

Guía 6

Continuidad

Sergio Yansen Núñez

1. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-5x+6} & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Determine si f es continua en $x = 2$.

2. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-7x+12}{x^2-8x+15} & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 3 \\ \frac{9(\sqrt[3]{9x}-3)}{x^2-9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determine si f es continua en $x = 3$.

3. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{x^2-4} & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ \frac{-15(x+2)}{2x^2+13x+18} & \text{si } x > -2 \end{cases}$

Determine, en caso de existir, el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = -2$.

4. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{ax^3 - a} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \frac{b(2 - \sqrt{x+3})}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Determine, en caso de existir, los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 1$.

5. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-4)x} - \frac{1}{4(x-4)} & \text{si } 0 < x < 4 \\ a & \text{si } x = 4 \\ \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} + b & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Determine, en caso de existir, los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 4$.

Resolución

$$1. \quad \text{Sea } f \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{x-2}{x^2-5x+6} & \text{si } x < 2 \\ -1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Determine si f es continua en $x = 2$.

Solución:

i) $2 \in \text{Dom}f, f(2) = -1$

ii) Análisis de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x-2}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{2-3} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x^3-8} \cdot \frac{\sqrt{x+2}+2}{\sqrt{x+2}+2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x+2})^2 - 2^2}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x+2-4}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{(x-2)(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{(x^2+2x+4)(\sqrt{x+2}+2)}$$

$$= \frac{1}{(2^2+2 \cdot 2+4)(\sqrt{2+2}+2)} = \frac{1}{48} \neq \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ no existe.}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe, entonces f no es continua en $x = 2$.

Observación:

Como $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ no existe entonces f no es una función reparable (remediable) en $x = 2$.

$$2. \quad \text{Sea } f \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} & \text{si } x < 3 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 3 \\ \frac{9(\sqrt[3]{9x} - 3)}{x^2 - 9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Determine si f es continua en $x = 3$.

Solución:

$$i) \quad 3 \in \text{Dom} f, f(3) = \frac{1}{2}$$

$$ii) \quad \text{Análisis de } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) :$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x-3)(x-4)}{(x-3)(x-5)} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x-4}{x-5} = \frac{3-4}{3-5} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{9(\sqrt[3]{9x} - 3)}{x^2 - 9} = 9 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt[3]{9x} - 3}{(x-3)(x+3)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{9x})^2 + \sqrt[3]{9x} \cdot 3 + 3^2}{(\sqrt[3]{9x})^2 + \sqrt[3]{9x} \cdot 3 + 3^2}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(\sqrt[3]{9x})^3 - 3^3}{(x-3)(x+3)((\sqrt[3]{9x})^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9)}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{9x - 27}{(x-3)(x+3)((\sqrt[3]{9x})^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9)}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{9(x-3)}{(x-3)(x+3)((\sqrt[3]{9x})^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9)}$$

$$= 9 \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{9}{(x+3)((\sqrt[3]{9x})^2 + 3\sqrt[3]{9x} + 9)}$$

$$= \frac{81}{(3+3)((\sqrt[3]{9 \cdot 3})^2 + 3\sqrt[3]{9 \cdot 3} + 9)} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \frac{1}{2}, \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$iii) \quad \text{Como } \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = \frac{1}{2}, \text{ entonces por i), ii) y iii) se tiene que } f \text{ es continua en } x = 3.$$

$$3. \quad \text{Sea } f \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ \frac{-15(x + 2)}{2x^2 + 13x + 18} & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

Determine, en caso de existir, el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = -2$.

Solución:

i) $-2 \in \text{Dom} f; f(-2) = a$

ii) Análisis de $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^3 + 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{(x + 2)(x^2 - 2x + 4)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2} \\ &= \frac{(-2)^2 - 2 \cdot (-2) + 4}{-2 - 2} = -3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{-15(x + 2)}{2x^2 + 13x + 18} = -15 \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x + 2}{(x + 2)(2x + 9)} = -15 \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{1}{2x + 9} \\ &= \frac{-15}{2 \cdot (-2) + 9} = -3 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = -3 \quad \Rightarrow \quad \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$$

iii) f es continua en $x = -2$ si además $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) = a$

Luego, f es continua en $x = -2$ si $a = -3$

$$4. \quad \text{Sea } f \text{ definida por } f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{ax^3 - a} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x = 1 \\ \frac{b(2 - \sqrt{x+3})}{x^2 - 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determine, en caso de existir, los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 1$.

Solución:

i) $1 \in \text{Dom}f; f(1) = 2$

ii) Análisis de $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{ax^3 - a} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{a(x^3 - 1)} \cdot \frac{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 1 + 1^2}{(\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} \cdot 1 + 1^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt[3]{x})^3 - 1^3}{a(x - 1)(x^2 + x + 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x - 1}{a(x - 1)(x^2 + x + 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{a(x^2 + x + 1)((\sqrt[3]{x})^2 + \sqrt[3]{x} + 1)}$$

$$= \frac{1}{a(1^2 + 1 + 1)((\sqrt[3]{1})^2 + \sqrt[3]{1} + 1)} = \frac{1}{9a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{b(2 - \sqrt{x+3})}{x^2 - 1} = b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2 - \sqrt{x+3}}{(x-1)(x+1)} \cdot \frac{2 + \sqrt{x+3}}{2 + \sqrt{x+3}}$$

$$= b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2^2 - (\sqrt{x+3})^2}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - (x+3)}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1 - x}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = -b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x-1)(x+1)(2 + \sqrt{x+3})}$$

$$= -b \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x+1)(2 + \sqrt{x+3})} = \frac{-b}{(1+1)(2 + \sqrt{1+3})} = -\frac{b}{8}$$

Para que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ exista, entonces se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$,

por lo tanto $\frac{1}{9a} = -\frac{b}{8}$

iii) Para que f sea continua en $x = 1$, además se debe cumplir que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 2$

De acuerdo a lo anterior, se tiene que $\frac{1}{9a} = -\frac{b}{8} = 2$

$$\frac{1}{9a} = 2 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{18}$$

$$-\frac{b}{8} = 2 \quad \Rightarrow \quad b = -16$$

Luego, f es continua en $x = 1$ si $a = \frac{1}{18}$ y $b = -16$.

5. Sea f definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-4)x} - \frac{1}{4(x-4)} & \text{si } 0 < x < 4 \\ a & \text{si } x = 4 \\ \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} + b & \text{si } x > 4 \end{cases}$

Determine, en caso de existir, los valores de a y $b \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 4$.

Solución:

i) $4 \in \text{Dom} f; f(4) = a$

ii) Análisis de $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{1}{(x-4)x} - \frac{1}{4(x-4)} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{4-x}{4(x-4)x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-(x-4)}{4(x-4)x} \right) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left(\frac{-1}{4x} \right) = \frac{-1}{16} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} + b \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \cdot \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} + b \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{x-4}{(x-4)(\sqrt{x}+2)} + b \right) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + b \right) \\ &= \frac{1}{2+2} + b = \frac{1}{4} + b \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) \text{ existe si } \lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x), \text{ entonces } \frac{-1}{16} = \frac{1}{4} + b \quad \Rightarrow \quad b = -\frac{5}{16}$$

iii) f es continua en $x = 4$ si además, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = f(4) = a$

$$\text{Por lo tanto, } \frac{-1}{16} = \frac{1}{4} + b = a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{-1}{16}$$

$$\text{Luego, } f \text{ es continua en } x = 4 \text{ si } a = \frac{-1}{16} \text{ y } b = -\frac{5}{16}$$