

Sergio Yansen Núñez

Polinomios

1. Sea $p(x) = 24x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 7x + 3$

- a) Determine el conjunto de las posibles raíces racionales de $p(x)$.
- b) Obtenga todas las raíces de $p(x)$.

2. Sea $p(x) = x^6 - 7x^4 + x^5 - x^3 - 6x + 36$

Factorice $p(x)$ en IR sabiendo que $x^2 + 2$ es un factor de éste.

3. Sea $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

Determine el resto obtenido al dividir $p(x)$ por:

- a) $x + 2$
- b) $x - 5$
- c) $x^2 + 1$
- d) factorice $p(x)$ en IR

4. Sea $p(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120$

- a) ¿Es $x - 3$ un factor de $p(x)$?
- b) ¿Es $x - 2$ un factor de $p(x)$?
- c) ¿Es $p(x)$ divisible por $x - 5$?
- d) ¿Es $p(x)$ divisible por $x + 4$?
- e) Factorice $p(x)$ en IR

5. Sea $p(x) = x^5 - 8x^4 + 29x^3 - 54x^2 + ax + b$

Factorice $p(x)$ en IR sabiendo que $x^2 - 3x + 2$ es un factor de éste.

6. Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 26x^2 + ax + b$

Factorice $p(x)$ en IR sabiendo que $x^2 - 2x + 2$ es un factor de éste.

7. Sea $p(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 20x^2 + ax + b$

siendo a y b números racionales.

Si $1 + \sqrt{5}$ es raíz de $p(x)$, factorícelo en IR

8. Sea $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$, siendo $a, b, c \in IR$

a) Determine las constantes a, b y c tales que se cumplan simultáneamente:

i) -1 sea raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2

ii) el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $x - 2$ sea 63

b) Factorice $p(x)$ en IR

9. Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$
- a) Determine las constantes a, b y c tales que se cumplan simultáneamente:
- i) al dividir $p(x)$ por $x^2 + 1$ el resto es $-6x - 2$
- ii) $p(x)$ sea divisible por $x - 1$

SOLUCIÓN

1. Sea $p(x) = 24x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 7x + 3$

a) Determine el conjunto de las posibles raíces racionales de $p(x)$.

b) Obtenga todas las raíces de $p(x)$.

Solución:

a) divisores de $a_0 = 3$: $\{\pm 1, \pm 3\}$

divisores de $a_n = 24$: $\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

las posibles raíces racionales son los divisores de a_0 divididos por los

divisores de a_n

$$\left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{8}, \pm \frac{1}{12}, \pm \frac{1}{24}, \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{3}{8} \right\}$$

b) probando con $\frac{1}{2}$

$$p(x) = 24x^4 - 28x^3 - 18x^2 + 7x + 3$$

$$\begin{array}{rrrrr} 24 & -28 & -18 & 7 & 3 \\ \frac{1}{2} & & 12 & -8 & -13 & -3 \\ 24 & -16 & -26 & -6 & 0 \end{array}$$

efectivamente, $\frac{1}{2}$ es raíz de $p(x)$

$$p(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)(24x^3 - 16x^2 - 26x - 6)$$

$$p(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(12x^3 - 8x^2 - 13x - 3)$$

probando con $\frac{-1}{2}$

$$\begin{array}{rrrrr} 12 & -8 & -13 & -3 \\ \frac{-1}{2} & & -6 & 7 & 3 \\ 12 & -14 & -6 & 0 \end{array}$$

efectivamente, $\frac{-1}{2}$ es raíz de $p(x)$

$$p(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(12x^2 - 14x - 6)$$

$$p(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(6x^2 - 7x - 3)$$

resolviendo $6x^2 - 7x - 3 = 0$, se obtiene $x = -\frac{1}{3} \quad \vee \quad x = \frac{3}{2}$

$$p(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)(6x^2 - 7x - 3)$$

$$p(x) = 4\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)6\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

$$p(x) = 24\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$

2. Sea $p(x) = x^6 - 7x^4 + x^5 - x^3 - 6x + 36$

Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}$ sabiendo que $x^2 + 2$ es un factor de éste.

Solución:

Mediante el algoritmo de la división, se tiene que el cociente obtenido

al dividir $p(x)$ por $x^2 + 2$ es: $c(x) = x^4 - 9x^2 + x^3 - 3x + 18$

$$p(x) = (x^2 + 2)(x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18)$$

2 es raíz de $x^4 + x^3 - 9x^2 - 3x + 18$ pues $2^4 + 2^3 - 9 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 18 = 0$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 1 & -9 & -3 & 18 \\ 2 & & 2 & 6 & -6 & -18 \\ \hline 1 & 3 & -3 & -9 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x^2 + 2)(x - 2)(x^3 + 3x^2 - 3x - 9)$$

-3 es raíz de $x^3 + 3x^2 - 3x - 9$ pues $(-3)^3 + 3 \cdot (-3)^2 - 3 \cdot (-3) - 9 = 0$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 3 & -3 & -9 \\ -3 & & -3 & 0 & 9 \\ \hline 1 & 0 & -3 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x^2 + 2)(x - 2)(x + 3)(x^2 - 3)$$

$x^2 + 2$ es irreducible en $\mathbb{R}[x]$ pues $\Delta < 0$

$$p(x) = (x^2 + 2)(x - 2)(x + 3)(x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})$$

3. Sea $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

Determine el resto obtenido al dividir $p(x)$ por:

- a) $x + 2$
- b) $x - 5$
- c) $x^2 + 1$
- d) factorice $p(x)$ en IR

Solución:

a) $p(-2) = (-2)^4 - 10 \cdot (-2)^3 + 35 \cdot (-2)^2 - 50 \cdot (-2) + 24 = 360$

b) $p(5) = 5^4 - 10 \cdot 5^3 + 35 \cdot 5^2 - 50 \cdot 5 + 24 = 24$

c) Mediante el algoritmo de la división se obtiene que el cociente es

$c(x) = x^2 - 10x + 34$ y el resto es $r(x) = -10 - 40x$

d) $p(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24$

Como $a_n = 1$ y $a_0 = 24$

Las posibles raíces racionales son los divisores de $a_0 = 24$

$\{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$

$p(1) = 0 \Rightarrow 1$ es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & -10 & 35 & -50 & 24 & \\ 1 & & 1 & -9 & 26 & 0 \\ 1 & -9 & 26 & -24 & & \end{array}$$

$p(x) = (x - 1)(x^3 - 9x^2 + 26x - 24)$

2 es raíz de $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ pues $2^3 - 9 \cdot 2^2 + 26 \cdot 2 - 24 = 0$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -9 & 26 & -24 \\ 2 & & 2 & -14 & 24 \\ 1 & -7 & 12 & 0 \end{array}$$

$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x^2 - 7x + 12) = (x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4)$

4. Sea $p(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120$

a) ¿Es $x - 3$ un factor de $p(x)$?

b) ¿Es $x - 2$ un factor de $p(x)$?

c) ¿Es $p(x)$ divisible por $x - 5$?

d) ¿Es $p(x)$ divisible por $x + 4$?

e) Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}$

Solución:

a) El resto al dividir $p(x)$ por $x - 3$ es

$$p(3) = 3^4 - 27 \cdot 3^2 - 14 \cdot 3 + 120 = -84 \neq 0$$

$x - 3$ no es un factor de $p(x)$

b) El resto al dividir $p(x)$ por $x - 2$ es

$$p(2) = 2^4 - 27 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 120 = 0$$

$x - 2$ es un factor de $p(x)$

c) El resto al dividir $p(x)$ por $x - 5$ es

$$p(5) = 5^4 - 27 \cdot 5^2 - 14 \cdot 5 + 120 = 0$$

$p(x)$ es divisible por $x - 5$

d) El resto al dividir $p(x)$ por $x + 4$ es

$$p(-4) = (-4)^4 - 27 \cdot (-4)^2 - 14 \cdot (-4) + 120 = 0$$

$p(x)$ es divisible por $x + 4$

e) como $x - 2$ es un factor de $p(x)$, entonces 2 es raíz de $p(x)$

$$p(x) = x^4 - 27x^2 - 14x + 120$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 0 & -27 & -14 & 120 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 2 & & 2 & 4 & -46 & -120 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrr} 1 & 2 & -23 & -60 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 2)(x^3 + 2x^2 - 23x - 60)$$

como $p(x)$ es divisible por $x - 5$, entonces 5 es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & 2 & -23 & -60 \\ 5 & & 5 & 35 & 60 \\ 1 & 7 & 12 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 2)(x - 5)(x^2 + 7x + 12) = (x - 2)(x - 5)(x + 4)(x + 3)$$

5. Sea $p(x) = x^5 - 8x^4 + 29x^3 - 54x^2 + ax + b$

Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}$ sabiendo que $x^2 - 3x + 2$ es un factor de éste.

Solución:

$x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$ es factor, por ende, 1 y 2 son raíces de $p(x)$

$$p(1) = 1^5 - 8 \cdot 1^4 + 29 \cdot 1^3 - 54 \cdot 1^2 + a \cdot 1 + b = -32 + a + b = 0$$

$$p(2) = 2^5 - 8 \cdot 2^4 + 29 \cdot 2^3 - 54 \cdot 2^2 + a \cdot 2 + b = -80 + 2a + b = 0$$

resolviendo el sistema: $a = 48$, $b = -16$

$$p(x) = x^5 - 8x^4 + 29x^3 - 54x^2 + 48x - 16$$

1 es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -8 \quad 29 \quad -54 \quad 48 \quad -16 \\ 1 \quad \quad 1 \quad -7 \quad 22 \quad -32 \quad 16 \\ \hline 1 \quad -7 \quad 22 \quad -32 \quad 16 \quad 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 1)(x^4 - 7x^3 + 22x^2 - 32x + 16)$$

2 es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -7 \quad 22 \quad -32 \quad 16 \\ 2 \quad \quad 2 \quad -10 \quad 24 \quad -16 \\ \hline 1 \quad -5 \quad 12 \quad -8 \quad 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x^3 - 5x^2 + 12x - 8)$$

1 es raíz de $x^3 - 5x^2 + 12x - 8$ pues $1^3 - 5 \cdot 1^2 + 12 \cdot 1 - 8 = 0$

$$\begin{array}{r} 1 \quad -5 \quad 12 \quad -8 \\ 1 \quad \quad 1 \quad -4 \quad 8 \\ \hline 1 \quad -4 \quad 8 \quad 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x - 1)(x - 2)(x - 1)(x^2 - 4x + 8)$$

$$p(x) = (x - 1)^2(x - 2)(x^2 - 4x + 8)$$

$x^2 - 4x + 8$ no tiene raíces reales pues $\Delta < 0$

6. Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 26x^2 + ax + b$

Factorice $p(x)$ en $\mathbb{C}$ sabiendo que $x^2 - 2x + 2$ es un factor de éste.

Solución:

$x^2 - 2x + 2$ no tiene raíces reales pues $\Delta < 0$

Mediante el algoritmo de la división, se obtiene que al dividir $p(x)$ por $x^2 - 2x + 2$

se obtiene el cociente $c(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$ y resto $r(x) = (a + 40)x + b - 24$

como $x^2 - 2x + 2$ es un factor de $p(x)$, entonces $r(x) = 0$

$$(a + 40)x + b - 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 40 = 0 \quad \wedge \quad b - 24 = 0$$

$$a = -40, \quad b = 24$$

$$p(x) = x^5 - 3x^4 - 4x^3 + 26x^2 - 40x + 24$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x^3 - x^2 - 8x + 12)$$

2 es raíz de $x^3 - x^2 - 8x + 12$ pues $2^3 - 2^2 - 8 \cdot 2 + 12 = 0$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -1 & -8 & 12 \\ 2 & & 2 & -12 \\ \hline 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 2)(x^2 + x - 6)$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 2)(x + 3)(x - 2)$$

$$p(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 2)^2(x + 3)$$

$x^2 - 2x + 2 = 0$ no tiene raíces reales pues $\Delta < 0$

7. Sea $p(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 20x^2 + ax + b$

siendo a y b números racionales.

Si $1 + \sqrt{5}$ es raíz de $p(x)$, factorízelo en $\mathbb{R}$

Solución:

Como los coeficientes de $p(x)$ son racionales, entonces como $1 + \sqrt{5}$ es raíz, entonces también lo es $1 - \sqrt{5}$. Por lo tanto, $(x - (1 + \sqrt{5}))(x - (1 - \sqrt{5}))$ es factor de $p(x)$.

$$(x - (1 + \sqrt{5}))(x - (1 - \sqrt{5})) = x^2 - 2x - 4$$

Mediante el algoritmo de la división, se obtiene que al dividir $p(x)$ por $x^2 - 2x - 4$ se obtiene el cociente $c(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$ y resto $r(x) = (a + 16)x + b + 24$ como $x^2 - 2x - 4$ es un factor de $p(x)$, entonces $r(x) = 0$

$$(a + 16)x + b + 24 = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 16 = 0 \quad \wedge \quad b + 24 = 0$$

$$a = -16, \quad b = -24$$

$$p(x) = x^5 - 6x^4 + 5x^3 + 20x^2 - 16x - 24$$

$$p(x) = (x^2 - 2x - 4)(x^3 - 4x^2 + x + 6)$$

2 es raíz de $x^3 - 4x^2 + x + 6$ pues $2^3 - 4 \cdot 2^2 + 2 + 6 = 0$

$$\begin{array}{rrrr} 1 & -4 & 1 & 6 \\ 2 & & 2 & -4 & -6 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}$$

$$p(x) = (x^2 - 2x - 4)(x - 2)(x^2 - 2x - 3)$$

$$p(x) = (x^2 - 2x - 4)(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

$$p(x) = (x - (1 + \sqrt{5}))(x - (1 - \sqrt{5}))(x - 2)(x + 1)(x - 3)$$

8. Sea $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$

a) Determine las constantes a, b y c tales que se cumplan simultáneamente:

i) -1 sea raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2

ii) el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $x - 2$ sea 63

b) Factorice $p(x)$ en $\mathbb{R}$

Solución:

a) como el resto obtenido al dividir $p(x)$ por $x - 2$ es 63, entonces

$$p(2) = 63 \quad \Rightarrow \quad 2^5 + 2 \cdot 2^4 + 2^3 + a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 63$$

$$72 + 4a + 2b + c = 63 \quad \Rightarrow \quad c = -4a - 2b - 9$$

$$p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 + ax^2 + bx - 4a - 2b - 9$$

-1 es raíz de $p(x)$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 2 & 1 & a & b & -4a - 2b - 9 \\ -1 & & -1 & -1 & 0 & -a & a - b \\ 1 & 1 & 0 & a & -a + b & -3a - 3b - 9 \end{array}$$

$$-3a - 3b - 9 = 0 \text{ pues } -1 \text{ es raíz de } p(x)$$

$$a + b = -3$$

$$p(x) = (x + 1)(x^4 + x^3 + ax - a + b)$$

como -1 es raíz de $p(x)$ con multiplicidad 2, entonces -1 también es raíz de

$$x^4 + x^3 + ax - a + b$$

$$\begin{array}{rrrrrr} 1 & 1 & 0 & a & -a + b \\ -1 & & -1 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & a & -2a + b \end{array}$$

$$\text{como } -1 \text{ es raíz de } x^4 + x^3 + ax - a + b, \text{ entonces } -2a + b = 0$$

$$a + b = -3$$

$$-2a + b = 0$$

Resolviendo el sistema se obtiene: $a = -1$, $b = -2$

$$c = -4a - 2b - 9 = 4 + 4 - 9 = -1$$

b) $p(x) = x^5 + 2x^4 + x^3 - x^2 - 2x - 1$

Usando la información anterior:

$$p(x) = (x + 1)(x^4 + x^3 + ax - a + b)$$

$$p(x) = (x + 1)(x^4 + x^3 - x - 1)$$

$$p(x) = (x + 1)(x + 1)(x^3 + a)$$

$$p(x) = (x + 1)(x + 1)(x^3 - 1)$$

$$p(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$$

$x^2 + x + 1$ es irreducible en IR pues $\Delta < 0$

Luego, $p(x) = (x + 1)^2(x - 1)(x^2 + x + 1)$

9. Sea $p(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx + c$, siendo $a, b, c \in \mathbb{R}$

Determine las constantes a, b y c tales que se cumplan simultáneamente:

i) al dividir $p(x)$ por $x^2 + 1$ el resto es $-6x - 2$

ii) $p(x)$ sea divisible por $x - 1$

Solución:

$$p(x) \text{ es divisible por } x - 1 \quad \Rightarrow \quad p(1) = 0$$

$$\Rightarrow 1^5 - 3 \cdot 1^4 + 3 \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$$

$$\Rightarrow 1 + a + b + c = 0$$

$$\Rightarrow c = -a - b - 1$$

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + 3x^3 + ax^2 + bx - a - b - 1$$

mediante el algoritmo de la división se tiene que el resto obtenido al dividir

$p(x)$ por $x^2 + 1$ es: $(b - 2)x - 2a - b - 4$ y el cociente es $x^3 - 3x^2 + 2x + a + 3$

$$\text{luego, } (b - 2)x - 2a - b - 4 = -6x - 2$$

igualando los coeficientes se obtiene:

$$b - 2 = -6 \quad \wedge \quad -2a - b - 4 = -2$$

$$b = -4 \quad \Rightarrow \quad -2a + 4 - 4 = -2 \quad \Rightarrow \quad a = 1$$

$$c = -a - b - 1 = -1 + 4 - 1 = 2$$