el instante t)

Nota: Se subentiende que h y s son funciones, $h = h(t)$, $s = s(t)$.

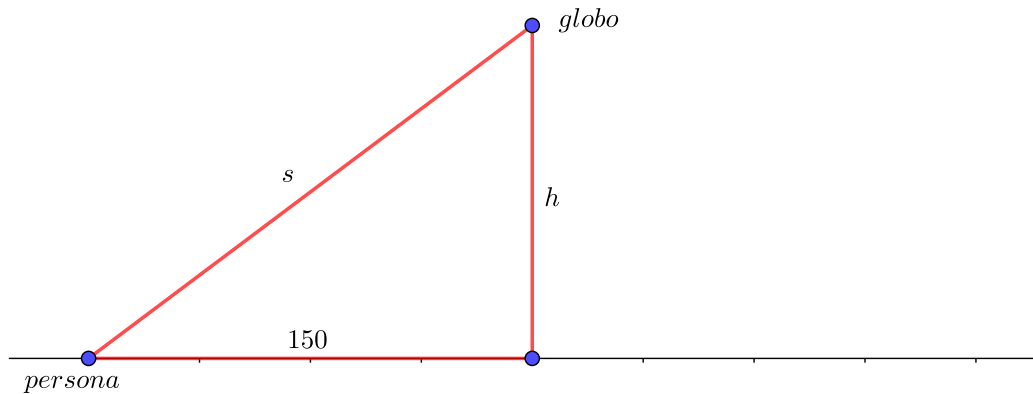
Ejercicio 1

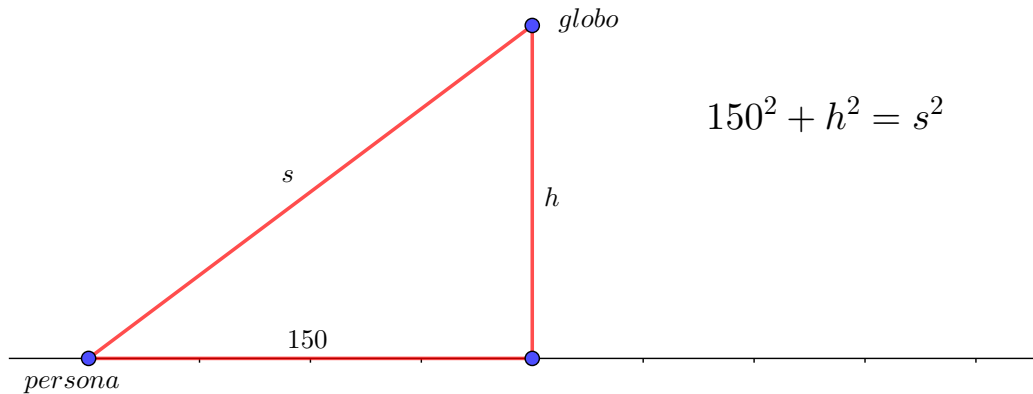
Se suelta un globo desde el piso, en un punto ubicado a 150 metros de un observador, quien también está en el nivel del piso. Si el globo se eleva en línea recta a razón de 8 metros por segundo, ¿qué tan rápido está aumentando la distancia del observador al globo cuando este se encuentra a una altura de 50 metros?

Solución: Definimos variables:

- t : tiempo en segundos (a contar del momento que se suelta el globo)
- h : altura (en metros) del globo (en el instante t)
- s : distancia (en metros) del globo al observador (en el instante t)

Nota: Se subentiende que h y s son funciones, $h = h(t)$, $s = s(t)$. Anotamos por simplicidad $s' = \frac{ds}{dt}$, $h' = \frac{dh}{dt}$





Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$150^2 + 50^2 = s^2$$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$150^2 + 50^2 = s^2$$

$$25000 = s^2$$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$150^2 + 50^2 = s^2$$

$$25000 = s^2$$

$$\sqrt{25000} = s$$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$150^2 + 50^2 = s^2$$

$$25000 = s^2$$

$$\sqrt{25000} = s$$

$$\sqrt{2500 \cdot 10} = s$$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$150^2 + 50^2 = s^2$$

$$25000 = s^2$$

$$\sqrt{25000} = s$$

$$\sqrt{2500 \cdot 10} = s$$

$$50\sqrt{10} = s$$

Calculamos la distancia entre la persona y el globo cuando $h = 50$

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$150^2 + 50^2 = s^2$$

$$25000 = s^2$$

$$\sqrt{25000} = s$$

$$\sqrt{2500 \cdot 10} = s$$

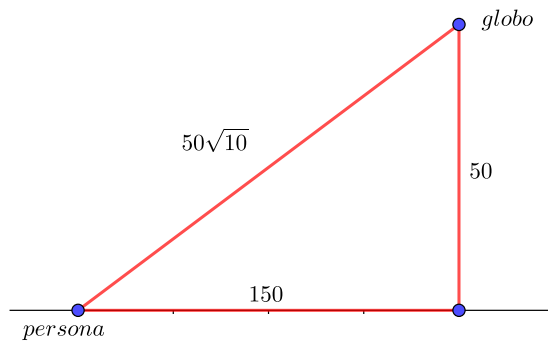
$$50\sqrt{10} = s$$

Derivamos implícitamente (con respecto a t)

$$150^2 + h^2 = s^2$$

$$2h \cdot h' = 2s \cdot s'$$

$$h \cdot h' = s \cdot s'$$



$$h \cdot h' = s \cdot s'$$

$$\begin{aligned}h \cdot h' &= s \cdot s' \\ 50[m] \cdot 8[m/s] &= 50\sqrt{10}[m] \cdot s'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \cdot h' &= s \cdot s' \\50[m] \cdot 8[m/s] &= 50\sqrt{10}[m] \cdot s' \\\frac{8}{\sqrt{10}}[m/s] &= s'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \cdot h' &= s \cdot s' \\50[m] \cdot 8[m/s] &= 50\sqrt{10}[m] \cdot s' \\\frac{8}{\sqrt{10}}[m/s] &= s' \\2.53[m/s] &\approx s'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}h \cdot h' &= s \cdot s' \\50[m] \cdot 8[m/s] &= 50\sqrt{10}[m] \cdot s' \\\frac{8}{\sqrt{10}}[m/s] &= s' \\2.53[m/s] &\approx s'\end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando la altura del globo es de $50[m]$, el observador y el globo se alejan a una velocidad aproximada de $2.53[m/s]$.

Ejercicio 2

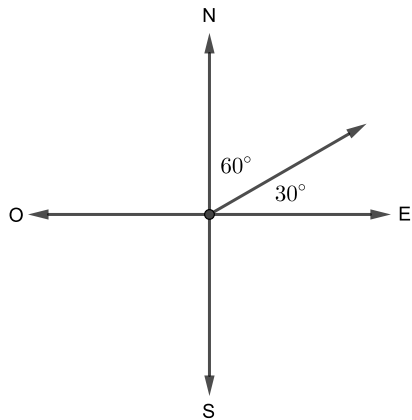
Dos botes parten de un mismo punto. El bote A se mueve a $5\sqrt{3} [kn]$ con rumbo al este, y el bote B a $10 [kn]$ con rumbo $60^\circ NE$. ¿A qué velocidad se alejan después de una hora de recorrido?

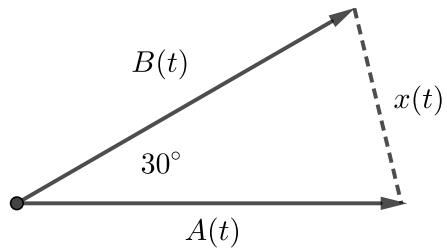
Ejercicio 2

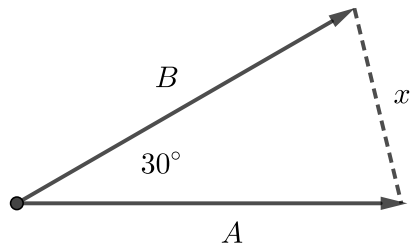
Dos botes parten de un mismo punto. El bote A se mueve a $5\sqrt{3} [kn]$ con rumbo al este, y el bote B a $10 [kn]$ con rumbo $60^\circ NE$. ¿A qué velocidad se alejan después de una hora de recorrido?

Solución: Definimos variables:

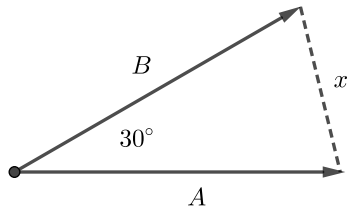
- t : tiempo en horas. A partir del punto de inicio del recorrido.
- $x(t)$: distancia entre los botes (en $[nmi]$) en el instante t .
- $A(t)$: distancia recorrida por el primer bote (en $[nmi]$) hasta el instante t .
- $B(t)$: distancia recorrida por el segundo bote (en $[nmi]$) hasta el instante t .







$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$



Aplicando teorema del coseno:

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

$$x(1)^2 = A(1)^2 + B(1)^2 - A(1)B(1) \cdot \sqrt{3}$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

$$x(1)^2 = A(1)^2 + B(1)^2 - A(1)B(1) \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = (5\sqrt{3})^2 + 10^2 - 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

$$x(1)^2 = A(1)^2 + B(1)^2 - A(1)B(1) \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = (5\sqrt{3})^2 + 10^2 - 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = 75 + 100 - 150$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

$$x(1)^2 = A(1)^2 + B(1)^2 - A(1)B(1) \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = (5\sqrt{3})^2 + 10^2 - 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = 75 + 100 - 150$$

$$x(1)^2 = 25$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

$$x(1)^2 = A(1)^2 + B(1)^2 - A(1)B(1) \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = (5\sqrt{3})^2 + 10^2 - 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = 75 + 100 - 150$$

$$x(1)^2 = 25$$

$$x(1) = 5$$

Aplicando teorema del coseno:

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos(30^\circ)$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Después de una hora de recorrido, se tiene: $A(1) = 5\sqrt{3}[nmi]$, $B(1) = 10[nmi]$. Luego:

$$x(1)^2 = A(1)^2 + B(1)^2 - A(1)B(1) \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = (5\sqrt{3})^2 + 10^2 - 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot \sqrt{3}$$

$$x(1)^2 = 75 + 100 - 150$$

$$x(1)^2 = 25$$

$$x(1) = 5$$

Por lo tanto después de una hora de recorrido se encuentran a una distancia de $5[nmi]$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$\begin{aligned}x^2 &= A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3} \\ 2x \cdot x' &= \end{aligned}$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$\begin{aligned}x^2 &= A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3} \\ 2x \cdot x' &= 2A \cdot A' +\end{aligned}$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$\begin{aligned}x^2 &= A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3} \\ 2x \cdot x' &= 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}\end{aligned}$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) =$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) +$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3}.$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 -$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 +$$

Ahora buscamos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 + 5\sqrt{3} \cdot 10) \cdot \sqrt{3}$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 + 5\sqrt{3} \cdot 10) \cdot \sqrt{3}$$

$$10 \cdot x'(1) = 150 +$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 + 5\sqrt{3} \cdot 10) \cdot \sqrt{3}$$

$$10 \cdot x'(1) = 150 + 200 - (100\sqrt{3})\sqrt{3}$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 + 5\sqrt{3} \cdot 10) \cdot \sqrt{3}$$

$$10 \cdot x'(1) = 150 + 200 - (100\sqrt{3})\sqrt{3}$$

$$10x'(1) = 350 - 300$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 + 5\sqrt{3} \cdot 10) \cdot \sqrt{3}$$

$$10 \cdot x'(1) = 150 + 200 - (100\sqrt{3})\sqrt{3}$$

$$10x'(1) = 350 - 300$$

$$10x'(1) = 50$$

Ahora busquemos la velocidad con que se están alejando los botes

$$x^2 = A^2 + B^2 - AB \cdot \sqrt{3}$$

$$2x \cdot x' = 2A \cdot A' + 2B \cdot B' - (A'B + A \cdot B')\sqrt{3}$$

$$2x(1) \cdot x'(1) = 2A(1) \cdot A'(1) + 2B(1) \cdot B'(1) - (A'(1)B(1) + A(1) \cdot B'(1))\sqrt{3}$$

$$2 \cdot 5 \cdot x'(1) = 2 \cdot 5\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} + 2 \cdot 10 \cdot 10 - (5\sqrt{3} \cdot 10 + 5\sqrt{3} \cdot 10) \cdot \sqrt{3}$$

$$10 \cdot x'(1) = 150 + 200 - (100\sqrt{3})\sqrt{3}$$

$$10x'(1) = 350 - 300$$

$$10x'(1) = 50$$

$$x'(1) = 5$$

Por lo tanto, los botes se alejan a una velocidad de $5[kn]$

Ejercicio 2

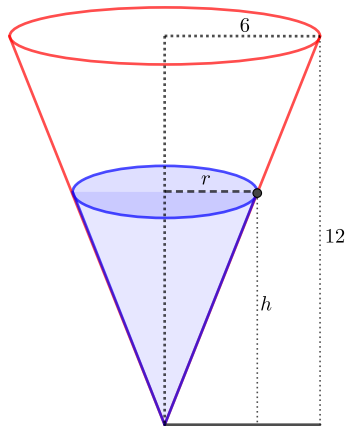
En un tanque cónico (cono invertido) se vierte agua a razón de 8 metros cúbicos por minuto. Si la altura del tanque es de 12 metros y el radio de su abertura es de 6 metros. ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel de agua cuando este líquido tiene una profundidad de 4 metros?

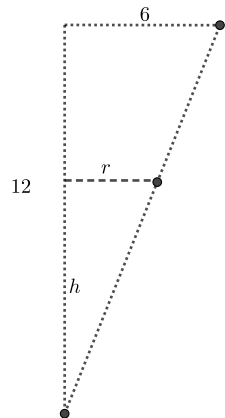
Ejercicio 2

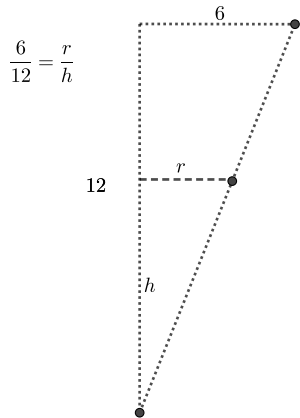
En un tanque cónico (cono invertido) se vierte agua a razón de 8 metros cúbicos por minuto. Si la altura del tanque es de 12 metros y el radio de su abertura es de 6 metros. ¿Qué tan rápido se está elevando el nivel de agua cuando este líquido tiene una profundidad de 4 metros?

Solución: Definimos:

- t : tiempo en minutos.
- h : profundidad (en metros) en el instante t
- r : radio (en metros) de la superficie del agua en el instante t .
- V : volumen (en metros cúbicos) en el instante t







El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

$$\frac{6}{12} =$$

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

$$\frac{6}{12} = \frac{r}{h}$$

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

$$\frac{6}{12} = \frac{r}{h}$$

Luego $r = \frac{h}{2}$. Por lo tanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot$$

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

$$\frac{6}{12} = \frac{r}{h}$$

Luego $r = \frac{h}{2}$. Por lo tanto:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h$$

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

$$\frac{6}{12} = \frac{r}{h}$$

Luego $r = \frac{h}{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h \end{aligned}$$

El volumen de un cono es

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Por teorema de Thales:

$$\frac{6}{12} = \frac{r}{h}$$

Luego $r = \frac{h}{2}$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \frac{h^2}{4} \cdot h \\ &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \end{aligned}$$

$$V = \frac{\pi}{12} \cdot h^3$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h' \\V' &= \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot h'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h' \\V' &= \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot h' \\8 &= \frac{\pi}{4} \cdot (4)^2 \cdot h'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h' \\V' &= \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot h' \\8 &= \frac{\pi}{4} \cdot (4)^2 \cdot h' \\8 &= 4\pi \cdot h'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h' \\V' &= \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot h' \\8 &= \frac{\pi}{4} \cdot (4)^2 \cdot h' \\8 &= 4\pi \cdot h' \\\frac{8}{4\pi} &= h'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h' \\V' &= \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot h' \\8 &= \frac{\pi}{4} \cdot (4)^2 \cdot h' \\8 &= 4\pi \cdot h' \\\frac{8}{4\pi} &= h' \\0.64 &\approx h'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\pi}{12} \cdot h^3 \\
 V' &= \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2 \cdot h' \\
 V' &= \frac{\pi}{4} \cdot h^2 \cdot h' \\
 8 &= \frac{\pi}{4} \cdot (4)^2 \cdot h' \\
 8 &= 4\pi \cdot h' \\
 \frac{8}{4\pi} &= h' \\
 0.64 &\approx h'
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando la profundidad del agua es de 4 metros, el nivel del agua se eleva a razón de 0.64 metros por minuto.

Ejercicio 4

Un estanque cilíndrico de petróleo tiene área basal $0.4[m^2]$ y altura $0.9[m]$. El estanque tiene una fuga que lo hace perder $25[L/min]$. Calcular el nivel (altura) de líquido cuando hay $40[L]$ en el estanque, y calcular a qué velocidad está bajando este nivel.

Ejercicio 4

Un estanque cilíndrico de petróleo tiene área basal $0.4[m^2]$ y altura $0.9[m]$. El estanque tiene una fuga que lo hace perder $25[L/min]$. Calcular el nivel (altura) de líquido cuando hay $40[L]$ en el estanque, y calcular a qué velocidad está bajando este nivel.

Solución: Definimos variables

- t : tiempo en minutos
- h : nivel de líquido en el tanque, en metros.
- V : Volumen en el instante t

El volumen de un cilindro es

$$V = A_{base} \cdot h$$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$,

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] =$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] =$$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] = 0.04[m^3]$$

Así:

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] = 0.04[m^3]$$

Así:

$$V = A_{base} \cdot h$$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] = 0.04[m^3]$$

Así:

$$\begin{aligned} V &= A_{base} \cdot h \\ 0.04[m^3] &= 0.4[m^2] \cdot h_0 \end{aligned}$$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] = 0.04[m^3]$$

Así:

$$\begin{aligned} V &= A_{base} \cdot h \\ 0.04[m^3] &= 0.4[m^2] \cdot h_0 \\ \frac{0.04}{0.4}[m] &= h_0 \end{aligned}$$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] = 0.04[m^3]$$

Así:

$$\begin{aligned} V &= A_{base} \cdot h \\ 0.04[m^3] &= 0.4[m^2] \cdot h_0 \\ \frac{0.04}{0.4}[m] &= h_0 \\ 0.1[m] &= h_0 \end{aligned}$$

Sabemos que $1[m^3] = 1000[L]$, luego $1[L] = \frac{1}{1000}[m^3]$. Por lo tanto:

$$40[L] = \frac{40}{1000}[m^3] = 0.04[m^3]$$

Así:

$$\begin{aligned} V &= A_{base} \cdot h \\ 0.04[m^3] &= 0.4[m^2] \cdot h_0 \\ \frac{0.04}{0.4}[m] &= h_0 \\ 0.1[m] &= h_0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, cuando el nivel del estanque se encuentra a $0.1[m]$ hay un volumen de $40[L]$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$V =$$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$V = 0.4 \cdot h$$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$V = 0.4 \cdot h$$

$$V' =$$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$V = 0.4 \cdot h$$

$$V' = 0.4h'$$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$\begin{aligned}V &= 0.4 \cdot h \\V' &= 0.4h' \\ \frac{0.025}{0.4} &= h'\end{aligned}$$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$V = 0.4 \cdot h$$

$$V' = 0.4h'$$

$$\frac{0.025}{0.4} = h'$$

$$0.0625 = h'$$

Los 25 litros por minuto equivalen a $0.025[m^3/min]$. Luego:

$$\begin{aligned}V &= 0.4 \cdot h \\V' &= 0.4h' \\ \frac{0.025}{0.4} &= h' \\ 0.0625 &= h'\end{aligned}$$

Por lo tanto el nivel de líquido baja a razón de $0.0625[m/s]$

Ejercicio 5

Un individuo de $1.8[m]$ de altura se aleja caminando a $80m$ por minuto de un farol sobre un poste de $4m$ de altura. ¿A qué velocidad se aleja el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece la longitud de su sombra?

Ejercicio 5

Un individuo de $1.8[m]$ de altura se aleja caminando a $80m$ por minuto de un farol sobre un poste de $4m$ de altura. ¿A qué velocidad se aleja el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece la longitud de su sombra?

Solución: Definimos:

- t : tiempo en minutos
- x : distancia del individuo al poste de luz, en metros.
- y : distancia del extremo de la sombra al poste, en metros.

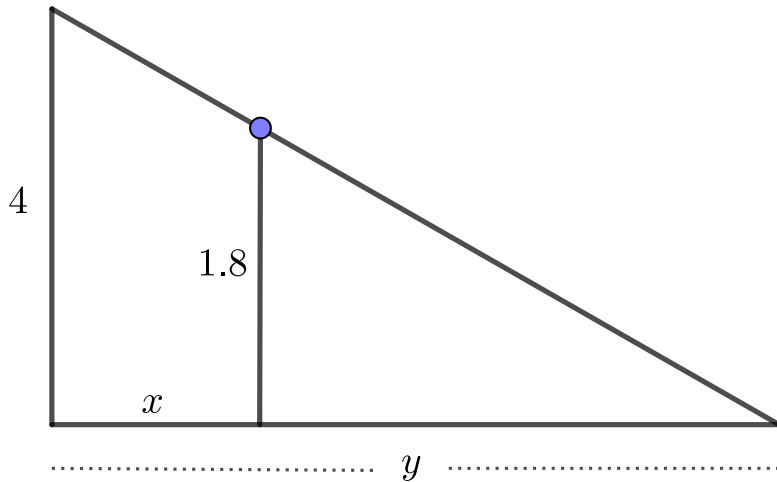
Ejercicio 5

Un individuo de $1.8[m]$ de altura se aleja caminando a $80m$ por minuto de un farol sobre un poste de $4m$ de altura. ¿A qué velocidad se aleja el extremo de su sombra? ¿A qué velocidad crece la longitud de su sombra?

Solución: Definimos:

- t : tiempo en minutos
- x : distancia del individuo al poste de luz, en metros.
- y : distancia del extremo de la sombra al poste, en metros.

Tenemos: $x' = \frac{dx}{dt}$ = velocidad a la que se desplaza el individuo. $y' = \frac{dy}{dt}$ = velocidad a la que se aleja el extremo de la sombra



Por teorema de Thales

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} =$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$
$$4(y - x) = 1.8y$$

Por teorema de Thales

$$\begin{aligned}\frac{4}{y} &= \frac{1.8}{y-x} \\ 4(y-x) &= 1.8y \\ 4y - 4x &= 1.8y\end{aligned}$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

$$4(y - x) = 1.8y$$

$$4y - 4x = 1.8y$$

$$4y - 1.8y = 4x$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

$$4(y - x) = 1.8y$$

$$4y - 4x = 1.8y$$

$$4y - 1.8y = 4x$$

$$2.2y = 4x$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

$$4(y - x) = 1.8y$$

$$4y - 4x = 1.8y$$

$$4y - 1.8y = 4x$$

$$2.2y = 4x$$

$$0.55y = x$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

$$4(y - x) = 1.8y$$

$$4y - 4x = 1.8y$$

$$4y - 1.8y = 4x$$

$$2.2y = 4x$$

$$0.55y = x$$

$$0.55y' = x'$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

$$4(y - x) = 1.8y$$

$$4y - 4x = 1.8y$$

$$4y - 1.8y = 4x$$

$$2.2y = 4x$$

$$0.55y = x$$

$$0.55y' = x'$$

$$0.55y' = 80$$

Por teorema de Thales

$$\frac{4}{y} = \frac{1.8}{y - x}$$

$$4(y - x) = 1.8y$$

$$4y - 4x = 1.8y$$

$$4y - 1.8y = 4x$$

$$2.2y = 4x$$

$$0.55y = x$$

$$0.55y' = x'$$

$$0.55y' = 80$$

$$y' = \frac{80}{0.55}$$

Por teorema de Thales

$$\begin{aligned}\frac{4}{y} &= \frac{1.8}{y-x} \\ 4(y-x) &= 1.8y \\ 4y - 4x &= 1.8y \\ 4y - 1.8y &= 4x \\ 2.2y &= 4x \\ 0.55y &= x \\ 0.55y' &= x' \\ 0.55y' &= 80 \\ y' &= \frac{80}{0.55} \approx 145\end{aligned}$$

Por teorema de Thales

$$\begin{aligned}\frac{4}{y} &= \frac{1.8}{y-x} \\ 4(y-x) &= 1.8y \\ 4y - 4x &= 1.8y \\ 4y - 1.8y &= 4x \\ 2.2y &= 4x \\ 0.55y &= x \\ 0.55y' &= x' \\ 0.55y' &= 80 \\ y' &= \frac{80}{0.55} \approx 145\end{aligned}$$

Por lo tanto el extremo de la sombra se aleja a razón de $145[m/min]$

Por otra parte, la longitud de la sombra es

$$y - x$$

Por otra parte, la longitud de la sombra es

$$y - x$$

lo que implica que la razón en la que varía es:

$$(y - x)' =$$

Por otra parte, la longitud de la sombra es

$$y - x$$

lo que implica que la razón en la que varía es:

$$(y - x)' = y' - x'$$

Por otra parte, la longitud de la sombra es

$$y - x$$

lo que implica que la razón en la que varía es:

$$\begin{aligned}(y - x)' &= y' - x' \\ &\approx 145 -\end{aligned}$$

Por otra parte, la longitud de la sombra es

$$y - x$$

lo que implica que la razón en la que varía es:

$$\begin{aligned}(y - x)' &= y' - x' \\ &\approx 145 - 80\end{aligned}$$

Por otra parte, la longitud de la sombra es

$$y - x$$

lo que implica que la razón en la que varía es:

$$\begin{aligned}(y - x)' &= y' - x' \\ &\approx 145 - 80 \\ &\approx 65\end{aligned}$$

Por lo tanto, la sombra crece a razón de $65[m/min]$

Ejercicios

- 1 Un globo esférico pierde gas a razón de $3 \frac{cm^3}{seg}$. Determine a qué velocidad está cambiando su área y su volumen en el instante en que el radio es $r = 10$.
- 2 De un depósito cónico (un cono invertido) está saliendo agua a razón de un litro por segundo. Si el radio de la base es de 40 cm y la altura es de 80 cm, hallar el ritmo al que está bajando el nivel del agua cuando está a 20 cm del borde superior.
- 3 Leer ejemplos de las páginas 328 a 333 de matemáticas para ingeniería.

Soluciones

Ejercicio 1:

Como se pierde gas a razón de $3 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$, el volumen varía en razón $\frac{dV}{dt} = 3 \frac{\text{cm}^3}{\text{seg}}$.

Calculemos la tasa de variación del radio:

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{4\pi r^3}{3} \quad / \frac{d}{dt} \\
 \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \\
 3 &= 4\pi(10)^2 \cdot \frac{dr}{dt} \\
 \frac{3}{400\pi} &= \frac{dr}{dt}
 \end{aligned}$$

Ahora, calculemos la variación del área:

$$\begin{aligned}
 A &= 4\pi r^2 \quad / \frac{d}{dt} \\
 \frac{dA}{dt} &= 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \\
 \frac{dA}{dt} &= 8\pi \cdot 10 \cdot \frac{3}{400\pi} \\
 \frac{dA}{dt} &= \frac{3}{5} \left[\frac{cm^2}{seg} \right]
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2:

En primer lugar $\frac{dV}{dt} = V' = -1 \frac{Lt}{seg} = -1000 \frac{cm^3}{seg}$ y como $\frac{r}{h} = \frac{40}{80} \Rightarrow r = \frac{h}{2}$

$$\therefore V = \frac{\pi r^2 h}{3} = \frac{\pi h^3}{12}$$

Así $\frac{dV}{dt} = \frac{\pi h^2}{4} \frac{dh}{dt}$

$$-1000 = \frac{\pi \cdot 60^2}{4} \frac{dh}{dt}$$

$$-\frac{10}{9\pi} = \frac{dh}{dt}$$

La altura va decreciendo a $\frac{10}{9\pi} \left[\frac{cm}{s} \right]$