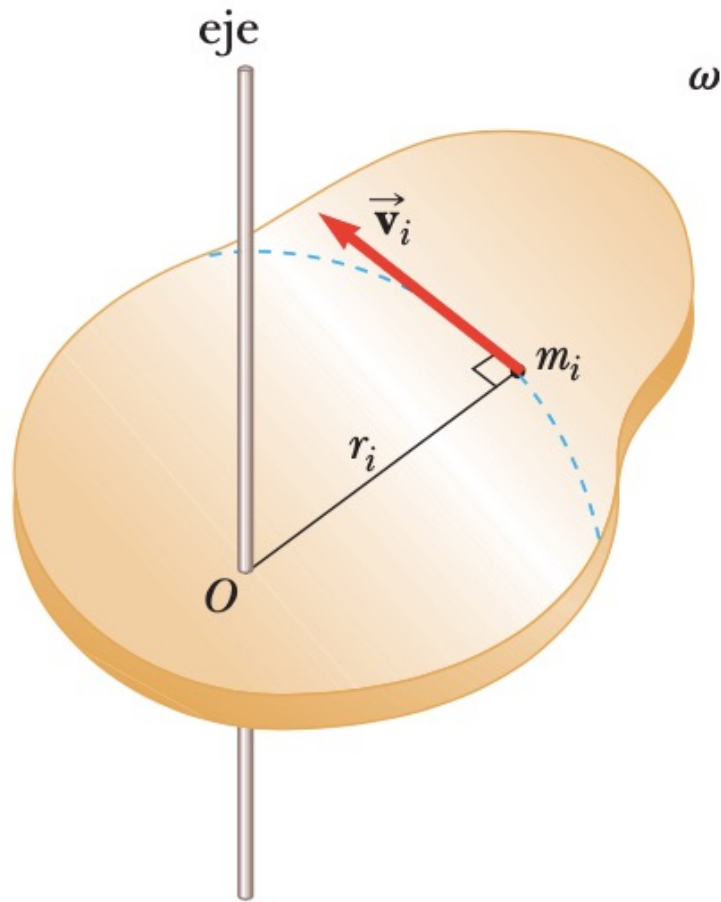




Momento de inercia

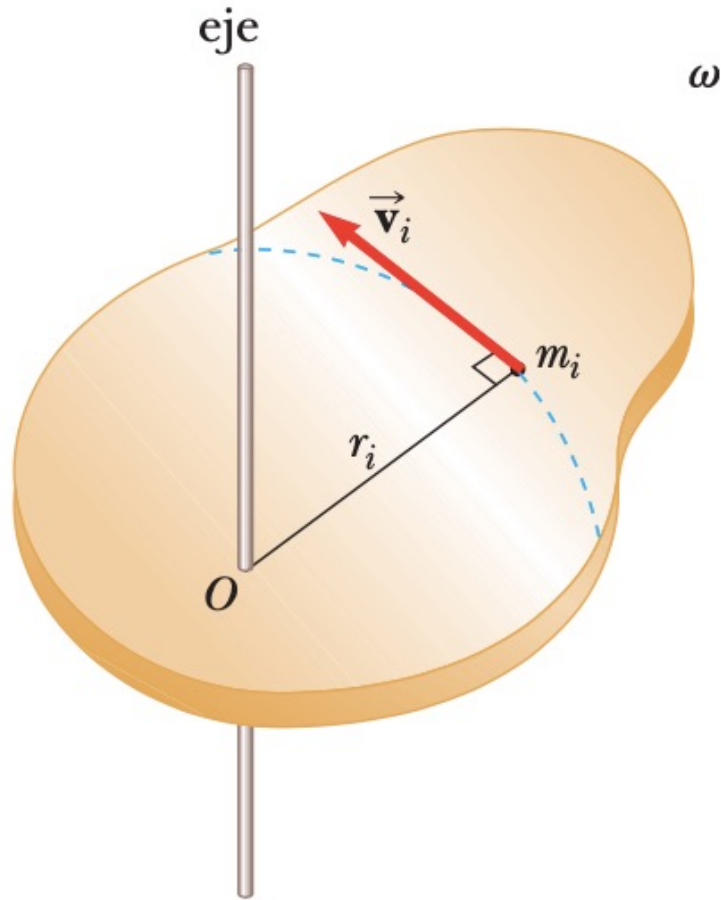
¿De qué depende la facilidad que tiene un objeto para rotar?

Energía cinética rotacional



Imaginemos un cuerpo de masa m girando en torno a un eje fijo con rapidez angular ω

Energía cinética rotacional

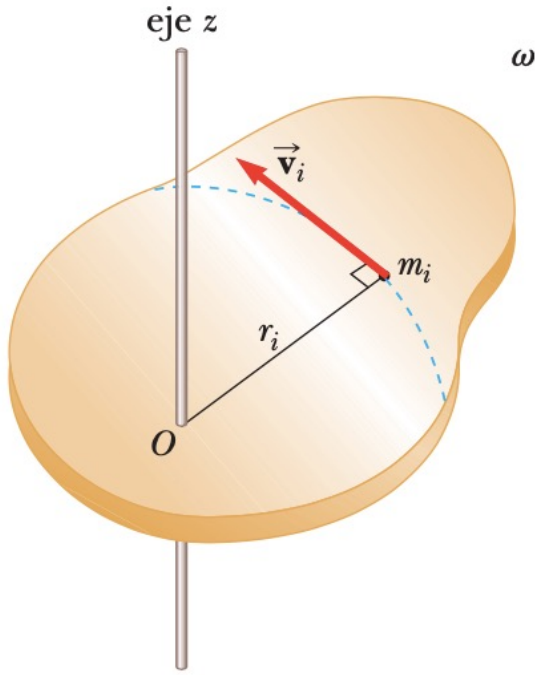


Si nos fijamos en una partícula de este objeto, de masa m_i . Esta partícula gira a una distancia r_i del eje y con una rapidez v_i .

La energía cinética de esta partícula es

$$K_i = \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Energía cinética rotacional



Para determinar la energía cinética de todo el cuerpo

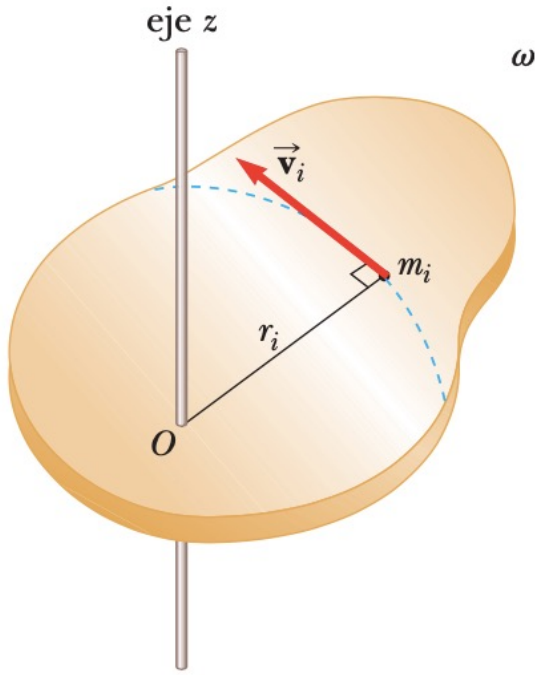
$$K = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2$$

Como $v = \omega \cdot r$

$$K = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2$$

Momento de inercia de un sistema de partículas, I

Energía cinética rotacional



$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i r_i^2 \omega^2$$

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Energía cinética de rotación

Momento de inercia o inercia de rotación

Para un sistema de partículas, el momento de inercia es

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

¿qué significa “inercia de rotación”?

Momento de inercia o inercia de rotación

Para un sistema de partículas, el momento de inercia es

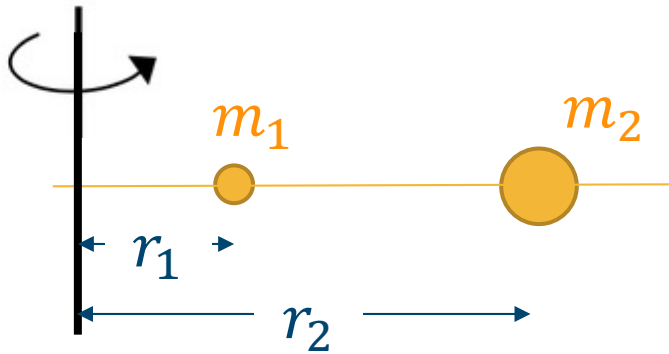
$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Podemos entender el momento de inercia I de un sistema de partículas o de un cuerpo como la medida del grado de oposición que presenta éste a cambiar su estado de movimiento rotacional.

Momento de Inercia

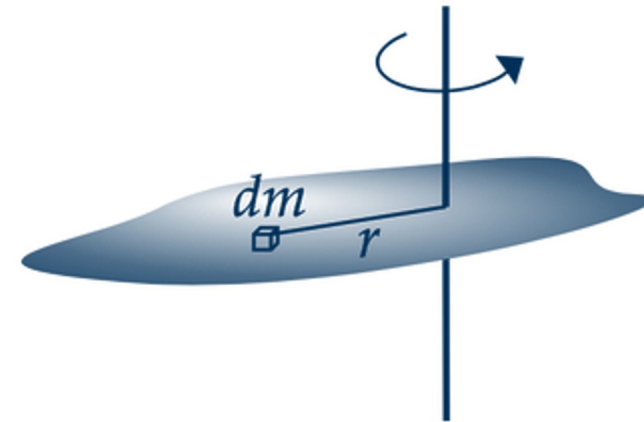
Tanto un sistema de partículas como un objeto tienen momento de inercia.

Distribución discreta



$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Distribución continua

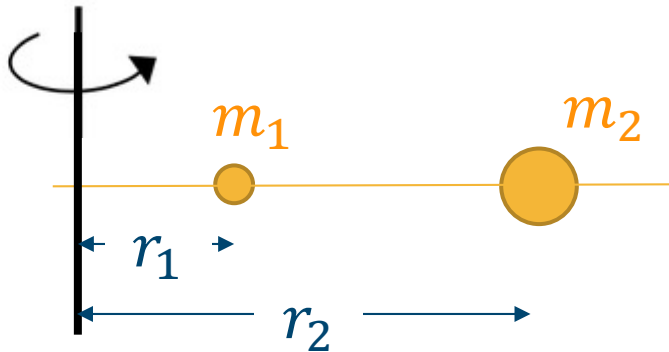


$$I = \int r^2 dm$$

Momento de Inercia

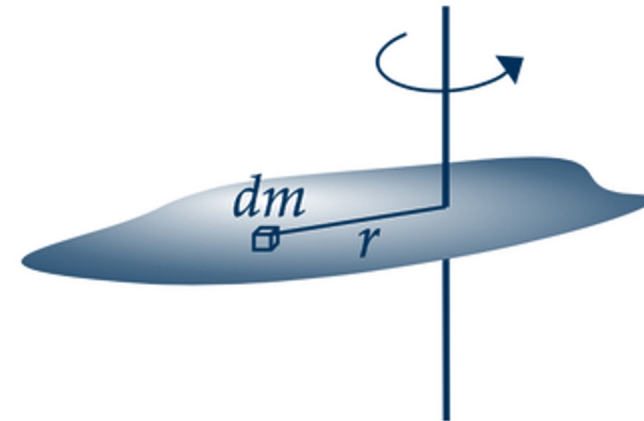
Tanto un sistema de partículas como un objeto tienen momento de inercia.

Distribución discreta



$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

Distribución continua

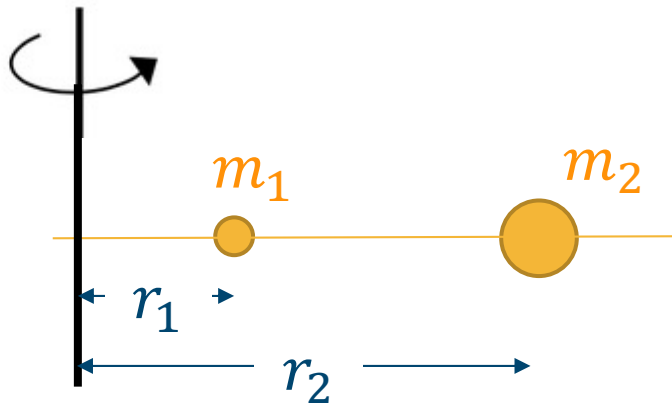


$$I = \int r^2 dm$$

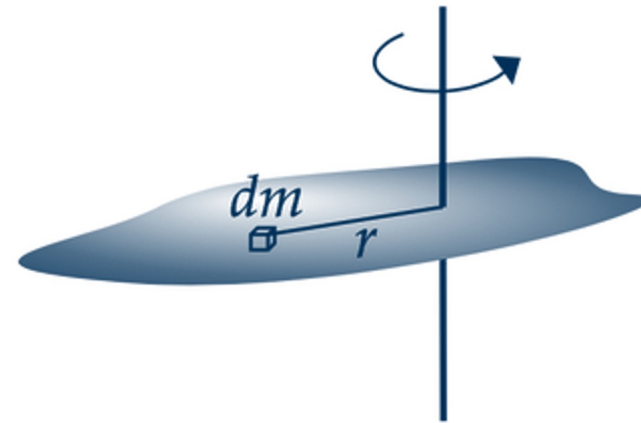
Unidad de medida para el S.I.
[kg · m²]

Volvamos a preguntarnos...

¿De qué depende la facilidad que tiene un objeto para rotar?



$$I = \sum_i m_i r_i^2$$



$$I = \int r^2 dm$$

Observa atentamente...



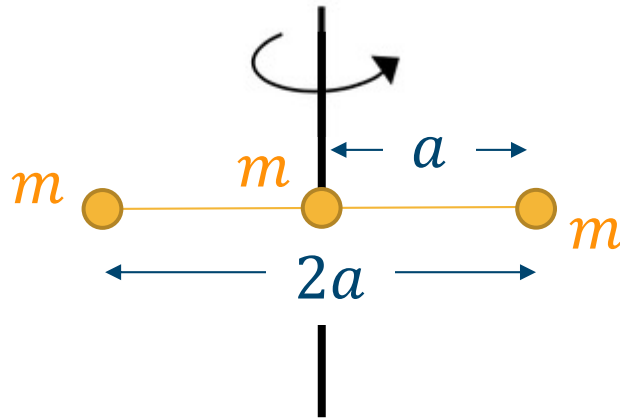
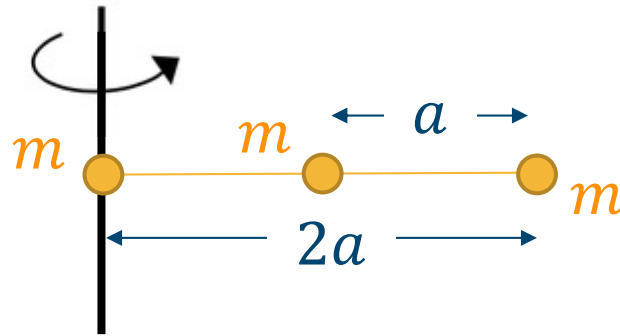
Otros ejemplos



Momento de Inercia

Ejemplo

Tres masas idénticas separadas una distancia a entre sí



¿En cuál cuesta menos realizar la rotación?

Momento de Inercia

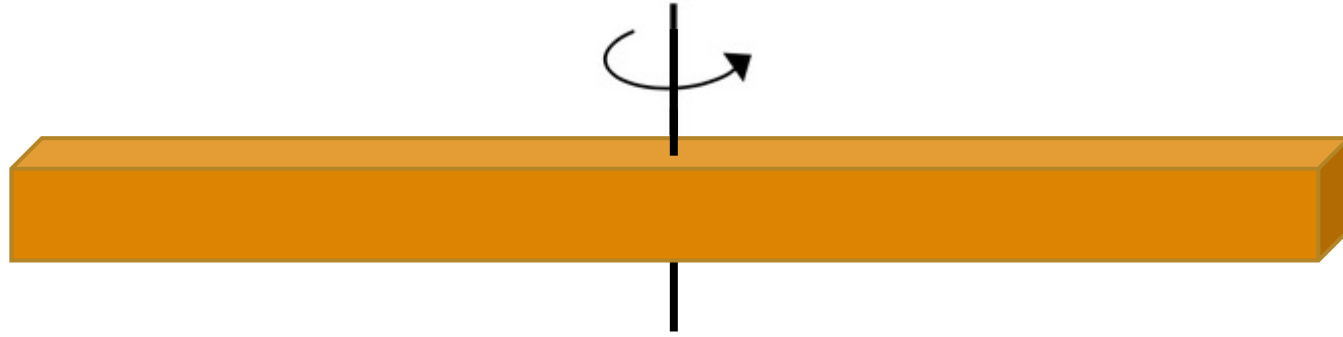
Ejercicio 11 guía

Las masas y coordenadas de cuatro partículas son las siguientes: 50 [g], $x=2$ [cm], $y=2$ [cm]; 25 [g], $x=0$, $y=4$ [cm]; 25 [g], $x=-3$ [cm], $y=-3$ [cm]; 30 [g], $x=-2$ [cm], $y=4$ [cm]. Calcule la inercia de rotación de este conjunto con respecto a los ejes

- a) X
- b) Y
- c) Z

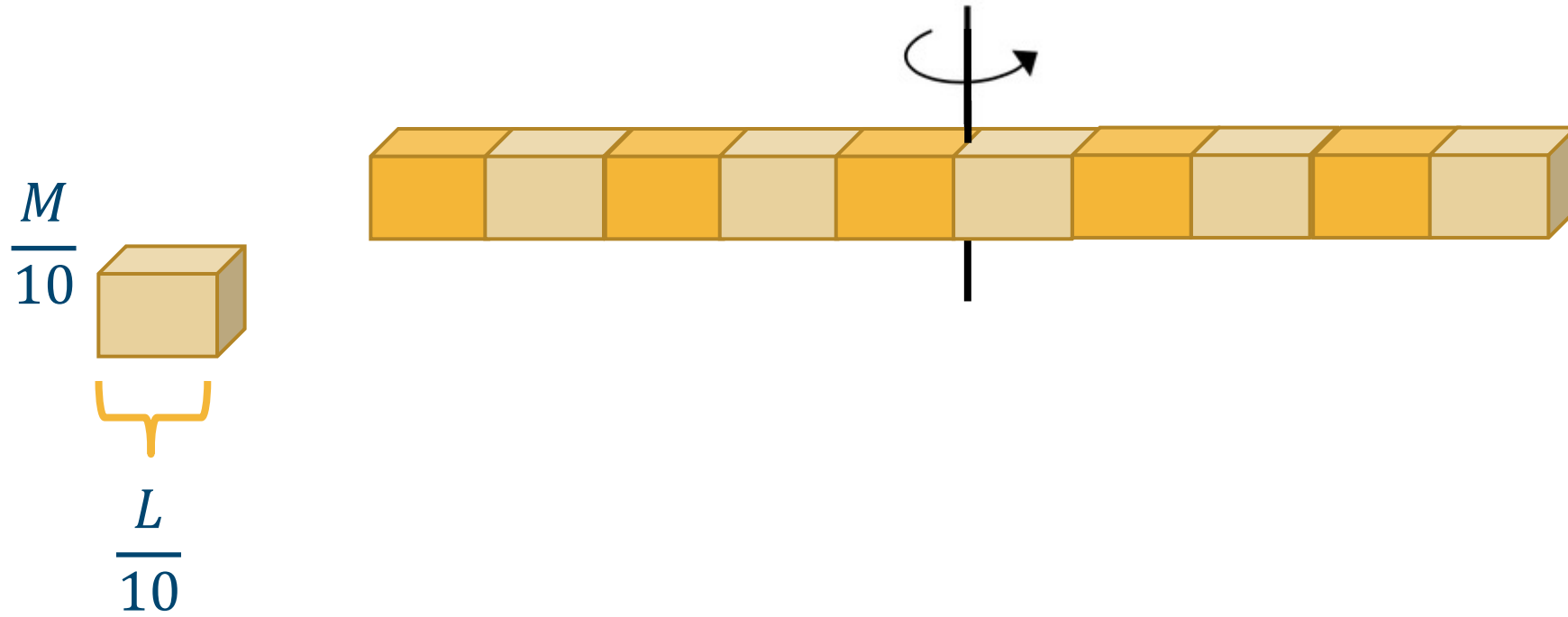
Momento de Inercia de sólidos rígidos

Barra homogénea de masa M y largo L



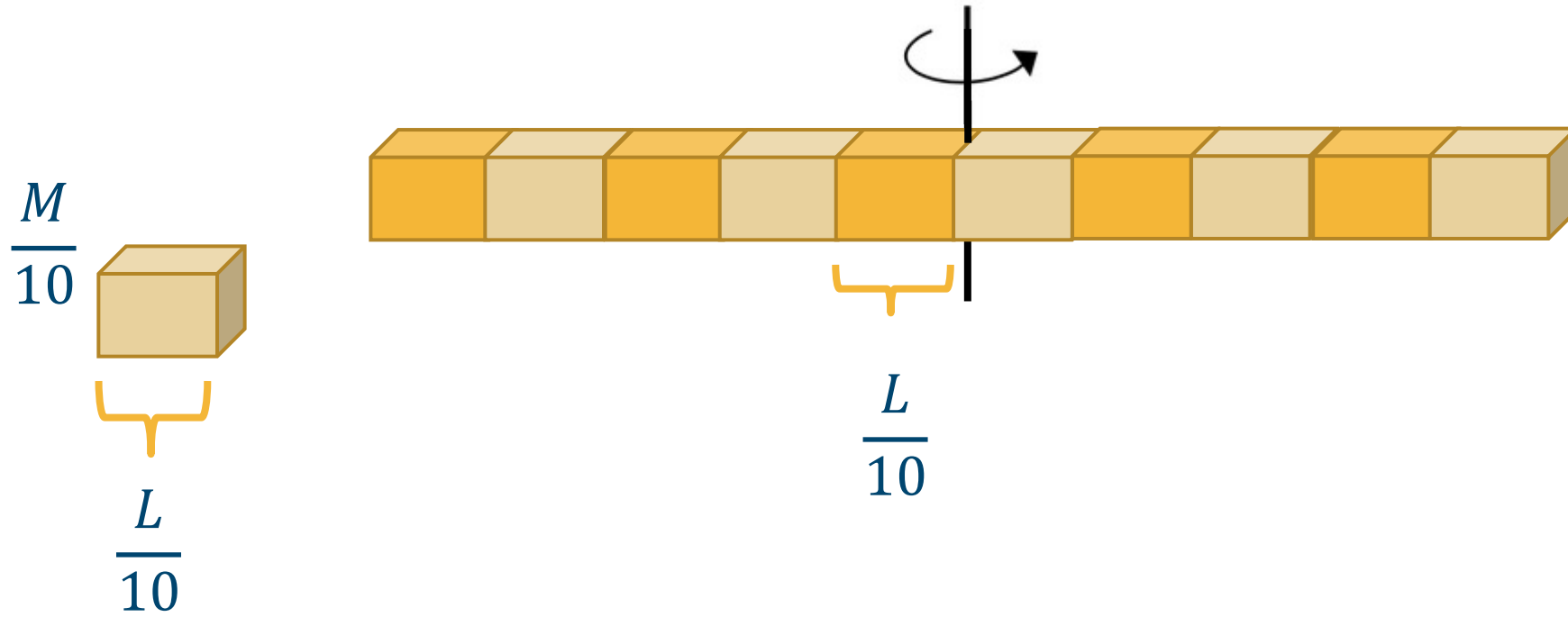
Momento de Inercia de sólidos rígidos

Barra homogénea de masa M y largo L



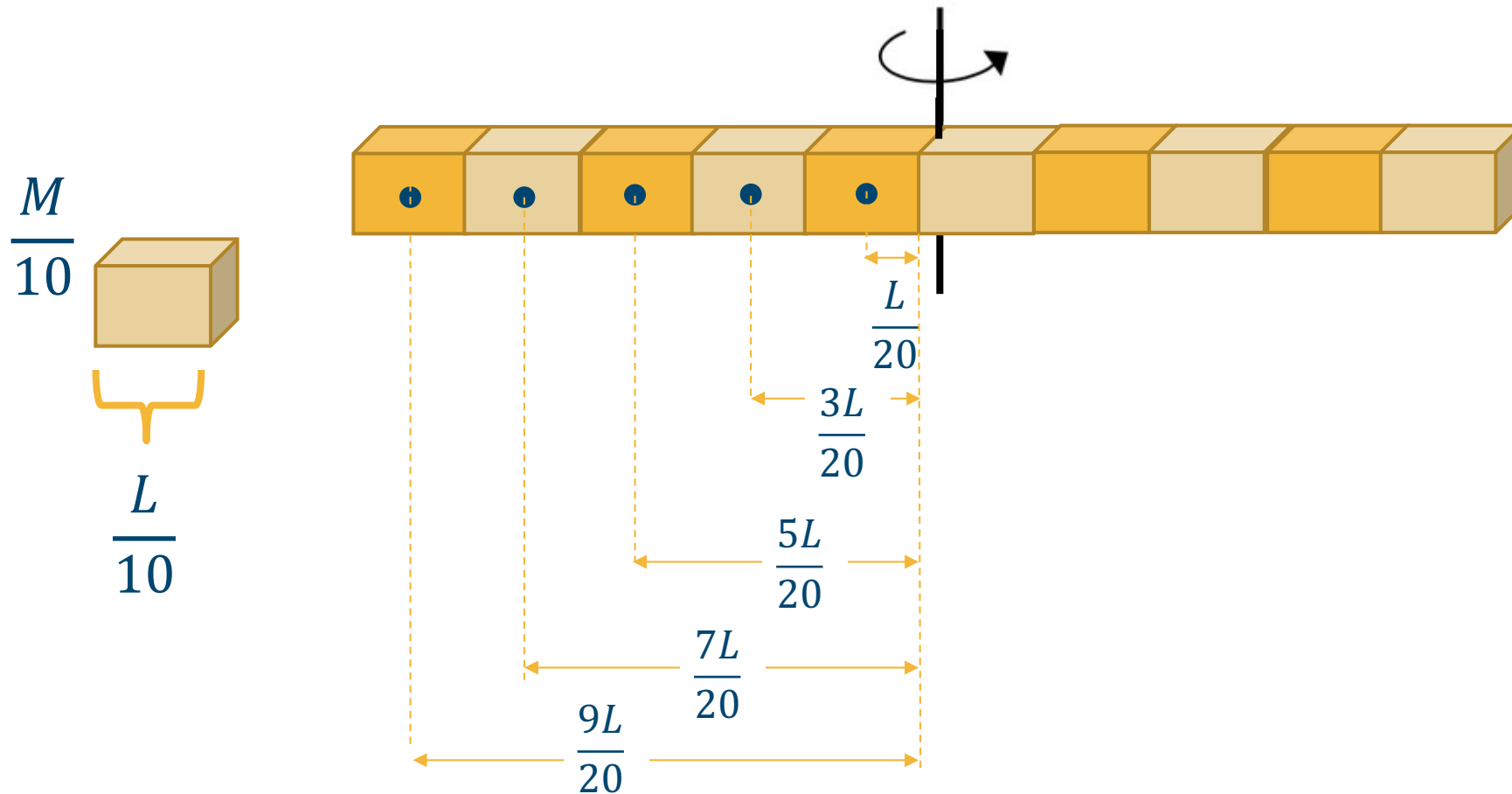
Momento de Inercia de sólidos rígidos

Barra homogénea de masa M y largo L



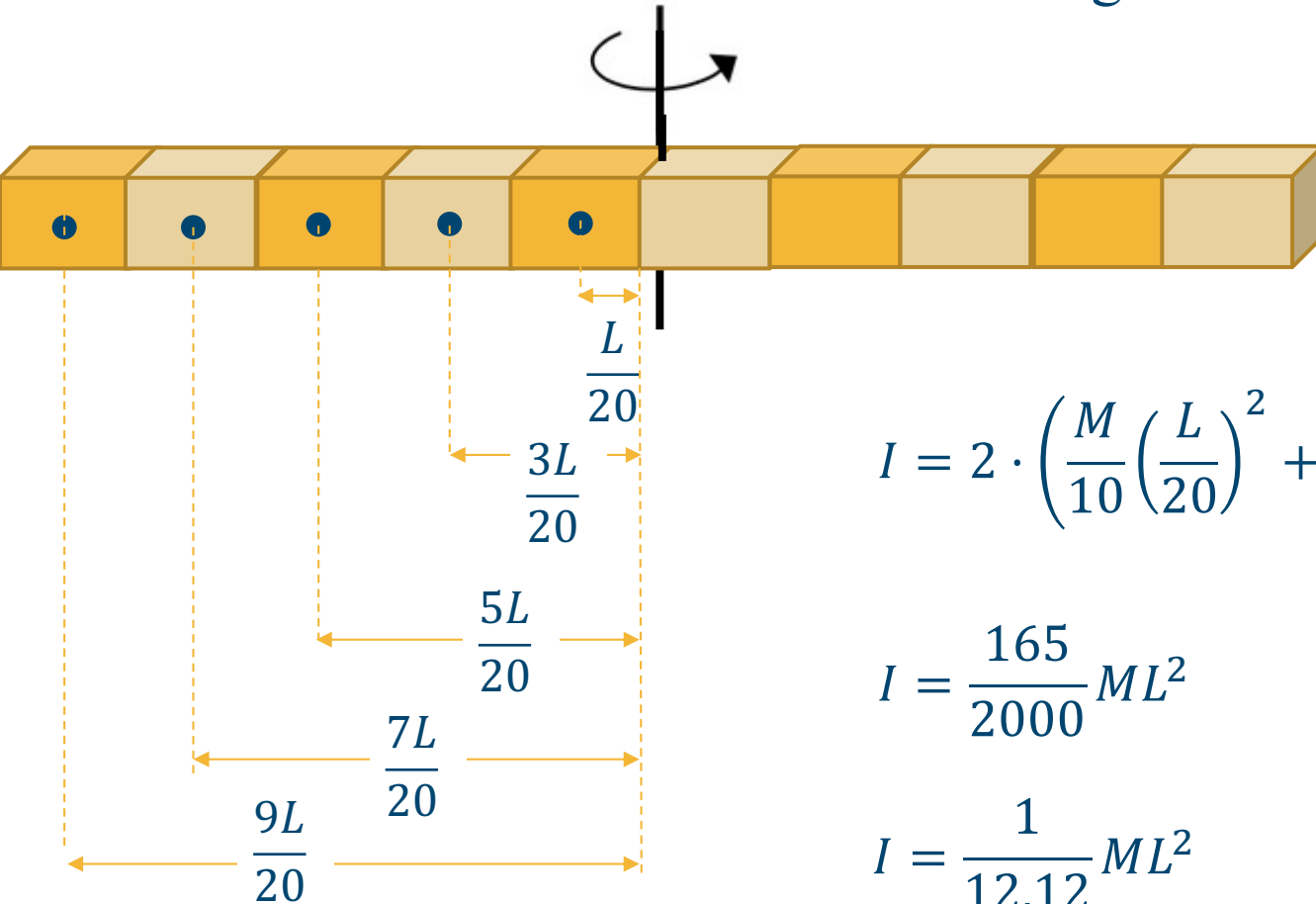
Momento de Inercia de sólidos rígidos

Barra homogénea de masa M y largo L



Momento de Inercia de sólidos rígidos

Barra homogénea de masa M y largo L



$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

$$I = 2 \cdot \left(\frac{M}{10} \left(\frac{L}{20} \right)^2 + \frac{M}{10} \left(\frac{3L}{20} \right)^2 + \frac{M}{10} \left(\frac{5L}{20} \right)^2 + \frac{M}{10} \left(\frac{7L}{20} \right)^2 + \frac{M}{10} \left(\frac{9L}{20} \right)^2 \right)$$

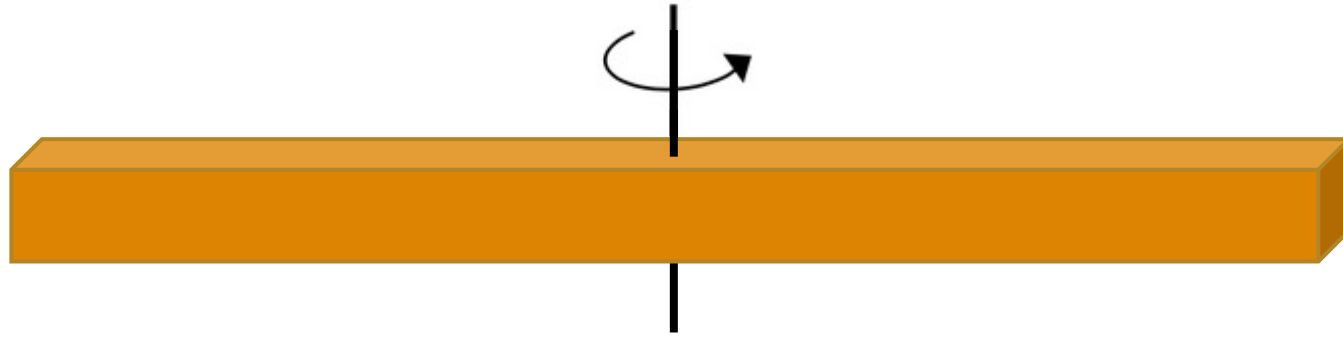
$$I = \frac{165}{2000} ML^2$$

$$I = \frac{1}{12,12} ML^2$$

$$I \approx \frac{1}{12} ML^2$$

Momento de Inercia de sólidos rígidos

Barra homogénea de masa M y largo L

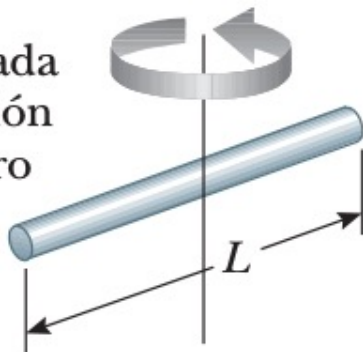


$$I_{CM} = \frac{1}{12} ML^2$$

Algunos momentos de inercia importantes

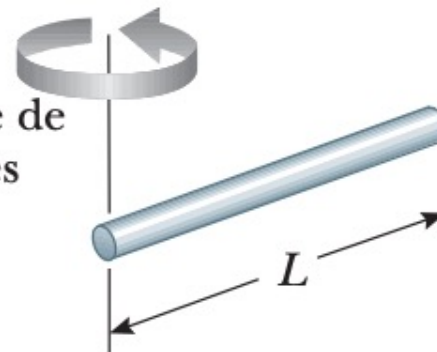
Barra larga delgada
con eje de rotación
a través del centro

$$I_{\text{CM}} = \frac{1}{12} ML^2$$



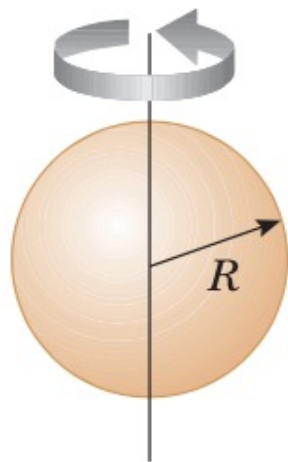
Barra larga
delgada con eje de
rotación a través
de un extremo

$$I = \frac{1}{3} ML^2$$



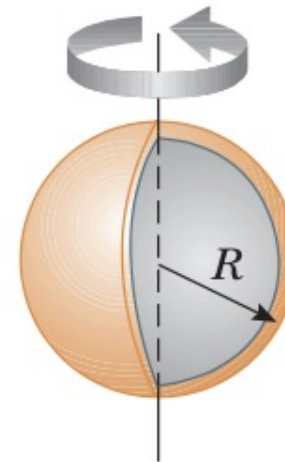
Esfera sólida

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{5} MR^2$$



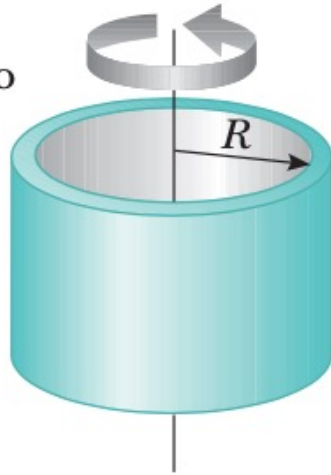
Cascarón esférico
delgado

$$I_{\text{CM}} = \frac{2}{3} MR^2$$

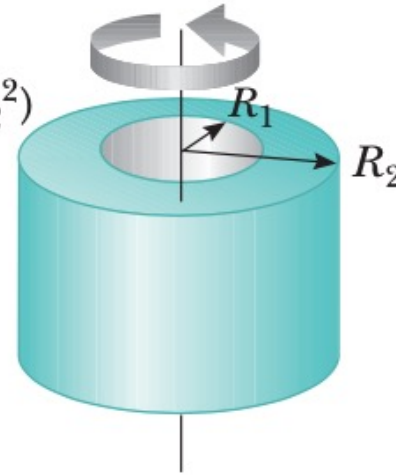


Algunos momentos de inercia importantes

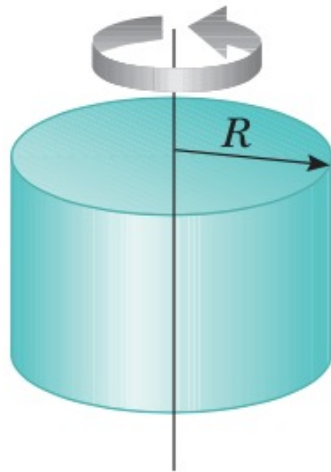
Aro o cascarón
cilíndrico delgado
 $I_{\text{CM}} = MR^2$



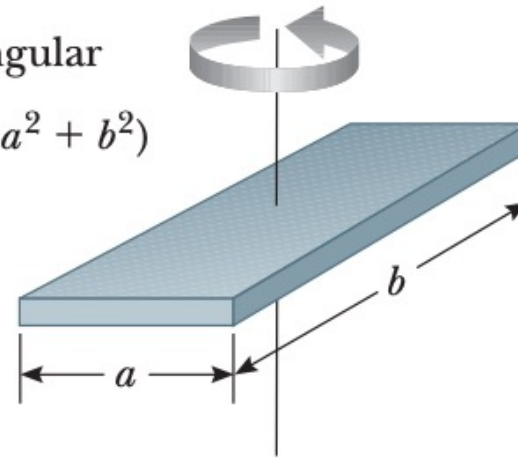
Cilindro hueco
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$



Cilindro sólido
o disco
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{2}MR^2$



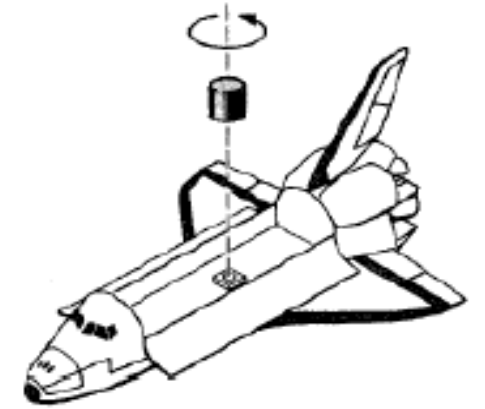
Placa rectangular
 $I_{\text{CM}} = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$



Momento de Inercia

Ejercicio guía

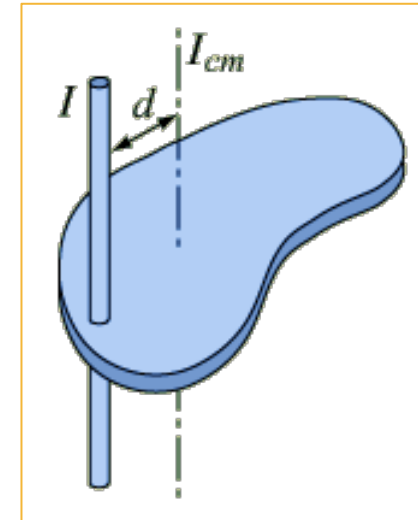
Un satélite de comunicaciones es un cilindro uniforme con 1220 [kg] de masa, 1,18 [m] de diámetro, y 1,72 [m] de longitud. Antes de lanzarlo desde la plataforma del taxi espacial, se le hace girar a razón de 1,46 [rev/s] en torno al eje del cilindro; véase la figura. Calcule la energía cinética de rotación del satélite.



Teorema de ejes paralelos o teorema de Steiner

Cuando el eje de rotación de un cuerpo se traslada paralelamente respecto del eje que pasa por el centro de masa, el nuevo momento de inercia se puede obtener a través de la expresión

$$I' = I_{CM} + Md^2$$

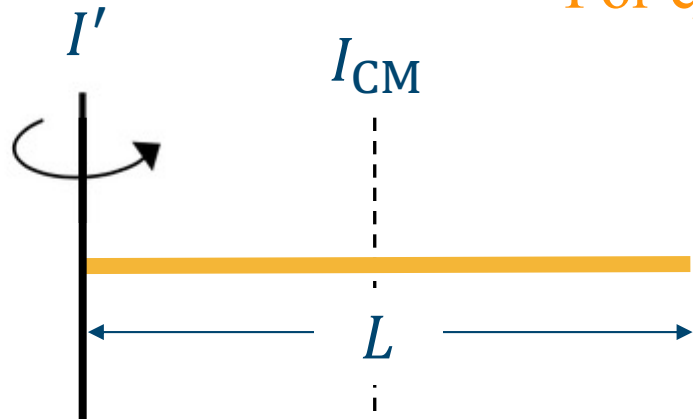


Teorema de ejes paralelos

Cuando el eje de rotación de un cuerpo se traslada paralelamente respecto del eje que pasa por el centro de masa, el nuevo momento de inercia se puede obtener a través de la expresión

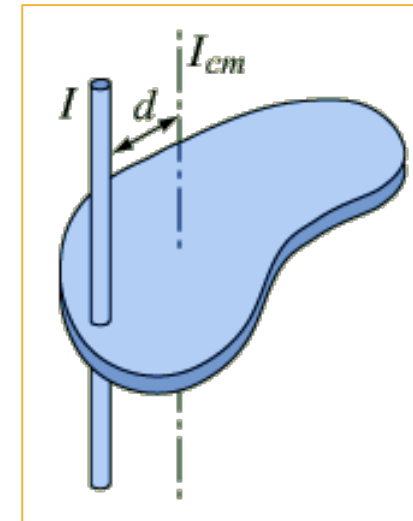
$$I' = I_{CM} + Md^2$$

Por ejemplo...



$$I' = \frac{1}{12}ML^2 + M\left(\frac{L}{2}\right)^2$$

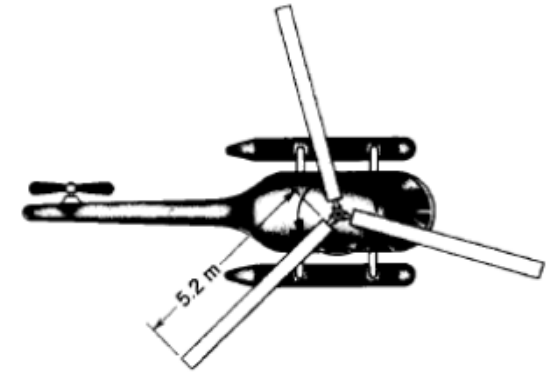
$$I' = \frac{1}{3}ML^2$$



Ejercicio guía

Momento de Inercia

Cada una de las tres palas del rotor principal del helicóptero que se muestra en la figura tiene 5,20 [m] de longitud y una masa de 240 [kg]. El rotor gira a 350 [rev/min].



- Calcule el momento de inercia del conjunto en torno al eje de rotación. (Cada pala puede considerarse como una varilla, recuerde que el momento de inercia de una varilla de masa M y largo L que gira respecto a un eje perpendicular a su largo y que pasa por su C.M. es $I = \frac{1}{12} ML^2$)
- Si se cambian las palas por otras cuya masa es un tercio de la masa anterior. El momento de inercia del sistema, ¿aumenta, disminuye o se mantiene? Justifique
- ¿En qué caso es más fácil hacer girar el rotor del helicóptero? (Compare las situaciones de las letras a) y b)) Explique usando argumentos físicos y en, al menos, tres líneas

Algunos ejercicios resueltos...

Momento de inercia

<https://www.youtube.com/watch?v=v7yKEhqFUL8>

Ejercicio torque

<https://youtu.be/5z6NjiHvMjU>

Ejercicio dinámica de rotación

<https://youtu.be/WNMBSUZg-e8>

Calcule la inercia de rotación de una regla de un metro, cuya masa es de 0,56 [kg], en torno a un eje perpendicular a la regla y que está situado en la marca de 20 [cm].

Ejercicio guía

Momento de Inercia

Una rueda tiene 8 rayos (ver figura) cada uno de $0,3 \text{ [m]}$ de longitud y una masa respectiva de $m = 0,05 \text{ [kg]}$. Si la masa del borde de la rueda es $1,4 \text{ [kg]}$, ¿que momento de inercia tiene la rueda con respecto a un eje que pasa por su centro y es perpendicular a su plano?

