

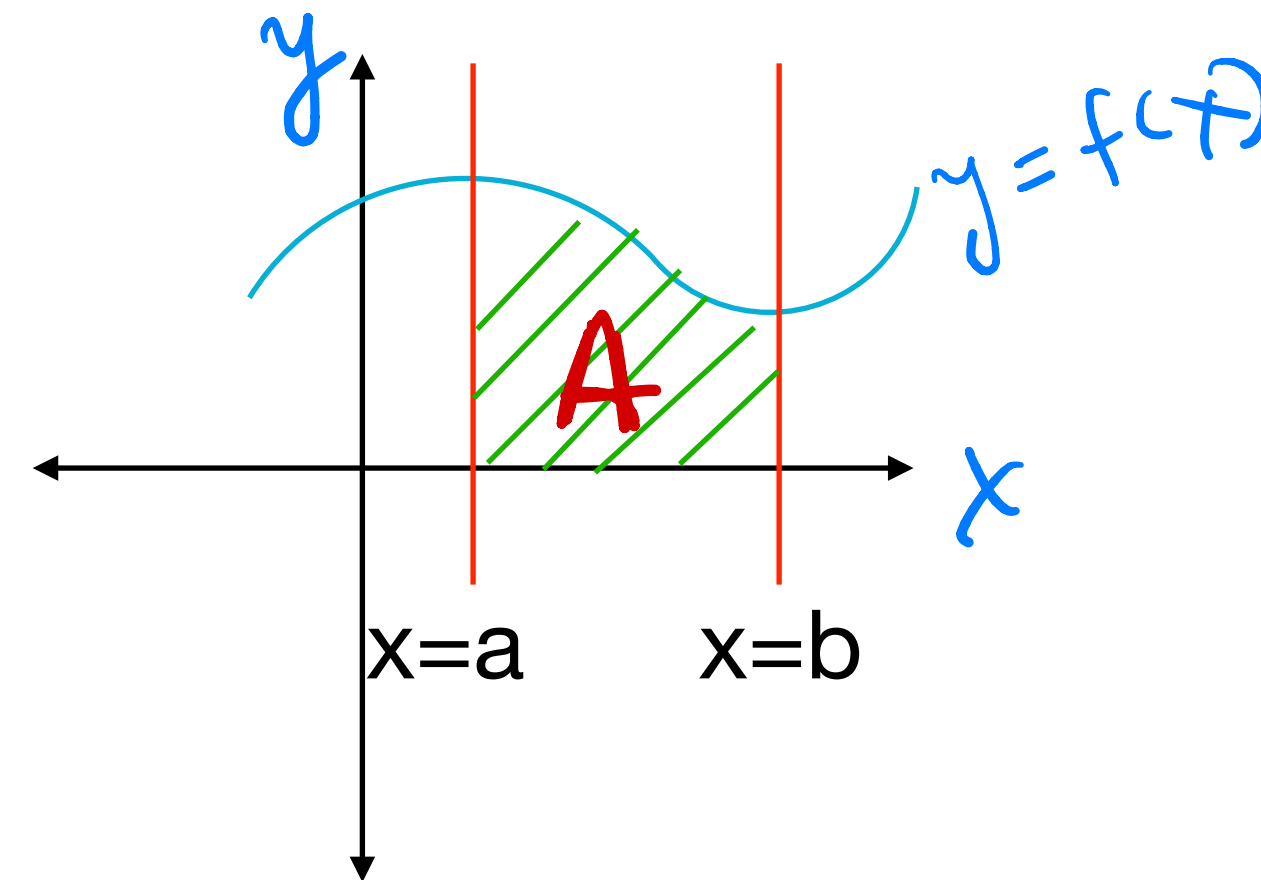
ÁREA BAJO UNA CURVA Y ENTRE CURVAS

CATHERINE HARDY

ÁREA BAJO UNA CURVA

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua donde f es positiva en $[a, b]$, es decir, $f(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$. Luego:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

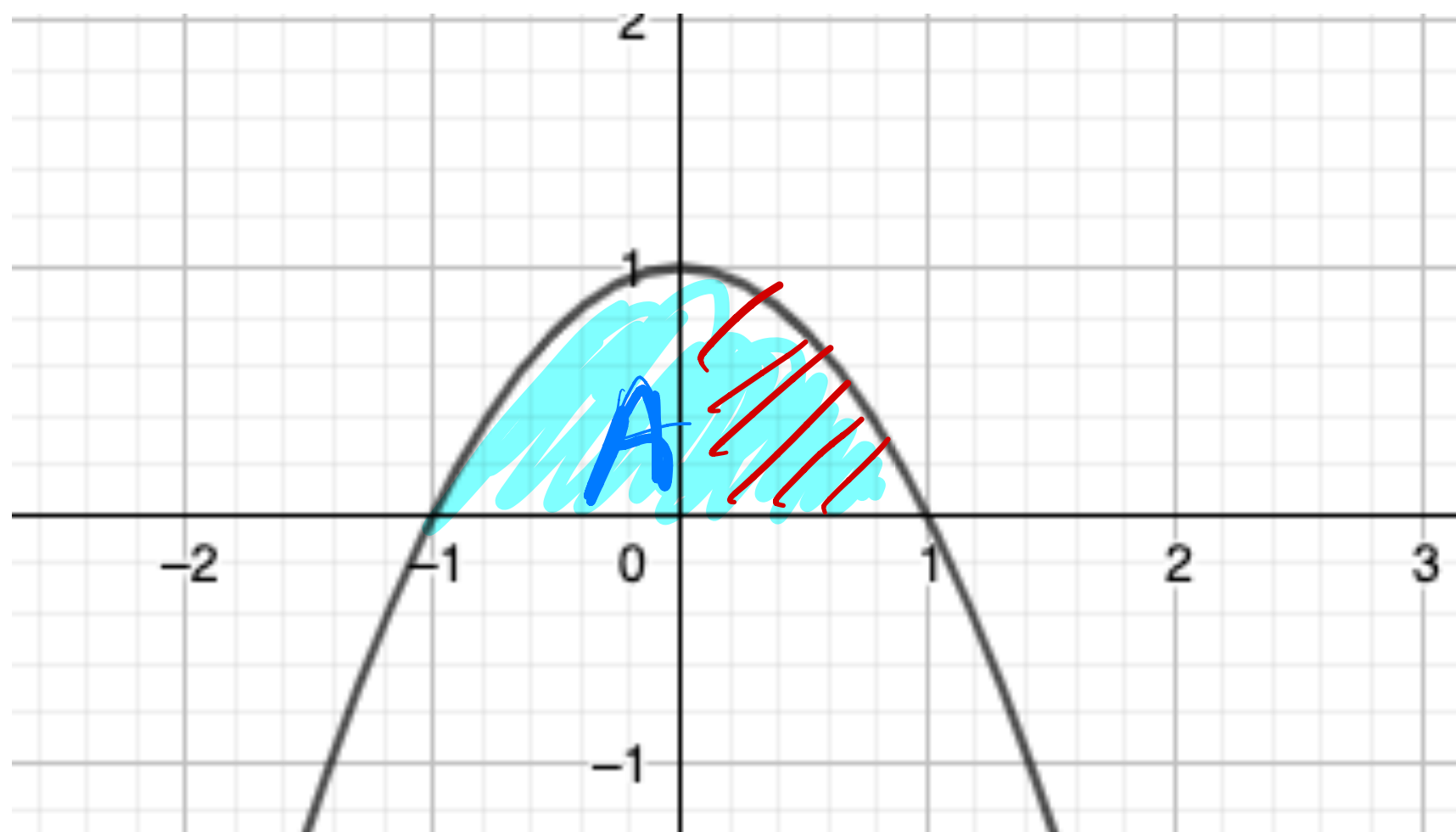


Corresponde al área que se encuentra BAJO la curva f , sobre el eje x , y entre las rectas $x = a$ y $x = b$

Área bajo una curva

Ejemplo

Determinar el área de la región: $y = 1 - x^2$ sobre el eje x y entre las rectas $x = -1$ y $x = 1$



$$A = \int_{-1}^1 (1 - x^2) dx = \left(x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-1}^1$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} \right) - \left(-1 + \frac{1}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$$

otra forma

$$A = 2 \int_0^1 (1 - x^2) dx$$

$$A = \frac{4}{3} u^2$$

ÁREA ENTRE CURVAS

ÁREA ENTRE CURVAS

Sean $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ funciones continuas, donde $f(x)\geq g(x) \quad \forall x\in[a,b]$.

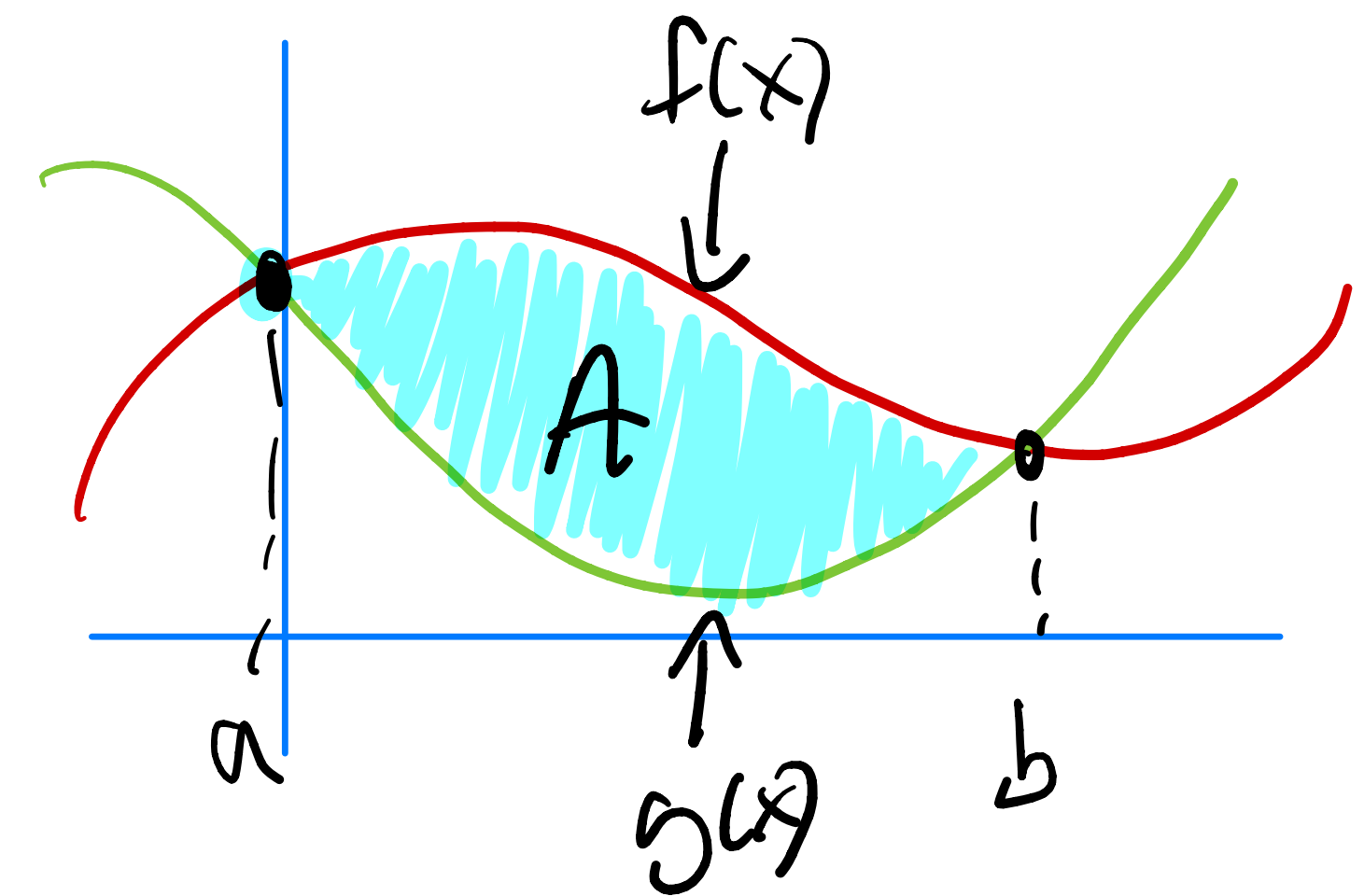
Luego, el área limitada por las curvas f y g entre las rectas $x=a$ y $x=b$ está dada por:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx$$

↑ ↑
Arriba Abajo

Notar que:

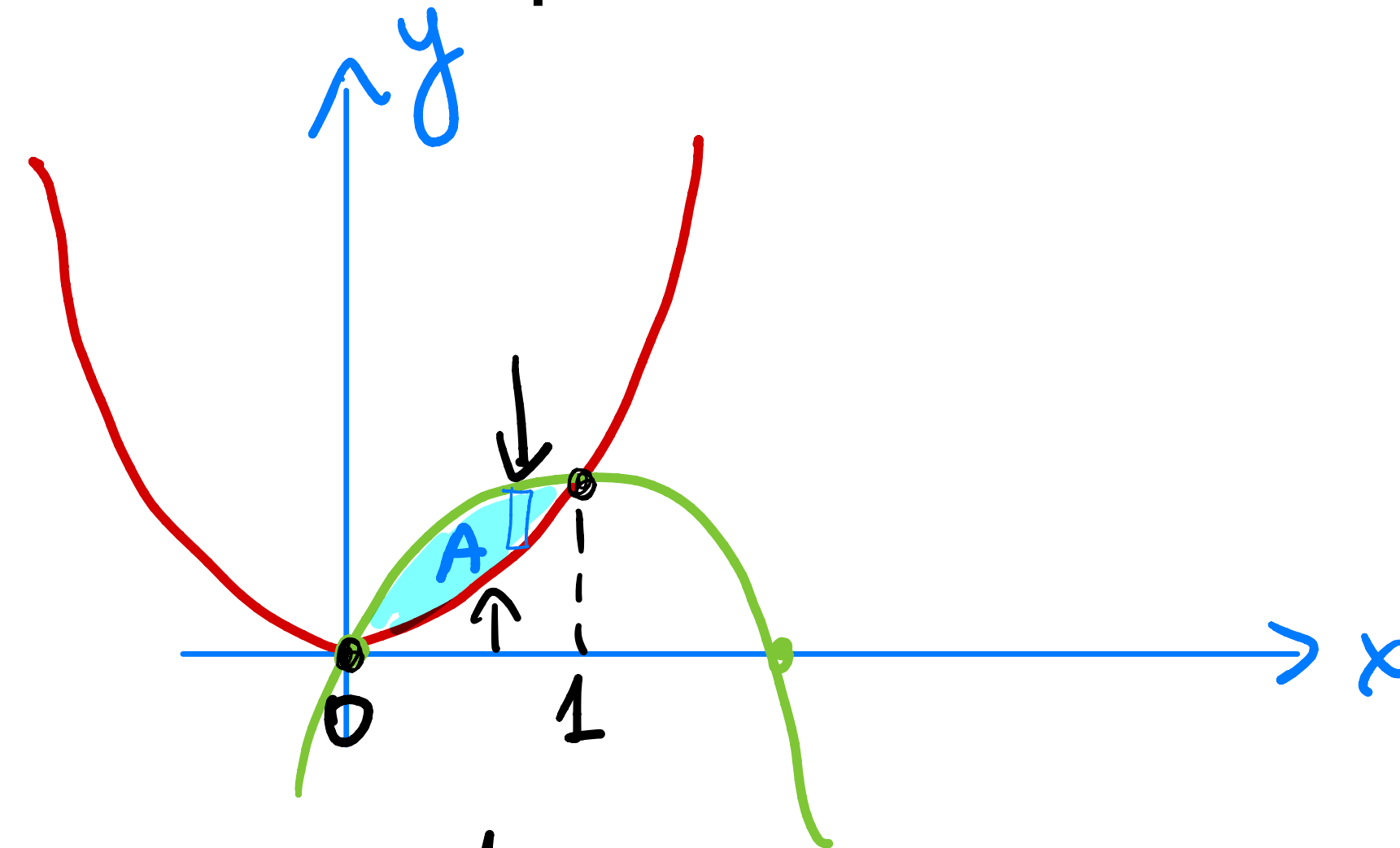
- Las funciones pueden o no ser positivas
- El área de una función negativa está dada por $-\int_a^b f(x) dx$



OBS: hay casos en que los límites de integración no vienen dados por rectas verticales, si no que serán los puntos de intersección de las curvas.

Ejemplo: Calcular el área comprendida entre las curvas:

- $f(x) = 2x - x^2 = y$ ^{$x(2-x)$}
- $g(x) = x^2 = y$



1º) Ptos. $\cap$ (Igualar funciones)

$$x^2 = 2x - x^2$$

$$2x^2 - 2x = 0$$

$$2x(x - 1) = 0$$

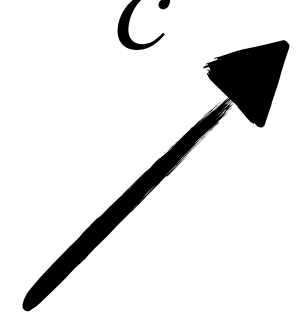
$x=0$ $\vee$ $x=1$ $\rightarrow$ límites de integración

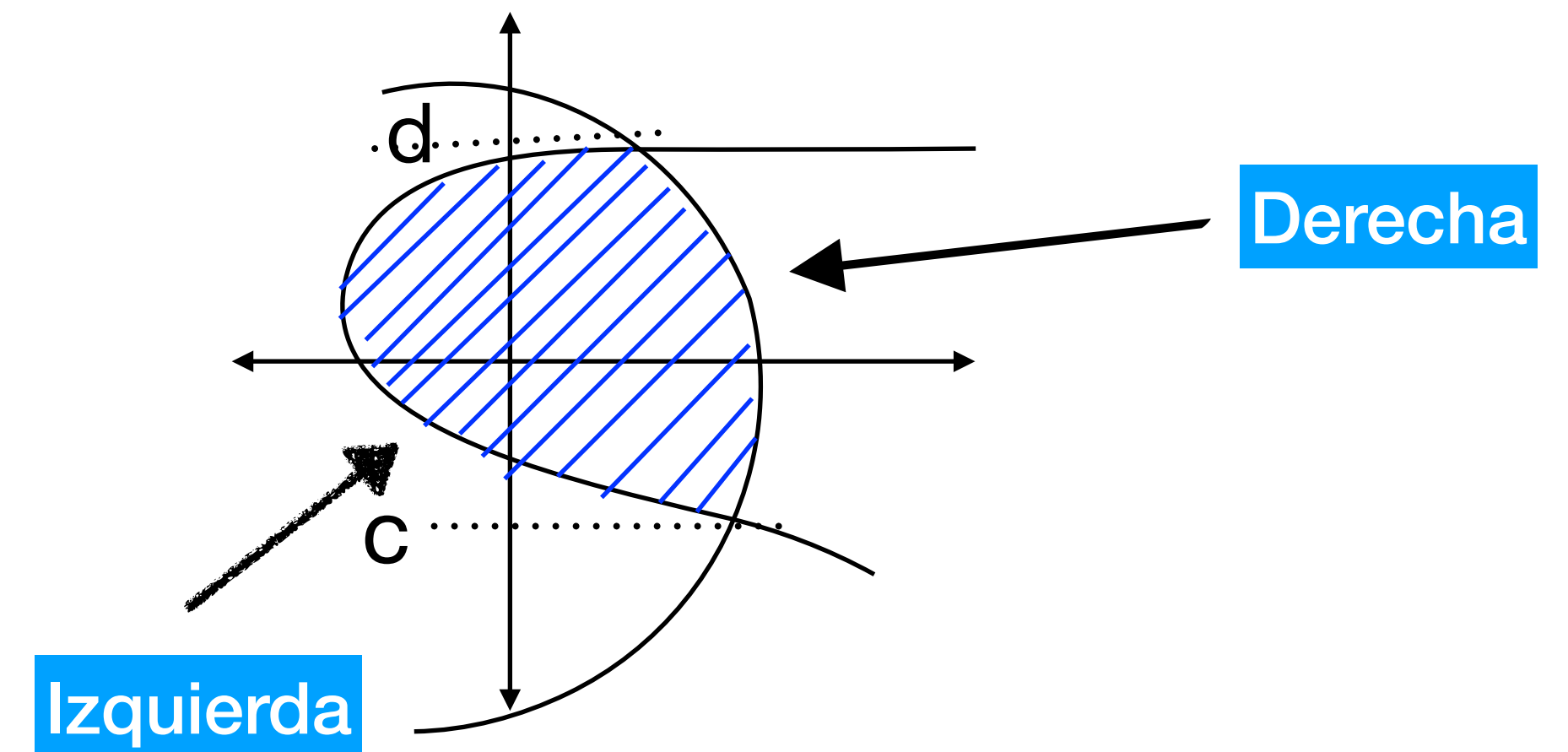
$$A = \int_0^1 [\underbrace{2x - x^2}_{\text{Arriba}} - \underbrace{x^2}_{\text{Abajo}}] dx = \int_0^1 (-2x^2 + 2x) dx$$
$$= \left(-\frac{2x^3}{3} + x^2 \right) \Big|_0^1 = \left(-\frac{2}{3} + 1 \right) = \frac{1}{3} //$$

OBS:

De igual forma se tiene que el área limitada por las curvas $f(y)$ y $g(y)$, donde $f(y) \geq g(y) \forall y \in [c, d]$ está dada por:

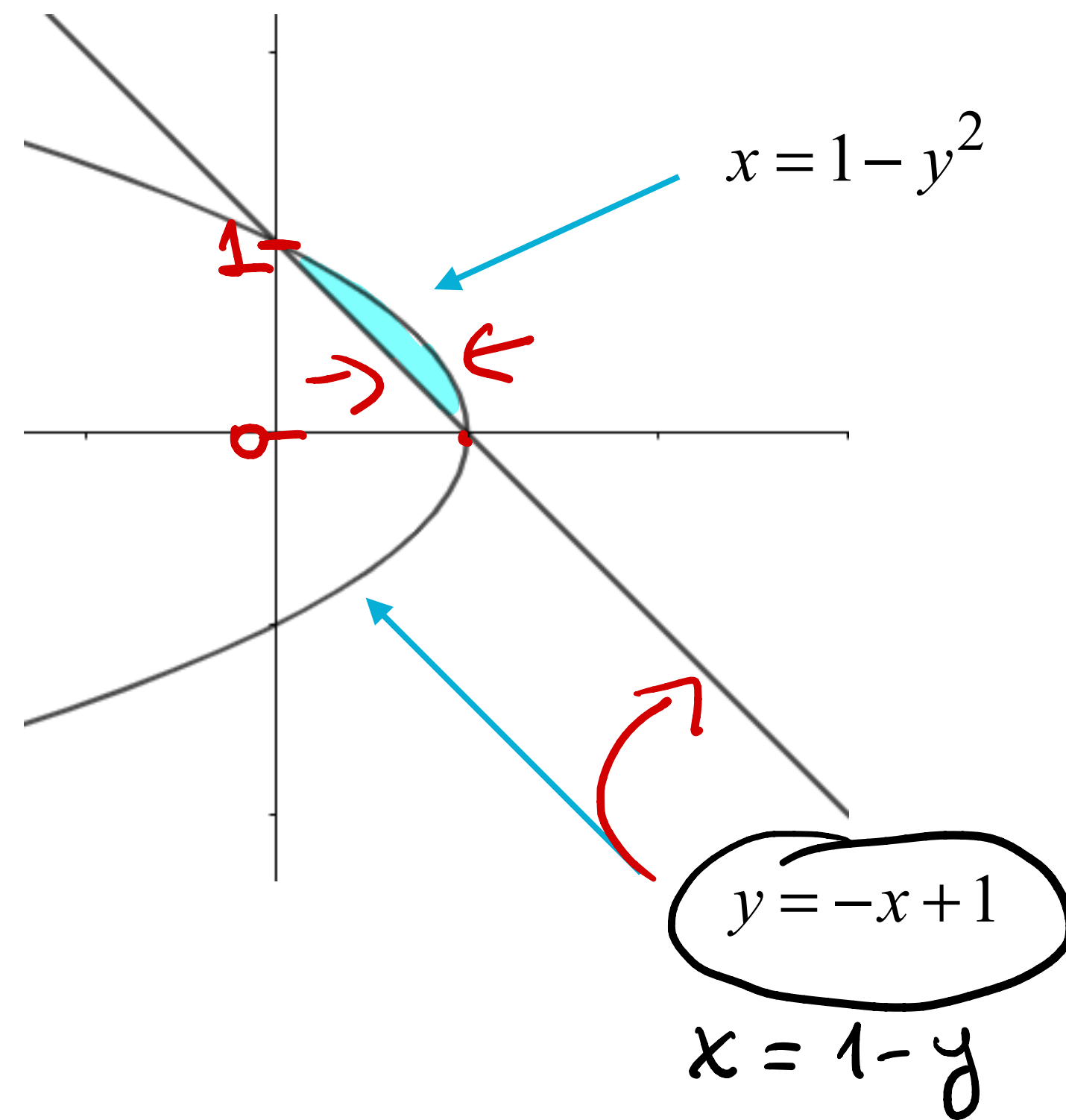
$$\int_c^d [f(y) - g(y)] dy$$

Derecha  **Izquierda** 



Ejemplo:

Determinar el área entre las curvas:



p) Pto. $\cap$ (Igualar funciones)

$$1 - y^2 = 1 - y$$

$$0 = y^2 - y$$

$$0 = y(y - 1)$$

$$y = 0 \vee y = 1$$

$$A = \int_0^1 [1 - y^2 - (1 - y)] dy$$

$\uparrow$ Derecha $\uparrow$ Izq.

$$A = \int_0^1 (-y^2 + y) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ u}^2$$

Pasos para determinar área entre curvas:

- 1) Graficar la situación
- 2) Encontrar los puntos de intersección
- 3) Identificar rectángulo representativo
- 4) Escribir el área como integral:

$$A = \int_a^b \left[\overset{\text{superior}}{f(x)} - \overset{\text{inferior}}{g(x)} \right] dx \quad \text{o}$$

$$A = \int_c^d \left[\overset{\text{derecha}}{f(y)} - \overset{\text{izquierda}}{g(y)} \right] dy$$

- 5) Resolver y agregar $\left[u^2 \right]$ al resultado