

Taller N° 1

Movimientos Periódicos

Objetivos:

- Reconocer los movimientos periódicos
- Identificar a través de las gráficas $x(t)$ cuando se trata de una vibración compleja periódica o una vibración sinusoidal periódica.

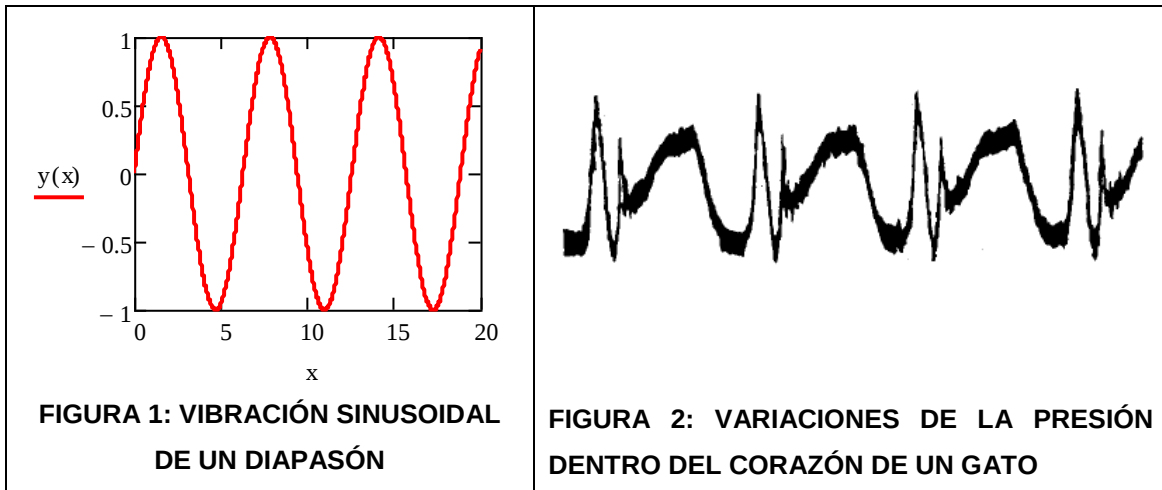
Conceptos clave:

- ✓ Perturbación
- ✓ Vibración sinusoidal
- ✓ Movimiento periódico
- ✓ Frecuencia
- ✓ Período
- ✓ Fuerza restauradora

Introducción

Las vibraciones u oscilaciones de los sistemas mecánicos constituyen uno de los campos de estudio más importantes de toda la Física. Virtualmente todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de los sistemas pueden vibrar libremente de muchas maneras diferentes. En general, las vibraciones naturales predominantes de objetos pequeños suelen ser rápidas, mientras que la de objetos más grandes suelen ser lentas. Las alas de un mosquito, por ejemplo, vibran centenares de veces por segundo y producen un sonido audible. La Tierra completa, después de haber sido sacudida por un terremoto, puede continuar vibrando a un ritmo de una oscilación por hora aproximadamente.

La característica común de todos estos fenómenos es su **periodicidad**. Existe un esquema de movimiento o desplazamiento que se repite a intervalos de tiempo regulares. Este esquema puede ser sencillo o complicado:



En ambos casos el eje horizontal representa el avance continuo del tiempo y puede identificarse la duración del tiempo, el período T , dentro del cual se realiza un ciclo completo de vibración. Dicho de otra forma; "la perturbación en ambos casos se repite periódicamente en los tiempos T , $2T$, $3T$, etc, siendo T el período de la vibración.

T : tiempo que demora una vibración completa.

f : frecuencia de la vibración.

Suponga una unidad de tiempo (1 [s], 1[min], etc.), entonces la frecuencia de vibración es el número de vibraciones que ocurren en una unidad de tiempo.

Ejemplo 1: Un cuerpo que vibra, hace "N" vibraciones en el tiempo "t":

$$f = \frac{N}{t}$$

$$T = \frac{t}{N}$$

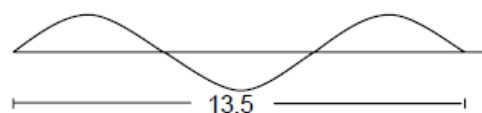
$$[f] = \left[\frac{1}{s} \right] = [s^{-1}] \Rightarrow "1\text{Hertz}"$$

PROBLEMA 1:

Una vibración sinusoidal se propaga a lo largo de una cuerda inextensible, de modo que en 0,5 [s] recorre 13,5 [m] como indica la figura. Determine:

a) Frecuencia.

b) Período.



Taller N° 2

Descripción del movimiento armónico simple (M.A.S.)

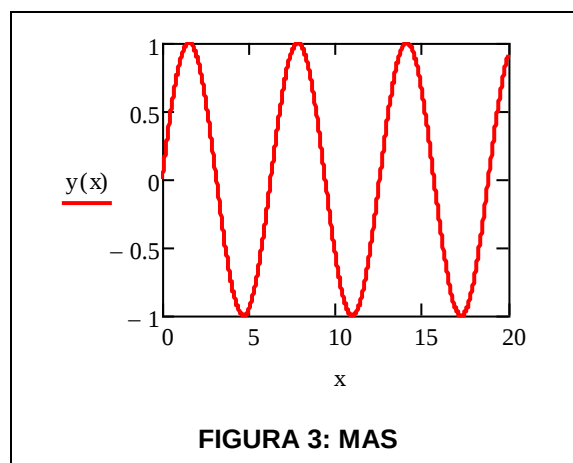
Objetivos:

- Describir el movimiento armónico simple.
- Encontrar la relación entre la fuerza y torque restaurador con la posición de la partícula.

Conceptos clave:

- ✓ Fuerza restauradora
- ✓ Torque

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación (1-1), movimiento armónico simple (MAS), se representa en un gráfico $x(t)$ de tal forma indicada en la figura 3:



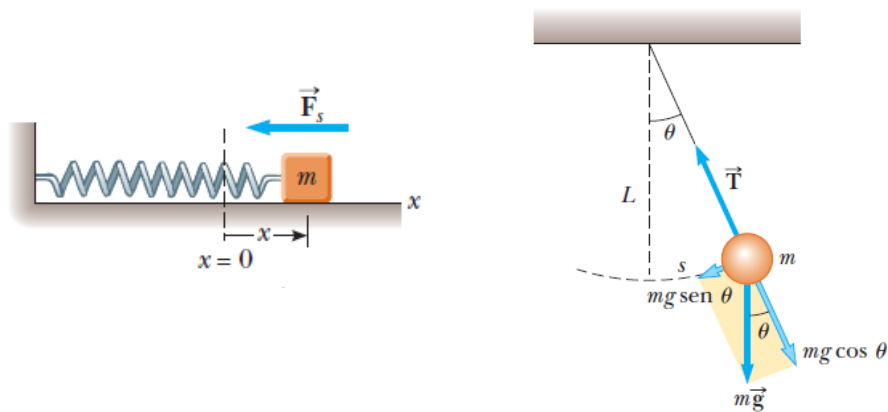
Destaquemos las características más importantes de esta perturbación sinusoidal:

1. Está confinada dentro de los límites $x = \pm A$. La magnitud positiva A se denomina *amplitud* del movimiento.

2. El movimiento tiene un período T igual al tiempo transcurrido entre dos máximos sucesivos o más generalmente entre dos momentos sucesivos en que se repitan tanto el desplazamiento x como la velocidad $\frac{dx}{dt}$. Dada la ecuación básica (1-1):

$$x = A \sin(\omega_0 t + \phi_0) \quad (1-1)$$

Ejemplo 1:



¿Cómo caracterizar estos movimientos?

- ✓ Los cuerpos oscilan en torno a su posición de equilibrio:

$$x_0 = 0$$

$$\theta_0 = 0$$

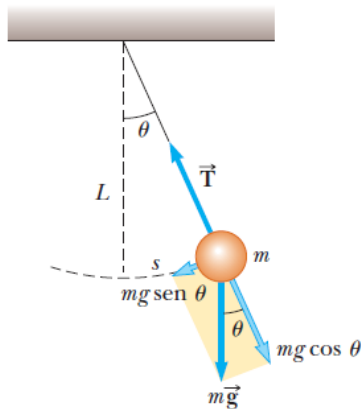
- ✓ Existe sobre estos cuerpos una fuerza resultante llamada fuerza restauradora que intenta en todo momento llevar al cuerpo a su posición de equilibrio.
- ✓ La fuerza restauradora es proporcional a la posición del cuerpo; es decir que:

$$F_R = -K \cdot x \text{ (Traslación)}$$

$$\tau_R = -K \cdot \theta \text{ (Rotación)}$$

- ✓ Donde K es una constante que depende de cada sistema vibrante en particular.

Ejemplo 2: “Péndulo Simple”



Rotación:

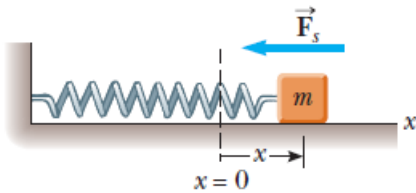
$$\tau_R = -mgL \sin \theta$$

Si θ es pequeño

$$\tau_R = -(mgL)\theta$$

Traslación:

$$F_R = -K \cdot x$$



Taller N°3.

Ecuación del MAS.

Objetivos:

- Determinar la ecuación diferencial que rige el movimiento armónico simple.
- Encontrar la solución a la ecuación diferencial del MAS
- Determinar la posición, velocidad y aceleración del MAS
- Hallar las curvas características para el movimiento armónico simple.
- Aplicar la Ley de Hooke.

Conceptos clave:

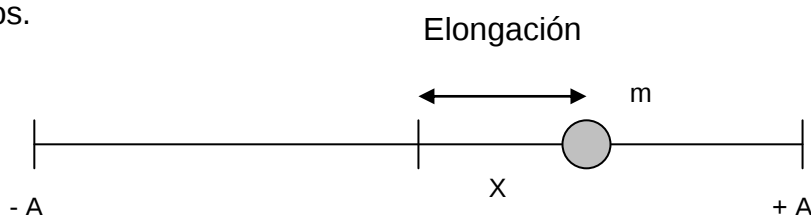
- ✓ Fuerza elástica
- ✓ Posición
- ✓ Velocidad
- ✓ Aceleración

Si se considera una mirada dinámica de los fenómenos, se puede indicar que el primer caso ocurre cuando el sistema se encuentra en equilibrio traslacional, es decir, cuando $\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$. Usando el mismo criterio para el segundo caso, se puede establecer que el sistema no se encuentra en equilibrio traslacional, lo que se traduce en $\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$, con la particularidad de que la suma permanece siempre constante, (supuesto que la masa del sistema no cambia) es decir, el resultado es independiente tanto de la posición como del tiempo. Existe en cambio un conjunto de fenómenos en los cuales, la fuerza o sumatoria de fuerzas no necesariamente es constante o cero; en general, dicha suma es dependiente del espacio y del tiempo. Algunos de esos fenómenos reciben el nombre especial de Vibraciones u Oscilaciones, los cuales forman parte de uno de los campos más importantes de la Física. En lo particular diremos que todo sistema posee una capacidad de vibración y la mayoría de ellos puede vibrar libremente de muchos modos diferentes; es de observación común que las vibraciones de objetos pequeños son

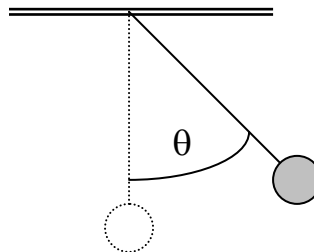
frecuentemente rápidas, en cambio, las de objetos de dimensiones mayores son más lentas. Por ejemplo un insecto de un gramo atrapado en la tela de una araña puede producir vibraciones del orden de 15 [Hz], en cambio uno de 4 gramos la frecuencia es del orden de 7,5 [Hz], es decir, más lenta. Algunos dípteros e himenópteros presentan vibraciones del orden de 150 [Hz] en sus alas; la nota Sol de los instrumentos es de 440 [Hz]; el emisor-receptor de ultrasonidos usado por la policía es de 70 [Hz].

Actividad 1: "Definiciones".

- ✓ **Movimiento Oscilatorio:** es aquel en que una partícula se mueve en forma tal que vuelve siempre a su posición de equilibrio, por ejemplo, el péndulo de un reloj, movimiento de las cuerdas vocales, movimiento del corazón, el tímpano, el respirar, movimiento de la Tierra alrededor del Sol, movimiento de una molécula, etc.
- ✓ **Movimiento Periódico:** es todo aquel movimiento que se repite a intervalos regulares de tiempo, por ejemplo, el movimiento de un péndulo, la rotación de la Tierra alrededor de su eje, movimiento del corazón, etc.
- ✓ **Periodo (T):** es el tiempo que se requiere, para efectuar una vibración u oscilación; en el SI (Sistema Internacional) se mide en segundos.
- ✓ **Frecuencia (f):** es el número de oscilaciones que hay en la unidad de tiempo, por lo tanto, la frecuencia es el recíproco del periodo. La unidad de frecuencia es el Hertz [Hz] o ciclos/s.
- ✓ **Oscilaciones libres:** significa que el sistema estará inicialmente en reposo y se le entregará un movimiento oscilatorio mediante una perturbación.
- ✓ **Posición de equilibrio:** es la posición, para la cual no actúan fuerzas netas sobre la partícula, es decir, la suma neta de las fuerzas que actúan sobre el cuerpo es cero. En el SI se mide en metros.
- ✓ **Elongación lineal o angular:** es la distancia lineal o angular de la partícula que oscila, a su posición de equilibrio en cualquier instante. En el SI se mide en metros.

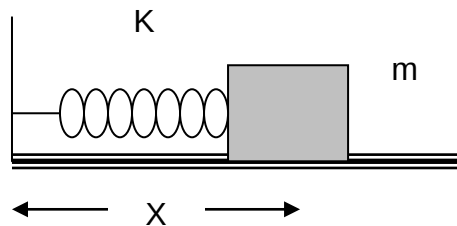


- ✓ **Amplitud:** es la máxima elongación, en el SI se mide en metros.
- ✓ **Sistemas con un grado de libertad:** son sistemas cuya posición en el plano (o en el espacio) queda perfectamente definida con una sola magnitud. Es decir, se requiere una sola coordenada, para ubicar el objeto, por ejemplo, en el "Péndulo Simple" en el plano, basta conocer el ángulo para ubicar la parte móvil.

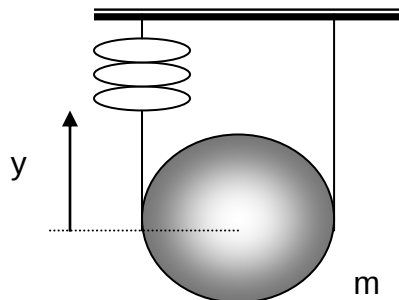


Otros ejemplos de sistemas con un grado de libertad son:

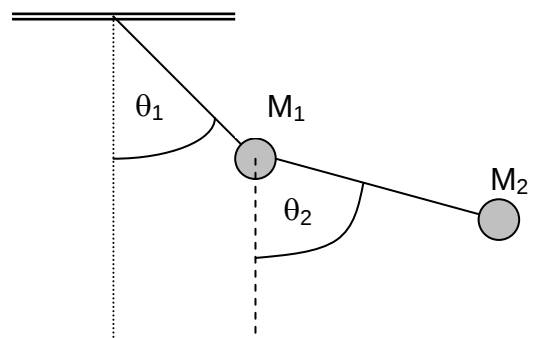
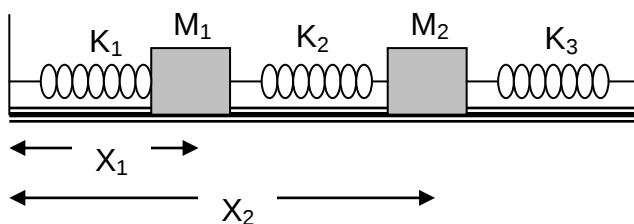
Sistema masa-resorte: basta conocer " x ", para saber donde se encuentra la masa " m ".



Sistema cilindro-resorte: basta conocer " y ", para saber donde se encuentra " m ".



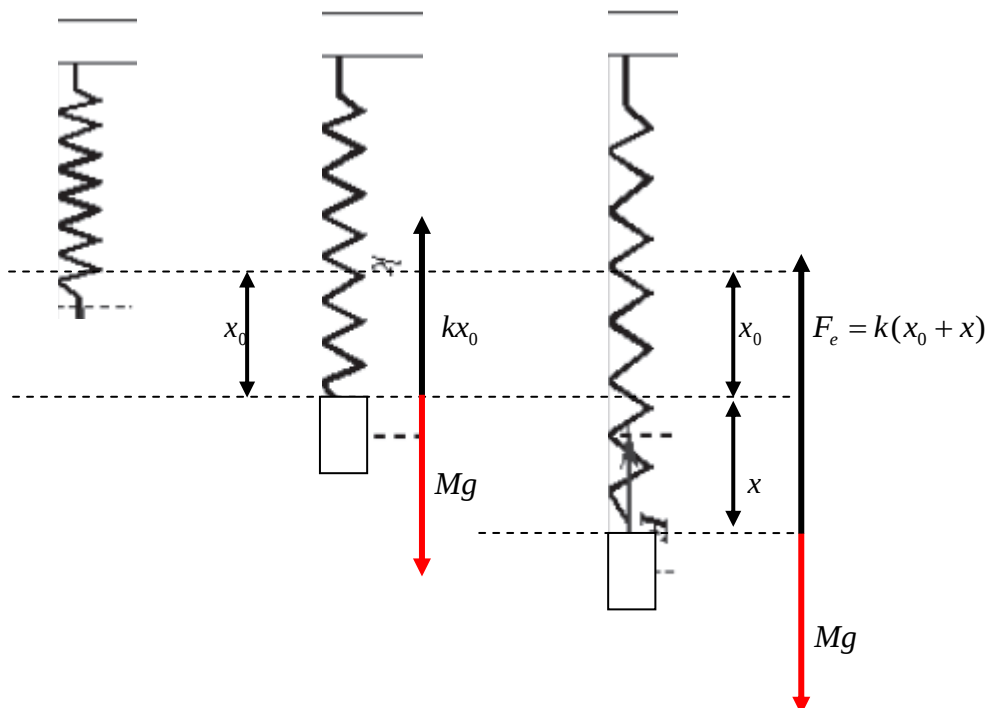
Sistemas con dos grados de libertad: se necesitan dos coordenadas para determinar la posición de los objetos.



Las oscilaciones en general, pueden tener un número infinito de formas ya sea sencillas o complejas, las más simples son aquellas que idealmente tienen forma sinusoidal o cosenoidal; de hecho, siempre es posible encontrar en la naturaleza un conjunto de fenómenos mecánicos que presentan vibraciones puramente sinusoidales, ellos generalmente se originan por fuerzas restauradoras que son proporcionales a los desplazamientos de las partículas con respecto de su posición de equilibrio.

Para que un sistema mecánico sea capaz de realizar oscilaciones auto sostenidas, debe satisfacer dos requisitos: tener inercia o masa y existir una fuerza que actúe para regresar al sistema a su estado de equilibrio o de energía más baja. Un resorte estirado o un péndulo que se desplaza hacia un lado presentan estas propiedades. Por otro lado, ese no es el caso de un trozo liviano de hilo suspendido de uno de sus extremos ni de un montón de arena que se golpea con el pie, que tampoco presentan comportamiento oscilatorio a ningún grado.

Un movimiento del tipo descrito en la ecuación (1-1), movimiento armónico simple (MAS), se representa en un gráfico $x(t)$



Para la imagen del medio, la masa se encuentra en equilibrio; por lo tanto la relación entre el peso y la fuerza elástica está dada por:

$$kx_0 = Mg$$

Y x es la posición de la masa M , respecto a su posición de equilibrio.

$$\begin{aligned}\sum \vec{F} &= m \cdot \vec{a} \\ -k(x_0 + x) + Mg &= M \cdot a \\ -kx_0 - kx + Mg &= Ma \\ -kx &= Ma\end{aligned}$$

$$\boxed{-kx = M \frac{d^2 x}{dt^2}} \quad \text{M.A.S.}$$

Al describir el M.A.S. a partir de la ecuación diferencial y encontrando la posición, velocidad y aceleración; $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$ respectivamente; se obtiene:

$$\begin{aligned}-\frac{k}{M}x &= \frac{d^2 x}{dt^2} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{M}x &= 0 \\ \frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0\end{aligned}$$

Se obtiene una ecuación diferencial de segundo orden; donde $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$. Se dice que esta ecuación describe el movimiento armónico simple

Solución y ecuación del movimiento; Para resolver la ecuación observe que

las soluciones de la ecuación auxiliar $\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$

$$\begin{aligned}x &= e^{\lambda t} \neq 0 \\ \dot{x} &= \lambda e^{\lambda t} \\ \ddot{x} &= \lambda^2 e^{\lambda t} \\ \ddot{x} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \lambda^2 e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} &= 0 \\ \lambda^2 + \omega_0^2 &= 0 \\ \lambda^2 &= -\omega_0^2\end{aligned}$$

son números complejos; así:

$$\lambda = \pm i\omega_0$$

$$x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

$$x = A(\cos \omega_0 t + i \operatorname{sen} \omega_0 t) + B(\cos \omega_0 t - i \operatorname{sen} \omega_0 t)$$

$$x = C \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_0)$$

Las constantes C, ω , ϕ_0 se determinan a través de las condiciones iniciales; en $t = 0$ [s]

$$x = x(t = 0)$$

$$v = v_0$$

$$a = a_0$$

Ej: Si $x = C \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_0)$ entonces $x_0 = C \operatorname{sen}(\phi_0)$

$$v = \frac{dx}{dt} = C\omega_0 \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$v_0 = C\omega_0 \cos(\phi_0)$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2} = -C \operatorname{sen}(\omega_0 t + \phi_0)$$

$$a_0 = -C \operatorname{sen}(\phi_0)$$

PROBLEMA:

Un barco se balancea arriba y abajo y su desplazamiento vertical viene dado por la ecuación $y(t) = 1,2 \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right) [m]$. Determinar la amplitud, frecuencia angular, constante de fase, frecuencia y periodo del movimiento. ¿Dónde se encuentra el barco en $t=1s$? Determinar la velocidad y aceleración en cualquier tiempo t y calcular la posición, velocidad y aceleración inicial.

Resp:

$$y = 0,624 [m]$$

$$v = -0,6 \operatorname{sen}\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$a = -0,3 \cos\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y_0 = 1,04 [m]$$

$$v_0 = -0,3 \left[\frac{m}{s} \right]$$

$$a_0 = -0,26 \left[\frac{m}{s^2} \right]$$

Taller N°4. Significado Físico de C , ω , ϕ_0

Objetivos:

- Encontrar los significados Físicos de:
 - C
 - ω
 - ϕ_0

Conceptos clave:

- ✓ Amplitud
- ✓ Frecuencia angular
- ✓ Constante de fase

El período debe corresponder a un aumento de 2π en el argumento de la función sinusoidal. Así pues, se tiene:

$$\omega(t+T) + \phi_0 = (\omega t + \phi_0) + 2\pi$$

De aquí que:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La situación en $t = 0$ (o en cualquier otro instante señalado) queda completamente especificada si se establecen los valores de x y $\frac{dx}{dt}$ en dicho momento. En el instante particular $t = 0$, llamaremos a estas magnitudes x_0 y v_0 , respectivamente. Entonces se tienen las siguientes identidades:

$$x_0 = C \sin(\phi_0)$$

$$v_0 = C\omega \cos(\phi_0)$$

Si se sabe que el movimiento viene descrito por la ecuación de la forma (1-1), pueden utilizarse estas dos relaciones para calcular la amplitud A y el ángulo ϕ_0 (ángulo de fase inicial del movimiento):

TAREA: Con las relaciones anteriores obtenga C y ϕ_0 .

Taller N°5. Energía en el oscilador armónico simple

Objetivos:

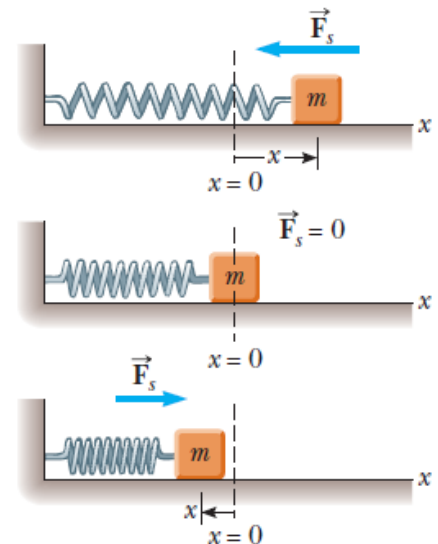
- Establecer la expresión para la energía mecánica en un M.A.S.
- Graficar Los diferentes tipos de energía en un M.A.S.
- Determinar la relación $v = v(x)$.

Conceptos clave:

- ✓ Energía mecánica
- ✓ Energía potencial elástica
- ✓ Fuerza conservativa

Examine la energía mecánica del sistema bloque–resorte que se ilustra en la figura, ya que la superficie no tiene fricción, el sistema está aislado y es de esperar que la energía mecánica total del sistema sea constante. Ahora suponga un resorte sin masa, de modo que la energía cinética del sistema solo corresponde a la del bloque; puede usar la siguiente ecuación para expresar la energía cinética del bloque como:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(A\omega \sin(\omega t + \phi_0))^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0)$$



La energía potencial elástica almacenada en el resorte para cualquier elongación x se conoce por $U = \frac{1}{2}kx^2$. Para el movimiento armónico simple está

$$\text{dada por: } U = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}k(A\cos(\omega t + \phi_0))^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \phi_0)$$

Se ve que K y U siempre son cantidades positivas o cero. Puesto que

$\omega_0^2 = \frac{k}{M}$ la energía mecánica total del oscilador armónico simple se expresa

$$\text{como: } E = K + U = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 \sin^2(\omega t + \phi_0) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega t + \phi_0).$$

A partir de la identidad $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ se ve que la cantidad entre corchetes es la unidad.

En consecuencia, esta ecuación se reduce a:

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

Esto es: **la energía mecánica total de un oscilador armónico simple es una constante del movimiento y es proporcional al cuadrado de la amplitud.**

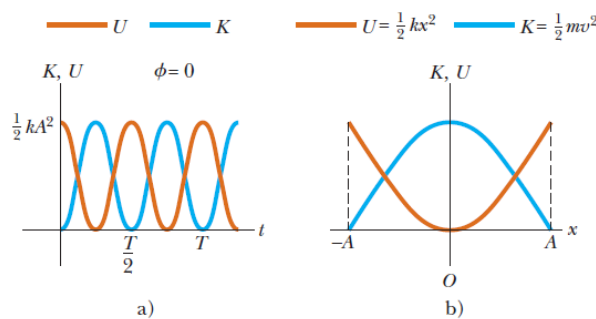


Figura a) Energía cinética y energía potencial en función del tiempo para un oscilador armónico simple con $\phi = 0$. b) Energía cinética y energía potencial con la posición para un oscilador armónico simple. En cualquier gráfica, note que $K + U = \text{constante}$.

Por ultimo, la velocidad del bloque en una posición arbitraria se obtiene al expresar la energía total del sistema en alguna posición arbitraria x como:

$$E = K + U = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

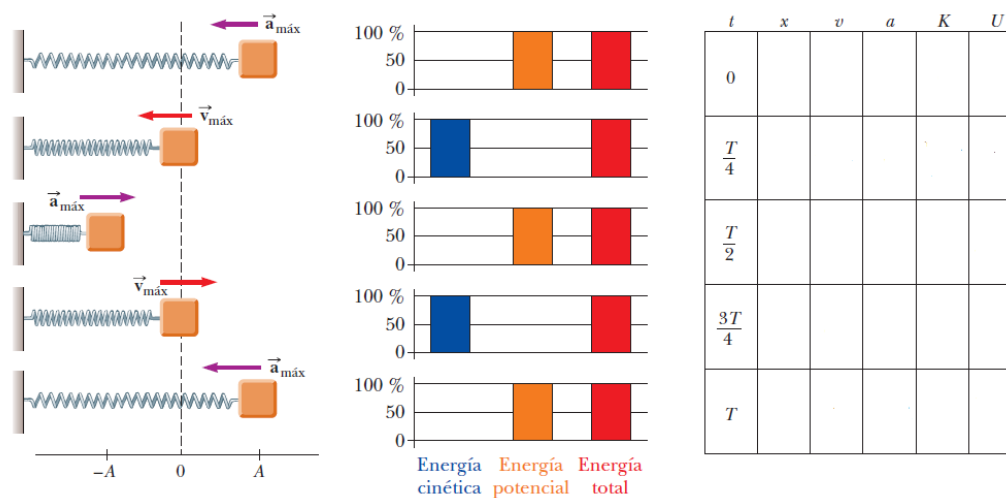
PROBLEMA 1: A partir de la ecuación de la energía encuentre las expresiones para la velocidad de la partícula en función de la posición para el oscilador armónico simple.

Al comprobar la ecuación para ver si concuerda con casos conocidos, se encuentra que verifica que la rapidez es un máximo en $x = 0$ y es cero en los puntos de retorno $x = \pm A$. Es posible que se pregunte por que se pasa tanto tiempo en el estudio de los osciladores armónicos simples.

Comentarios:

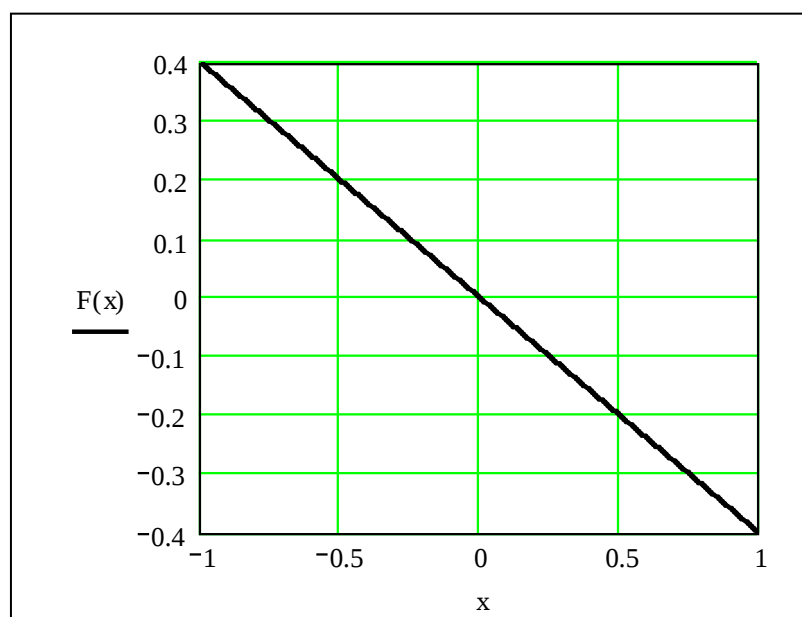
- ✓ De acuerdo con el gráfico, se aprecia que el cuerpo posee mayor energía potencial cuando éste se encuentra en los extremos, es decir, en su amplitud.
- ✓ Es necesario, para que se cumpla este movimiento, la existencia de una fuerza restauradora, de tal manera que se conserve la energía.

PROBLEMA 2: Complete la tabla siguiente para el oscilador armónico:



a) De acuerdo a lo anterior, se tiene: $F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$. ¿Qué se puede deducir de esta expresión? ¿Con qué nombre se conoce esta Ley?

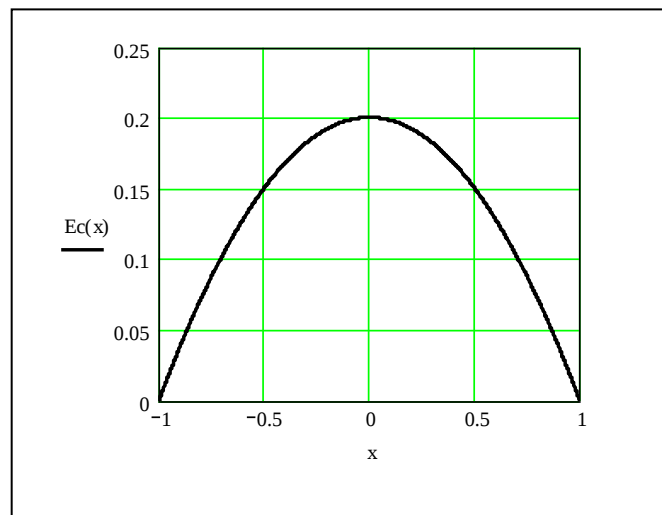
b) Grafique la expresión obtenida en (b) y compárela con la gráfica siguiente.



Comentarios:

- ✓ “Una partícula en que la fuerza que actúa es una función lineal con la posición y la energía potencial es mínima, entonces adquiere un movimiento armónico simple”.
- ✓ Para que el sistema sea un oscilador armónico simple debe cumplir con la curva $U(X)$ y $F(X)$.
- ✓ Si la fuerza no es lineal, hay que linealizarla.

c) Considere ahora que el sistema no pierde energía y las energías son únicamente potencial y cinética traslacional. Confeccione una gráfica de energía cinética versus la posición y compárela con la gráfica siguiente.



Comentarios:

- ✓ De acuerdo con el gráfico, se aprecia que el cuerpo posee mayor energía cinética cuando éste se encuentra en la posición de equilibrio, es decir, en $X = 0$.
- ✓ Es necesario, para que se cumpla este movimiento, la existencia de una fuerza restauradora, de tal manera que se conserve la energía.

Taller N°6.

Tema: Representación gráfica del Movimiento Armónico Simple.

Gráficos $x-t$; $v-t$; $a-t$; $v-x$.

Objetivos:

- ✓ Graficar las ecuaciones de posición, rapidez y aceleración, para un movimiento armónico simple.

Introducción.

Los sistemas de ingeniería que poseen masa y elasticidad están capacitados para tener movimiento relativo. Si el movimiento de estos sistemas se repite después de un determinado intervalo de tiempo, el movimiento se conoce como **vibración**. La vibración, es en general, una forma de energía disipada y en muchos casos inconveniente. Esto es particularmente cierto en las maquinarias: debido a que con las vibraciones, se producen ruidos, se arruinan las diferentes partes y se transmiten fuerzas y movimientos indeseables a los objetos muy cercanos.

La propiedad más importante de un sistema vibrante, es la **frecuencia natural** (frecuencia de un sistema que tiene vibración libre: que es el movimiento periódico que se observa cuando el sistema se desplaza de su posición de equilibrio estático), se obtiene de la ecuación de movimiento.

Conceptos Clave.

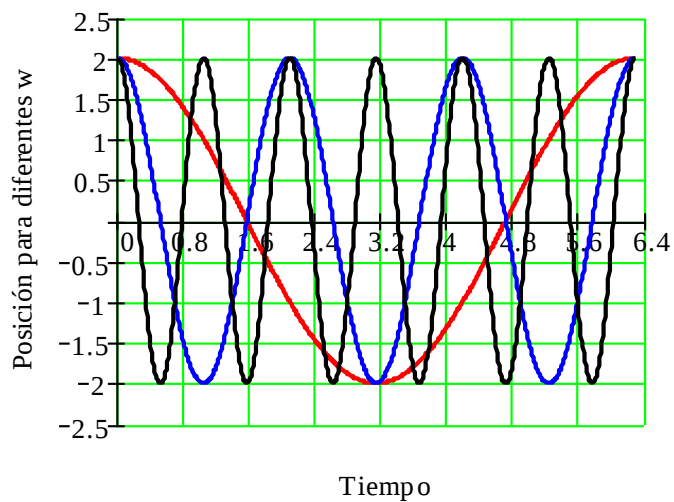
- ✓ Movimiento Armónico Simple.

Actividad 1: “Gráficas”.

Con lápices de diferente color grafique las ecuaciones de $x(t)$, $v(t)$ y $a(t)$, para ello complete la siguiente tabla. Suponga que la amplitud es $A = 2,0$, la fase inicial es $\delta = 0$ y compare sus resultados con los gráficos mostrados a continuación.

t.	$x(t)$	$v(t)$	$a(t)$
0			
$T/4$			
$T/2$			
$3T/4$			
T			
$5T/4$			
$3T/2$			
$7T/4$			
$2T$			

Gráfico posición versus tiempo.

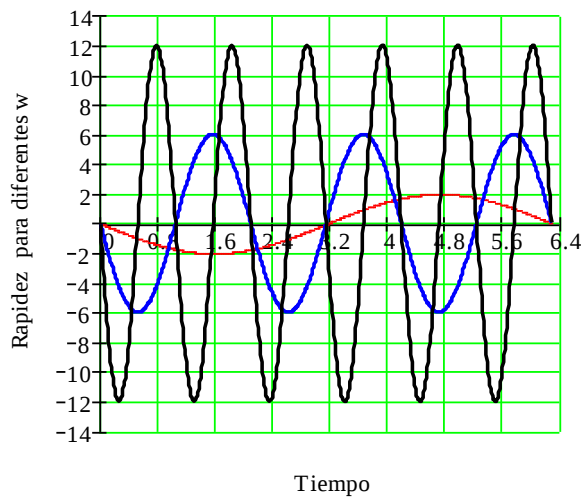


Línea roja $w = 1$

Línea azul $w = 3$

Línea negra $w = 6$

Gráfico rapidez versus tiempo.



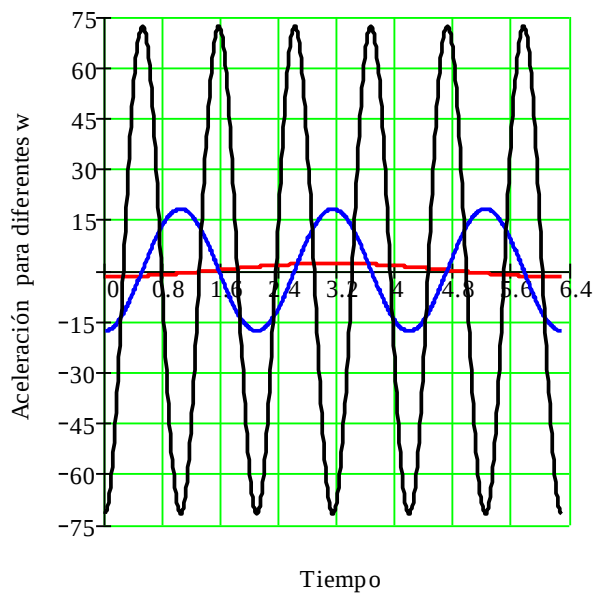
Linea roja $w = 1$

Linea azul $w = 3$

Linea negra $w = 6$

Note que la amplitud de la rapidez crece según el producto $A w$.

Gráfico aceleración versus tiempo.



Linea roja $w = 1$

Linea azul $w = 3$

Linea negra $w = 6$

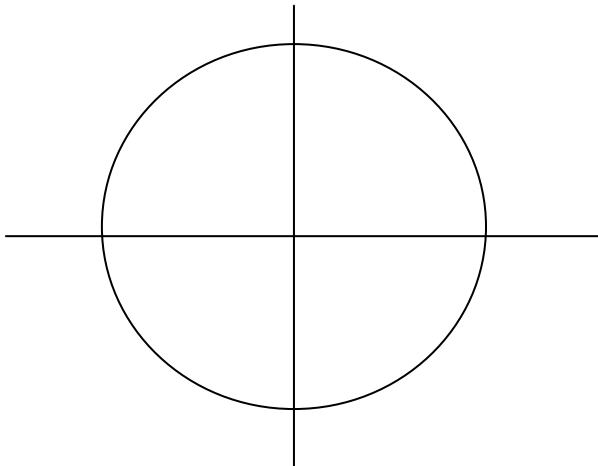
Note que la amplitud de la aceleración crece según el producto $A w^2$.

Actividad 2: “Conclusiones”.

De acuerdo a las gráficas de las ecuaciones de posición, velocidad y aceleración, indique las conclusiones que se obtienen acerca del movimiento armónico simple.

Actividad 3: “Ecuaciones para un movimiento armónico simple”.

1. Construya un círculo, donde indique el radio y la constante de fase inicial (ϕ), para una partícula en el tiempo $t = 0$. Identifique dicho punto como “P”.
2. Mueva la partícula un cierto ángulo “ θ ” y marque dicho punto como “Q”.
3. A partir de los puntos anteriores, determine las ecuaciones del movimiento armónico simple (posición, rapidez y aceleración).



Observaciones:

1. La elongación máxima que toma $x(t)$ es $\pm A$, por lo tanto, “A” es la amplitud.
2. “ ϕ ” es la constante de fase.
3. La amplitud está determinada por las condiciones de oscilación.
4. El periodo es independiente de la amplitud en el movimiento armónico simple.
5. La cantidad $(\omega t + \phi)$ se llama fase del movimiento.

Actividad 4: “Aplicación”.

- Construya un esquema que muestre un Péndulo Simple.
- Para ese esquema construya un diagrama del cuerpo libre, donde se indiquen todas las fuerzas que actúan sobre la masa.
- Plantee la ecuación del movimiento y compárela con la ecuación diferencial correspondiente.
- Determine el período para el Péndulo Simple.
- Interprete la información obtenida.

Actividad 5: “Tarea”.

Determine el período para un Péndulo:

- Físico.
- De Torsión.

Interprete la información obtenida en cada uno de ellos.

Actividad 6: “Ejemplos”.

Ejemplo 1.

Una partícula se mueve con M.A.S (movimiento armónico simple) en línea recta. Cuando $t = 0$ la aceleración es $8 \text{ [pies/s}^2\text{]}$, la velocidad 3 [pies/s] y el desplazamiento -2 [pies] . Encontrar la amplitud y el período del movimiento.

Resp: $A = 2,5 \text{ ft}$; $T = \pi \text{ [s]}$

Ejemplo 2.

Un cuerpo oscila con M.A.S de acuerdo a la ecuación:

$$X(t) = 6 \cos(3\pi t + \pi/3) \text{ [m]}.$$

Calcular para $t = 2 \text{ [s]}$:

- La elongación “X”.
- La velocidad “V”.
- La aceleración “a”.

Determinar:

- La frecuencia angular “w”.
- El periodo del movimiento.

Resp: (a) 3 [m] ; (b) $-48,97 \text{ [m/s]}$; (c) $-266,48 \text{ [m/s}^2\text{]}$; (d) $3\pi \text{ rad/s}$; (e.) $0,67 \text{ s}$.

Ejemplo 3.

Una partícula que se mueve con M.A.S, tiene rapidez de 3 [cm/s] y 4 [cm/s] a las distancias de 8 [cm] y 6 [cm], respectivamente de su posición de equilibrio. Hallar el periodo del movimiento.

Resp: $T = 4\pi$ [s]

Guía de Ejercicios Propuestos.

Tema: Dinámica y Energía del Movimiento Armónico Simple.

Problema 1. Un sistema oscilatorio constituido por una masa y un resorte, tiene una energía mecánica de 1,18 [J], una amplitud de oscilación de 9,84 [cm] y una rapidez máxima de 1,22 [m/s]. Encuentre: la constante del resorte que da lugar a dicho movimiento, la masa del bloque y la frecuencia de oscilación.

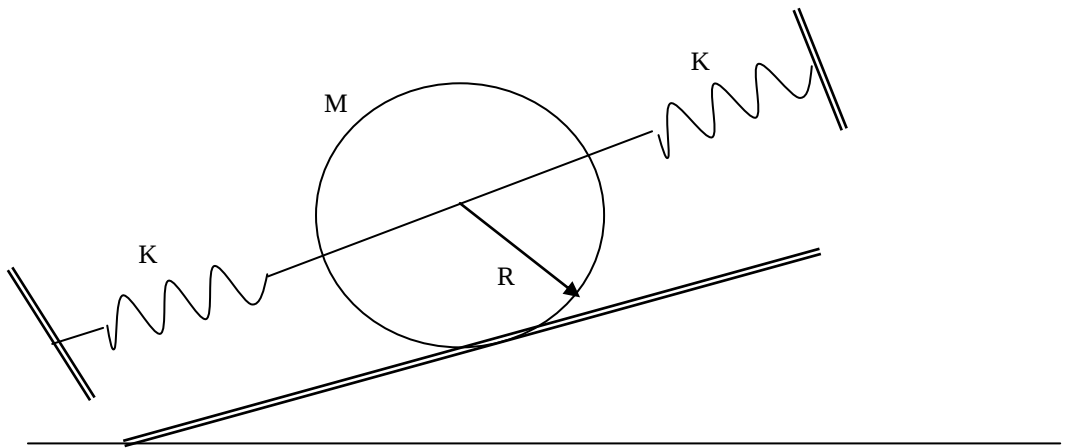
Problema 2. Un cuerpo de 100 [kg] de masa cuelga de un largo resorte helicoidal. Cuando se tira de él 10 [cm] por debajo de la posición de equilibrio y se abandona a si mismo, oscila con un periodo de 2 [s], a) ¿cuál es su rapidez al pasar por la posición de equilibrio? b) ¿cuál es el valor de la energía potencial en ese punto? c) ¿Qué valor tiene la energía cinética?

Problema 3. En un MAS, ¿para qué valor de x la energía cinética de una partícula es igual a la mitad de su energía potencial elástica?

Problema 4. En un sistema masa resorte la energía potencial elástica se expresa por $U(x) = 0.5 x^2$. Realice un gráfico de dicha energía en función de la posición cuando ésta varía entre $x = - 5.0$ [cm] y $x = + 5.0$ [cm]. Obtenga además la Fuerza ejercida sobre la masa y la energía cinética en función de la posición.

Problema 5. Un sistema oscilatorio masa-resorte tiene una energía mecánica de 0,25 Joule, una amplitud de 20,00 cm y una velocidad máxima de 1,50 m/s. Encuentre la constante del resorte, la masa del bloque y la frecuencia de oscilación.

Problema 6. Un cilindro sólido homogéneo de masa M y radio R está unido en su centro a dos resortes iguales, como se muestra en la figura. Si el cilindro puede rodar sobre la superficie de horizontal rugosa, sin deslizar, encontrar la frecuencia natural de oscilación. Considere el momento de inercia del centro de masa para un cilindro como $I_{CM} = MR^2/2$.



Guía de Ejercicios Resueltos.
Tema: Movimiento Armónico Simple.

Problema 1. Encontrar la amplitud, el periodo, la frecuencia y la velocidad máxima, para el movimiento de una partícula cuyo desplazamiento desde el origen está dado por la siguiente expresión: $X = 4 \sin (3 t + 2) \text{ [m]}$

Información de entrada

La expresión que representa a la posición de una partícula en un movimiento armónico simple. $X_1 = 4 \sin (3 t + 2) \text{ [m]}$.

Análisis de la información

De la expresión dada, se puede obtener por analogía a la solución de la ecuación de un movimiento armónico simple, lo siguiente:

La amplitud del movimiento es: $A = 4,0 \text{ [m]}$

La frecuencia angular es: $w = 3 \text{ [rad]/[s]}$

de lo cual se puede hallar la frecuencia lineal f , es decir:

$$f = \frac{w}{2\pi}, \quad f = 0,477 \text{ [Hz]}$$

El periodo del movimiento corresponde al inverso de la frecuencia lineal,

$$T = \frac{1}{f} \quad T = 2,094 \text{ [s]}$$

La velocidad máxima se determina a partir de la expresión $V_{\text{MAX}} = \pm w A$.

$$V_{\text{MAX}} = \pm 12 \text{ [m/s]}$$

Problema 2. Un cuerpo oscila con un movimiento armónico simple, según la ecuación: $X = 4 \cos(2\pi t + \pi/6)$, donde X está en metros, t en segundos y los números dentro del paréntesis en radianes, ¿cuál es el desplazamiento, la velocidad, la aceleración la fase en el instante $t = 2$ [s]

Información de entrada

Tiempo en el cual se desea encontrar las distintas variables. $t = 2$ [s]

La amplitud del movimiento es: $A = 4,0$ [m]

La frecuencia angular es: $\omega = 2\pi$ [rad/s]

La fase inicial del movimiento es: $\delta = \pi/6$ [rad]

Análisis de la información

De lo cual se puede hallar la frecuencia lineal f, es decir:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \quad f = 1,0 \text{ [Hz]}$$

La expresión que representa la posición de una partícula en un movimiento armónico simple se expresa por:

$$X(t) = A \cos[\omega t + \delta] \quad X(2 \text{ s}) = 3,464 \text{ [m]}$$

La velocidad de la partícula se determina a partir de la derivada de la posición con respecto del tiempo,

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = -A \omega \sin(\omega t + \delta) \quad V(2 \text{ s}) = -12,566 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La aceleración de la partícula es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo.

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -A \omega^2 \cos(\omega t + \delta) \quad a(2 \text{ s}) = -136,757 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

La fase del movimiento es, $\beta(t) = \omega t + \delta$, $\beta(2 \text{ s}) = 13,09$ [rad]

Problema 3. Un objeto de masa 20 [kg] se mueve con M.A.S. sobre el eje X. inicialmente ($t = 0$) está localizado a 4 [m] del origen ($x = 0$) y tiene una velocidad de 15 [m/s] y aceleración 100 [m/s²] dirigidas hacia el origen. Encontrar:

- a) La ecuación de posición en función del tiempo.
- b) La amplitud del movimiento
- c) El período
- d) La frecuencia
- e) La fuerza que actúa sobre el objeto cuando $t = \pi / 10$ [s]

Información de entrada

El movimiento que realiza el objeto es un MAS cuya ecuación general es $X(t) = A \cos[w t + \delta]$.

La masa del objeto es $M = 20$ [kg].

Tiempo en el cual se determinan las distintas variables iniciales es $t_0 = 0$.

La posición en $t_0 = 0$ es: $X(t_0) = 4,0$ [m].

La velocidad en $t_0 = 0$ es: $V(t_0) = -15$ [m/s].

La aceleración en $t_0 = 0$ es: $a(t_0) = -100$ [m/s²].

Análisis de la información

Dado que la posición de la partícula se expresa por $X(t) = A \cos[w t + \delta]$.

La velocidad de la partícula es

$$V(t) = \frac{dX}{dt} = -A w \sin(wt + \delta)$$

La aceleración de la partícula es la derivada de la velocidad con respecto del tiempo.

$$a(t) = \frac{dV}{dt} = -A w^2 \cos(wt + \delta)$$

Si evaluamos las expresiones anteriores en $t = 0$, se tiene:

$$X(0) = A \cos(\delta)$$

$$V(0) = -A w \sin(\delta)$$

$$a(0) = -A w^2 \cos(\delta)$$

Al igualar estas expresiones con los valores dados por las condiciones iniciales del problema, se puede obtener un sistema de tres ecuaciones.

$$\begin{aligned}A \cos(\delta) &= 4,0 \text{ [m]} \\-A \omega \sin(\delta) &= -15 \text{ [m/s]} \\-A \omega^2 \cos(\delta) &= -100 \text{ [m/s}^2\text{]}\end{aligned}$$

Al resolver el sistema de ecuaciones, se obtienen los siguientes valores para la amplitud, la frecuencia angular y la fase inicial.

$$A = 5,0 \text{ [m]} \quad ; \quad \omega = 5 \text{ [Hz]} \quad ; \quad \delta = 0,64 \text{ [rad]}$$

De acuerdo con lo anterior se puede determinar que la frecuencia lineal es $f = \omega / 2\pi = 0,796 \text{ [Hz]}$; el periodo $T = 1/f = 1,257 \text{ [s]}$. Con estos valores podemos hallar la posición en cualquier instante, es decir,

$$X(t) = 5,0 \cos(5t + 0,64) \text{ [m]}.$$

La fuerza se obtiene a partir de la segunda ley de Newton, es decir:

$F = M a$, ($F(t) = M a(t)$). Si se desea hallar la fuerza en el instante $t = \pi/10 \text{ [s]}$,

$$F\left(\frac{\pi}{10}\right) = -2500 \cos\left[\frac{5\pi}{10} + 0,64\right] = 1493 \text{ [N]}$$

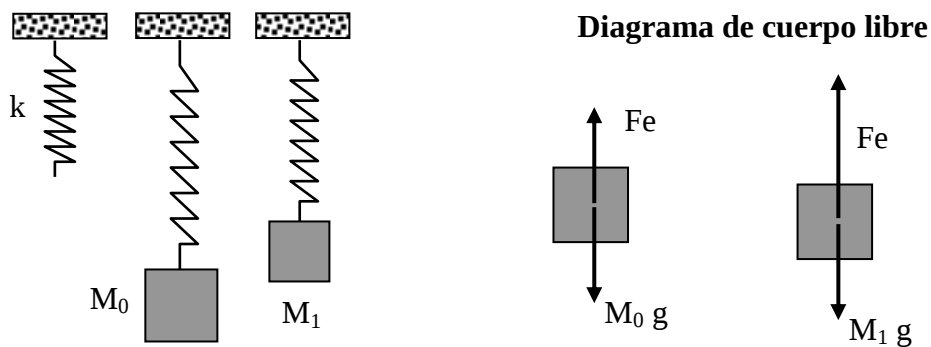
Problema 4. Un bloque de 4 [kg] estira un resorte en 16 [cm] a partir de su forma natural. El bloque se quita y un cuerpo de 0.5 [kg] se cuelga del mismo resorte. Si el resorte se estira, y después se suelta, ¿cuál es su periodo de movimiento?

Información de entrada

El bloque que se cuelga tiene una masa de: $M_0 = 4,0$ [kg]
El estiramiento del resorte bajo la acción del bloque es: $X_0 = 16,0$ [cm]
La situación del bloque una vez estirado el resorte es de equilibrio.
La masa del cuerpo que reemplaza al bloque es $M_1 = 0,5$ [kg]

Análisis de la información.

El diagrama de cuerpo libre para el bloque en la situación de equilibrio es:



La relación de equilibrio $M_0 g = k X_0$, permite encontrar la constante elástica del resorte.

$$k = \frac{M_0 g}{X_0}$$

$$k = 245,166 \text{ [N/m]}$$

Del diagrama de cuerpo libre para la segunda situación, se sabe que $M_1 = 0,5$ [kg] y con ella se hace oscilar el sistema masa-resorte, el periodo en este caso, se determina a partir de:

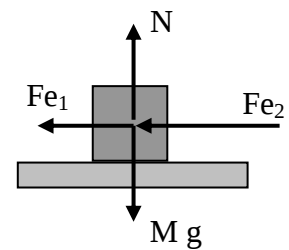
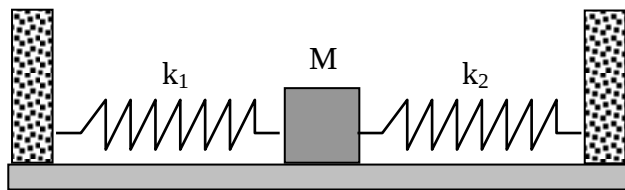
$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{M_1}{k}}$$

$$T = 0,284 \text{ [s]}$$

Problema 5. Si dos resortes se ligan a la masa como se indica en la figura siguiente, demuestre que:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

Diagrama de cuerpo libre



Información de entrada

El bloque tiene una masa M .

Las constantes elásticas de cada resorte son k_1 , k_2 respectivamente.

La masa M , se desplaza hacia la derecha una distancia X , que corresponde a un estiramiento del resorte 1 y una compresión del resorte 2.

Análisis de la información.

El diagrama de cuerpo libre para el bloque en la situación de movimiento da origen a la siguiente ecuación:

$$-k_1 X - k_2 X = M \frac{d^2}{dt^2} X$$

$$\frac{d^2}{dt^2} X + \left[\frac{k_1 + k_2}{M} \right] X = 0$$

El coeficiente que acompaña al segundo término de la ecuación diferencial corresponde al cuadrado de la frecuencia angular, es decir,

$$\omega^2 = \left[\frac{k_1 + k_2}{M} \right]$$

La frecuencia lineal es:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

Problema 6. Un péndulo de 1 [m] de longitud hace 100 oscilaciones completas en 204 [s] en cierto lugar. ¿Cuál es el valor de la aceleración de gravedad en este punto?

Información de entrada

El péndulo simple tiene una longitud de:	$L = 1,0 \text{ [m]}$
El número de oscilaciones que realiza el péndulo es:	$N = 100$
El tiempo en realizar las 100 oscilaciones corresponde a:	$t = 204 \text{ [s]}$

Análisis de la información.

Cómo el péndulo es un péndulo simple, sabemos que su periodo es:

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

De la definición de periodo para cualquier fenómeno periódico;

$$T = \frac{t}{N}$$

Igualando ambas ecuaciones y despejando la gravedad, se obtiene:

$$g = \frac{L}{\left(\frac{t}{2 \pi N}\right)^2}$$
$$g = 9,486 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

Problema 7. Determine la frecuencia del sistema masa resorte de la figura.

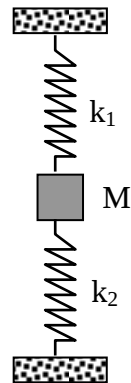
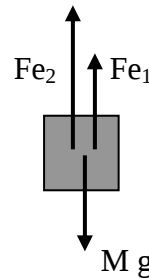


Diagrama de cuerpo libre



Información de entrada

El bloque tiene una masa M

Las constantes elásticas de cada resorte son k_1 y k_2 respectivamente.

La masa M se desplaza hacia abajo una distancia Y , que corresponde a un estiramiento del resorte 1 y a una compresión del resorte 2.

Análisis de la información

El diagrama de cuerpo libre para el bloque en la situación de movimiento da origen a la siguiente ecuación:

$$Mg - k_1 Y - k_2 Y = M \frac{d^2}{dt^2} Y$$

$$\frac{d^2}{dt^2} Y + \left[\frac{k_1 + k_2}{M} \right] Y = g$$

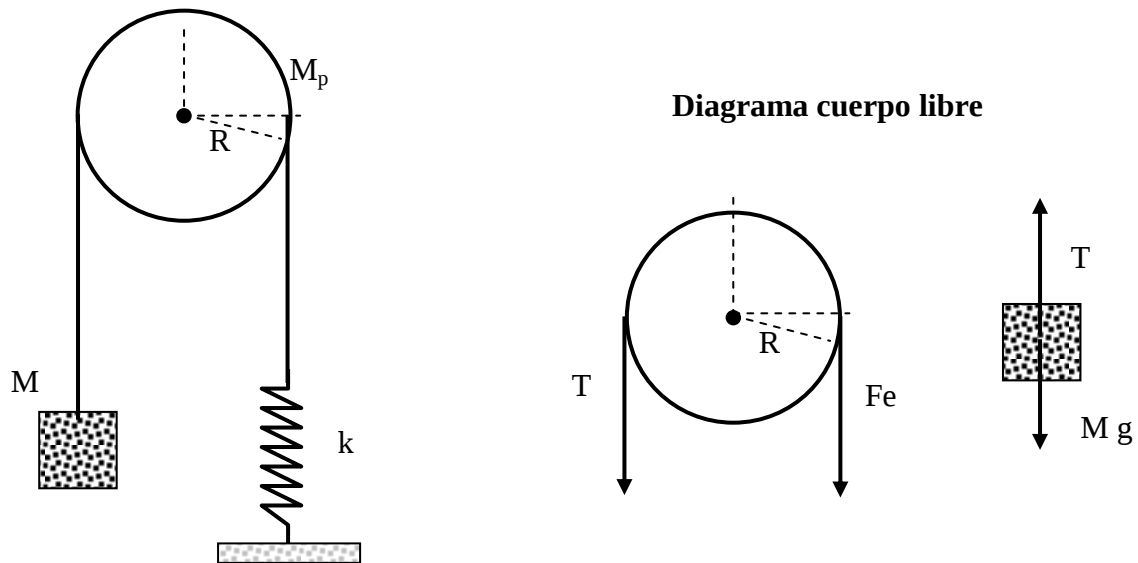
La ecuación del movimiento armónico simple se iguala a una constante que no altera la frecuencia del movimiento. La ecuación homogénea (igual a cero) nos muestra que el coeficiente que acompaña al segundo término de la ecuación diferencial corresponde al cuadrado de la frecuencia angular, es decir,

$$\omega^2 = \left[\frac{k_1 + k_2}{M} \right]$$

La frecuencia lineal es:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{M}}$$

Problema 8. Determine la frecuencia natural del sistema masa resorte y polea mostrado en la figura. La inercia de la polea es $I_o = M_p R^2/2$.



Información de entrada.

El bloque tiene una masa M y la polea tiene una masa M_p .

La constante elástica del resorte es k .

La masa M se desplaza hacia abajo una distancia Y , que corresponde a un estiramiento del resorte. Al mismo tiempo $Y = R \theta$.

El momento de inercia de la polea con respecto del centro de masa es:

$$I_o = M_p R^2/2$$

Análisis de la información

Al girar la polea un cierto ángulo θ , se producen torques con respecto del centro de masa de la polea, debidos a la fuerza elástica y a la tensión en el borde de la polea, esto da origen a la siguiente ecuación de rotación ($\tau = I \alpha$) en la polea:

$$- k Y R + T R = I_o \alpha$$

Para ángulos pequeños de rotación, se puede aproximar el avance lineal Y de la siguiente forma; $Y = R \theta$, de acuerdo con ello, las ecuaciones que se obtienen del diagrama de cuerpo libre son:

$$- k R^2 \theta + T R = I_o \alpha \quad - T + M g = M a$$

Pero la aceleración lineal que experimenta el cuerpo de masa M, se vincula con la aceleración angular según la ecuación $a = \alpha R$.

Reemplazando la aceleración en la segunda ecuación, se puede despejar la tensión T:

$$T = M (g - \alpha R)$$

Reemplazando la tensión en la ecuación de origen, se tiene:

$$- k R^2 \theta + M (g - \alpha R) R = I_o \alpha$$

Al agrupar y reemplazar el momento de inercia I_o , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

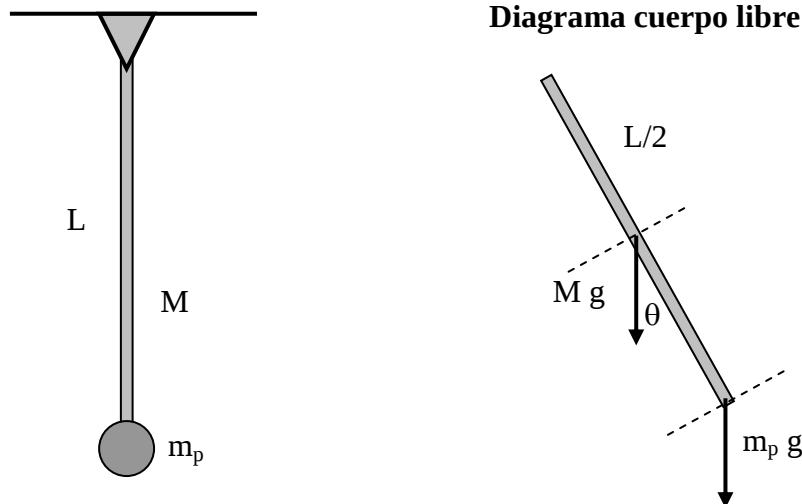
$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \left[\frac{2 k}{(2 M + M_p)} \right] \theta = \frac{2 M g}{R [2 M + M_p]}$$

Resolviendo la ecuación homogénea (igual a cero), se determina que la frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 k}{(2 M + M_p)}}$$

Problema 9. La figura muestra un péndulo físico. Determine la frecuencia angular natural y el periodo de oscilación del sistema.

- (a) Si la masa de la varilla es pequeña comparada con la masa del extremo.
(b) Si la masa de la varilla no es despreciable. La inercia de la varilla con respecto del centro de masa es $I_0 = M L^2/12$.



Información de entrada

El péndulo simple tiene una longitud L igual a la longitud de la barra.

La masa de la barra es M

La masa puntual en el extremo de la barra es m_p

Análisis de la información.

Si consideramos que la barra no tiene masa, entonces el periodo de oscilación corresponde al periodo de un péndulo simple, es decir:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Como vemos, en este caso el periodo es independiente de la masa m_p . y la frecuencia angular corresponde a:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Si se considera ahora que la barra tiene una masa M , entonces lo que tenemos es un péndulo físico compuesto por dos objetos. (la barra y la masa puntual).

La masa del sistema es: $M_S = M + m_p$

La posición del centro de masa es:

$$X_{CM} = \frac{\frac{M L}{2} + m_p L}{[M + m_p]}$$

El momento de inercia con respecto del eje de rotación es la suma del momento de inercia de la barra con respecto del eje de rotación y el momento de inercia de la masa puntual con respecto de dicho eje, es decir:

$$I_S = \frac{M L^2}{3} + m_p L^2$$

Si se considera que la frecuencia angular de un péndulo físico se determina a partir de:

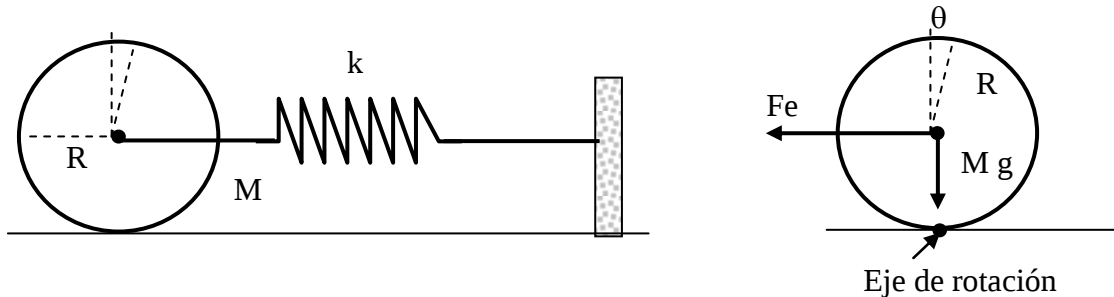
$$\omega = \sqrt{\frac{M_S X_{CM} g}{I_S}}$$

Reemplazando las distintas expresiones en la última ecuación, se obtiene:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} \frac{\frac{M}{2} + m_p}{\frac{M}{3} + m_p}}$$

Problema 10. Un cilindro de masa M y radio R está unido por medio de un resorte de módulo k como se muestra en la figura. Si el cilindro puede rodar sobre la superficie horizontal rugosa, sin deslizar, encuentre la frecuencia angular. La inercia del cilindro (o disco) en torno del eje es $I_o = M R^2/2$.

Diagrama cuerpo libre



Información de entrada.

La masa del disco es M , su radio es R .

La constante elástica del resorte es k , y el punto de aplicación de la fuerza elástica es el centro de masa del disco.

El momento de inercia del disco con respecto del centro de masa es $I_o = M R^2/2$.

Análisis de la información.

Al girar el disco cierto ángulo θ , se producen torques con respecto del eje de rotación debido a la fuerza elástica, el peso no produce torque debido a que dicha fuerza pasa por el eje de rotación. Esto da origen a la siguiente ecuación de rotación ($\tau = I \alpha$) en el disco.

$$- k X R = I \alpha$$

Para ángulos pequeños se puede aproximar lo siguiente $X = R \theta$, de acuerdo con esto, la ecuación que se obtiene del diagrama de cuerpo libre es:

$$- k R^2 \theta = I \alpha$$

De acuerdo con la información dada, el momento de inercia con respecto del eje de rotación se determina usando el teorema de Steiner.

$$I = I_o + M R^2 = 3 M R^2/2$$

Reemplazando los resultados en la ecuación de origen, se obtiene:

$$- k R^2 \theta = \frac{3 M R^2}{2} \frac{d^2}{dt^2} \theta$$

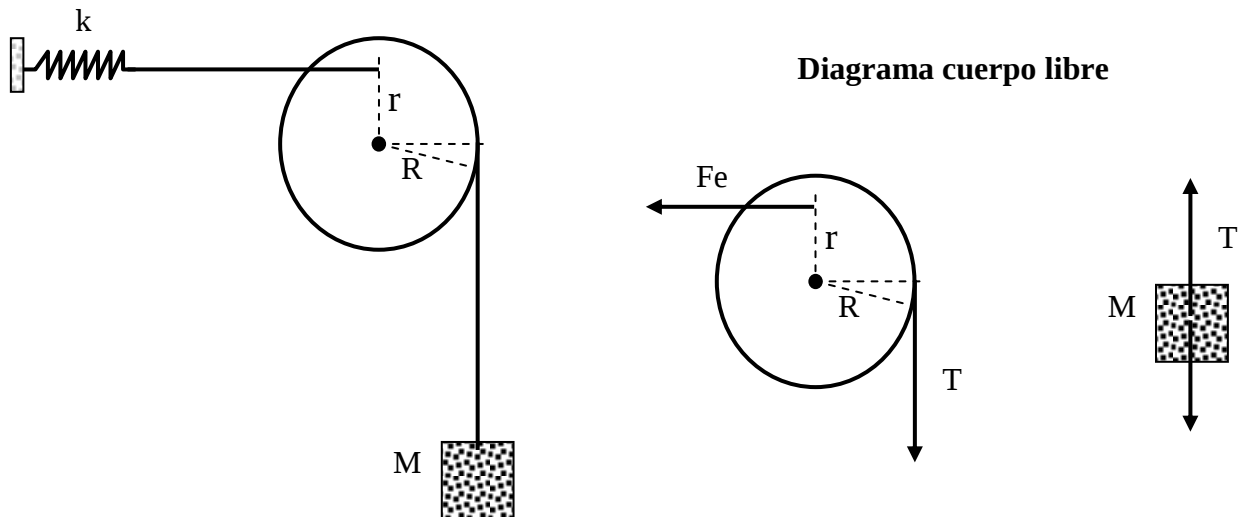
La ecuación diferencial se puede escribir como:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \frac{2k}{3M} \theta = 0$$

La frecuencia angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{2k}{3M}}$$

Problema 11. La masa "M" está suspendida por medio de una cuerda rígida al disco homogéneo circular de masa M_d y radio R como se muestra en la figura. El disco puede rotar debido a la acción de un resorte enganchado a una distancia "r" del centro. Si la masa se desplaza desde la posición de reposo hacia abajo, determine la frecuencia de oscilación. La inercia del disco en torno del eje es $I_o = M_d R^2 / 2$.



Información de entrada.

La masa del disco es M_d y su radio es R .

La masa que cuelga es M .

La constante elástica del resorte es k , y el punto de aplicación de la fuerza elástica es r con respecto del centro del disco.

El momento de inercia del disco con respecto del centro de masa es:
 $I_o = M_d R^2 / 2$.

Análisis de la información.

Al girar el disco un cierto ángulo θ , se producen torques con respecto del centro de masa del disco producidos por la fuerza elástica y la tensión en el borde de la polea, esto da origen a la siguiente ecuación de rotación ($\tau = I \alpha$) en el disco.

$$- k X r + T R = I_o \alpha$$

Para ángulos pequeños de rotación, se puede aproximar el avance lineal X de la siguiente forma; $X = r \theta$, de acuerdo con ello, las ecuaciones que se obtienen del diagrama de cuerpo libre son:

$$- k X r + T R = I_o \alpha \quad - T + M g = M a$$

Pero la aceleración lineal que experimenta el cuerpo de masa M , se vincula con la aceleración angular según la ecuación $a = \alpha R$.

Reemplazando la aceleración en la segunda ecuación, se puede despejar la tensión T :

$$T = M (g - \alpha R)$$

Reemplazando los resultados en la ecuación de origen, se tiene:

$$- k r^2 \theta + M (g - \alpha R) R = I_o \alpha$$

Al agrupar y reemplazar el momento de inercia I_o , se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \left[\frac{2 k r^2}{R^2 (2 M + M_d)} \right] \theta = \frac{2 M g}{R [2 M + M_d]}$$

Resolviendo la ecuación homogénea (igual a cero), se determina que la frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{2 k r^2}{R^2 (2 M + M_d)}}$$

Finalmente la frecuencia lineal es:

$$f = \frac{1}{2 \pi} \sqrt{\frac{2 k r^2}{R^2 (2 M + M_d)}}$$

Problema 12. Para el sistema que se muestra en la figura, encuentre el periodo para oscilaciones pequeñas. Considere que la inercia de la varilla en torno al centro de masa es: $I_0 = M L^2 / 12$.

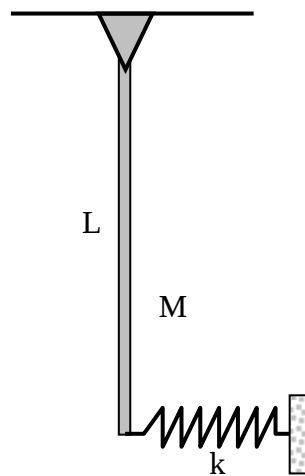
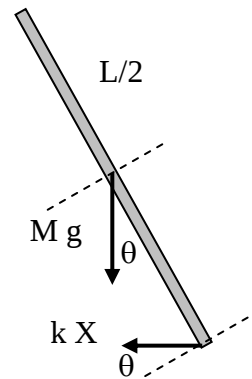


Diagrama cuerpo libre



Información de entrada.

La longitud de la barra es L .

La masa de la barra es M .

La constante elástica del resorte es k .

El momento de inercia de la barra con respecto del centro de masa es:
 $I_0 = M L^2 / 12$.

Análisis de la información.

De acuerdo con la información dada, el momento de inercia con respecto del eje de rotación se determina a partir del teorema de Steiner. ($I = I_0 + M d^2$)

$$I = I_0 + M L^2 / 4 = M L^2 / 3$$

Usando el hecho de que los torques generados por la fuerza elástica y el peso producen una aceleración angular del sistema, se obtiene la siguiente ecuación ($\tau = I \alpha$)

$$-M g \frac{L}{2} \sin \theta - k X L \cos \theta = I \alpha$$

Para ángulos pequeños se puede aproximar lo siguiente:

$X = L \sin \theta$; $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$, de acuerdo con esto, la ecuación anterior se reduce a:

$$-M g \frac{L}{2} \theta - k X L^2 \theta = I \alpha$$

Reemplazando el momento de inercia y la aceleración angular, se tiene:

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \left[\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{M} \right] \theta = 0$$

De lo cual, la frecuencia angular es:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{2L} + \frac{3k}{M}}$$

Finalmente el periodo de oscilación es:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2LM}{3(Mg + 2kL)}}$$

Problema 13 Un sistema oscilatorio masa-resorte tiene una energía mecánica de 0.18 [J], una amplitud de 19.84 [cm] y una velocidad máxima de 1.22 [m/s]. Encuentre la constante del resorte, la masa del bloque y la frecuencia de oscilación.

Información de entrada.

Energía total del sistema	$E_T = 0,18 \text{ [J]}$
Amplitud de la oscilación	$A = 19.84 \text{ [cm]}$
Velocidad máxima de la oscilación	$V_{MAX} = 1,22 \text{ [m/s]}$

Análisis de la información.

Para encontrar la constante del resorte, se puede usar la relación que vincula la energía total con la amplitud del movimiento, es decir:

$$\frac{1}{2} k A^2 = E_T$$

Despejando la constante k, se tiene:

$$k = \frac{2 E_T}{A^2}$$

Al reemplazar los valores, la constante k tiene un valor de $k = 9,146 \text{ [N/m]}$. Para hallar la masa del sistema sabemos que la frecuencia angular es:

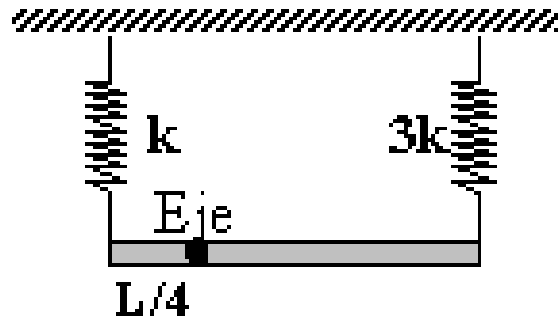
$$w = \frac{V_{MAX}}{A}$$

Cuyo valor es $w = 6,149 \text{ [Hz]}$. Utilizando este valor, se puede encontrar la masa del sistema masa resorte, es decir:

$$M = \frac{k}{w^2}$$

Reemplazando los valores de k y w, se encuentra que la masa tiene el valor $M = 0,242 \text{ [kg]}$.

Problema 14. La figura muestra una barra de masa $M = 8 \text{ [kg]}$ y cuyo largo es $L = 4.0 \text{ [m]}$, la barra se encuentra en equilibrio inicialmente y articulada en "O", de manera que puede oscilar en torno a ese punto si se saca de su posición de equilibrio. Determine el periodo de oscilación de la barra para el caso de oscilaciones pequeñas. Suponga un valor de $k = 2.0 \text{ [N/m]}$ y $g = 10 \text{ [m/s}^2\text{]}$.



Información de entrada.

La masa de la barra es:	$M = 8,0 \text{ [kg]}$
La longitud de la barra es:	$L = 4,0 \text{ [m]}$
El valor de k es:	$k = 2,0 \text{ [N/m]}$
La constante elástica del primer resorte es:	$k_1 = k$
La constante elástica del segundo resorte es:	$k_2 = 3 k$

Análisis de la información.

En esta situación los resortes y el peso de la barra ejercen torques con respecto del punto "O". Todos los torques son en la misma dirección, entrando al plano del papel; por lo cual se suman en forma escalar. Si se consideran ángulos θ pequeños, entonces es fácil ver que $\sin \theta \approx \theta$; $\cos \theta \approx 1$. Esto se traduce en que los desplazamientos lineales son:

$$S_1 = S_3 = L \theta / 4 \quad ; \quad S_2 = 3 L \theta / 4$$

Los torques de cada fuerza con respecto del punto "O" son:

$$\tau_1 = \frac{-L}{4} k \frac{L}{4} \theta \quad \tau_2 = \frac{-3L}{4} 3k \frac{3L}{4} \theta \quad \tau_3 = \frac{-L}{4} M g$$

Sumando los torques e igualando a $I \alpha$, donde I es el momento de inercia de la barra con respecto del eje de rotación y α es la aceleración angular, se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{-L}{4} k \frac{L}{4} \theta + \frac{-3L}{4} 3k \frac{3L}{4} \theta + \frac{-L}{4} M g &= I \alpha \\ \frac{-7 k L^2}{4} \theta + \frac{-L}{4} M g &= I \alpha \end{aligned}$$

El momento de inercia de la barra con respecto del punto "O" se determina usando el teorema de Steiner.

$$I = I_o + M (L/4)^2 = M L^2/12 + M L^2/16 = 7 M L^2/48$$

Reemplazando el momento de inercia en la última ecuación, se tiene:

$$\frac{-7 k L^2}{4} \theta + \frac{-L}{4} M g = \frac{7 M L^2}{48} \frac{d^2}{dt^2} \theta$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \theta + \frac{12 k}{M} \theta = \frac{-12 g}{7 L}$$

La frecuencia angular del sistema es:

$$\omega = \sqrt{\frac{12 k}{M}}$$

Reemplazando los valores para k y M, se encuentra que la frecuencia angular es $\omega = 1,732$ [Hz]. El periodo de oscilación del sistema es:

$$T = \frac{2 \pi}{\omega}$$

Cuyo valor es $T = 3,628$ [s]

Aplicación del principio de superposición al M.A.S.

Si se considera la situación en que sobre una masa M actúan únicamente fuerzas que son directamente proporcionales al desplazamiento pero de signo contrario, es decir, fuerzas de restauración, entonces es posible visualizar el movimiento final de una partícula como la suma de movimientos individuales dados por cada una de las fuerzas ejercidas, es decir,

$$\vec{F} = M\vec{a} = \sum_{j=1}^n -k_j \vec{X}_j$$

De la expresión anterior se deduce que para el caso de una dimensión:

$$-k_1 X_1 = M a_1 \quad ; \quad -k_2 X_2 = M a_2 \quad ; \dots ; \quad -k_j X_j = M a_j$$

Cada una de estas ecuaciones tiene una solución del tipo,

$$X_j(t) = A_j \cos (w_j t + \delta_j)$$

Es decir,

$$X = \sum_{j=1}^n X_j$$

Considere el caso de $n = 2$, es decir la superposición de dos movimientos armónicos simples que poseen la misma frecuencia.

$$X_1(t) = A_1 \cos (w t + \delta_1) \quad ; \quad X_2(t) = A_2 \cos (w t + \delta_2)$$

El desplazamiento del sistema será:

$$X_S(t) = A_1 \cos (w t + \delta_1) + A_2 \cos (w t + \delta_2)$$

Al desarrollar los cosenos se puede llegar algebraicamente a:

$$X_S(t) = A_1 \cos(wt) \cos(\delta_1) - A_1 \sin(wt) \sin(\delta_1) + A_2 \cos(wt) \cos(\delta_2) - A_2 \sin(wt) \sin(\delta_2)$$

$$X_S(t) = \cos(wt)[A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2)] - \sin(wt)[A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2)]$$

Se puede hacer un cambio de variable útil dado por:

$$[A_1 \sin(\delta_1) + A_2 \sin(\delta_2)] = A \sin \delta$$

$$[A_1 \cos(\delta_1) + A_2 \cos(\delta_2)] = A \cos \delta$$

Despejando A y δ de las expresiones anteriores, se obtiene:

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 A_1 A_2 \cos(\delta_2 - \delta_1)}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left[\frac{A_2 \sin \delta_2 + A_1 \sin \delta_1}{A_2 \cos \delta_2 + A_1 \cos \delta_1} \right]$$

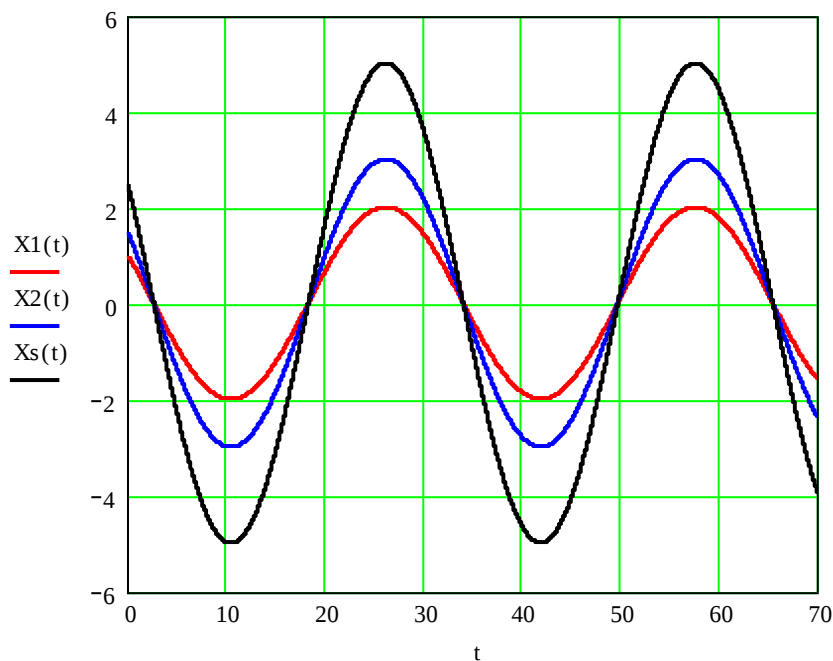
En estas condiciones el movimiento resultante será:

$$X_S(t) = A_1 \cos(\omega t + \delta_1) + A_2 \cos(\omega t + \delta_2) = A \cos(\omega t + \delta)$$

Considere como ejemplo la superposición de dos movimientos armónicos simples, representados por las funciones:

$$X_1(t) = 2 \cos(0,2 t + \pi/3) \quad ; \quad X_2(t) = 3 \cos(0,2 t + \pi/3)$$

Su representación gráfica será:



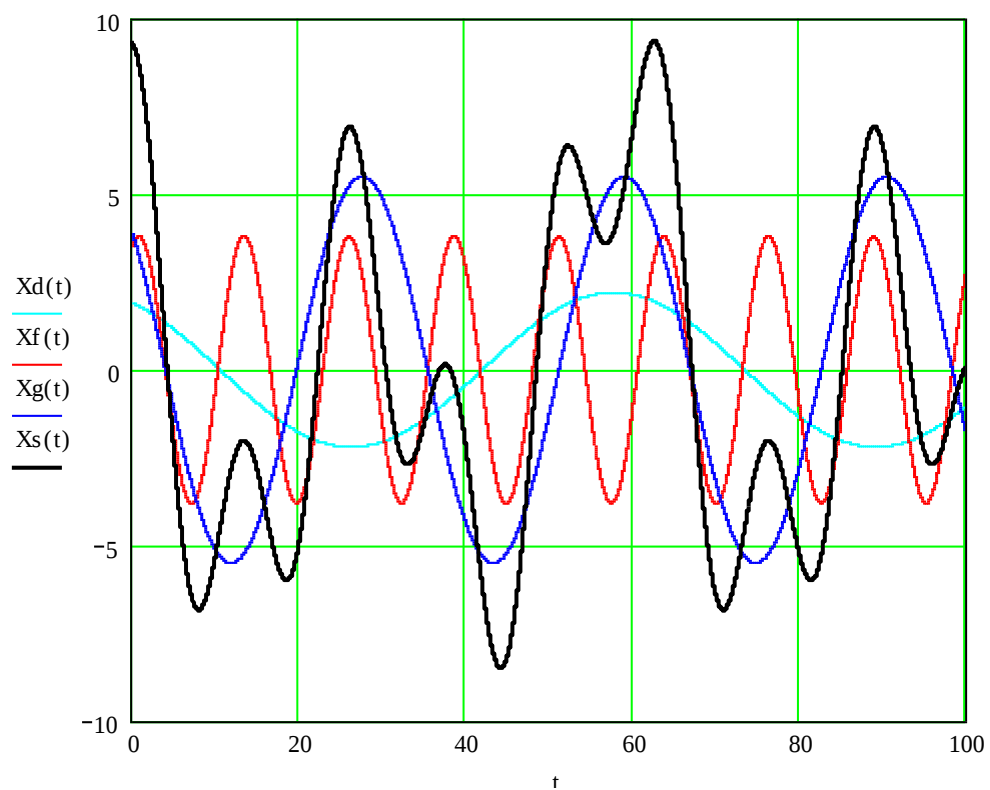
De la gráfica se ve claramente que la amplitud resultante es $A = 5$ [m]. Si se utiliza la ecuación para la amplitud verá que el resultado es el mismo.

Para el caso de tener amplitudes, frecuencias y fases distintas, la solución no es tan fácil y es probable que la respuesta analítica no se encuentre, pero la respuesta gráfica sí. Como segundo ejemplo suponga que se tienen tres movimientos armónicos simples dados por las siguientes funciones:

$$\begin{aligned}X_d &= 2,2 \cos\left(0,1 t + \frac{\pi}{6}\right) \\X_f &= 3,8 \cos\left(0,5 t - \frac{\pi}{8}\right) \\X_g &= 5,5 \cos\left(0,2 t + \frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

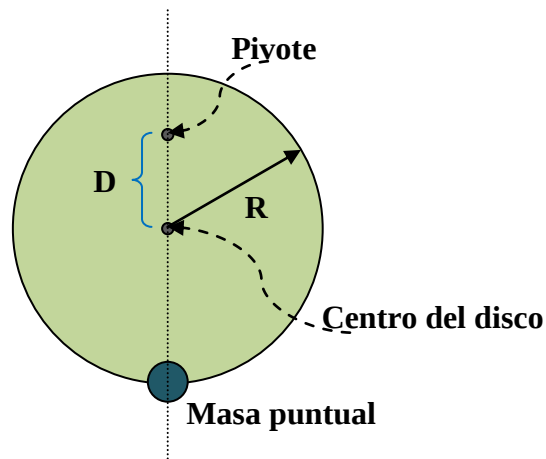
El desplazamiento del sistema será $X_S = X_d + X_f + X_g$.

A continuación se muestra la gráfica que representa cada movimiento y su movimiento total.

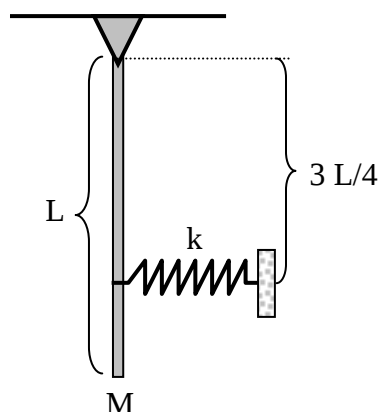


Ejercicios de pruebas y exámenes anteriores

1. Se observa que un objeto realiza un movimiento armónico simple con las siguientes características: En el instante inicial ($t = 0$) el objeto se encuentra a 1,5 [cm] de la posición de equilibrio y se mueve hacia la izquierda con una rapidez de 2,04 [cm/s]. Determine la amplitud y la fase inicial del movimiento. (06-03-2012)
2. Un péndulo físico consta de un disco sólido uniforme de masa $M = 650$ [g] y radio de $R = 16,0$ [cm], y una masa puntual $m = 120$ [g] en el borde inferior del disco como se muestra en la figura. Si se considera que la masa puntual tiene un radio despreciable comparado con el radio del Disco, y que el sistema está soportado en un plano vertical por un pivote situado a una distancia de $D = 12$ [cm] del centro del disco, determine el periodo de oscilación del sistema para ángulo pequeño. Considere el momento de inercia de un disco sólido en torno a su centro de masa como $I_0 = MR^2/2$ y el de una masa puntual $I = mr^2$. (06-03-2012)

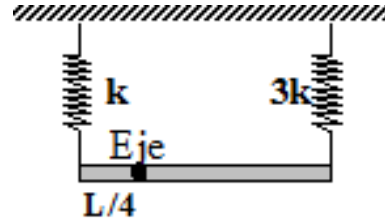


3. Para el sistema mostrado en la figura, determine la ecuación del movimiento, estableciendo la frecuencia angular de oscilación. Considere ángulos pequeños y que la inercia de la varilla en torno al centro de masa es $I_0 = M L^2/12$. (06-03-2012)



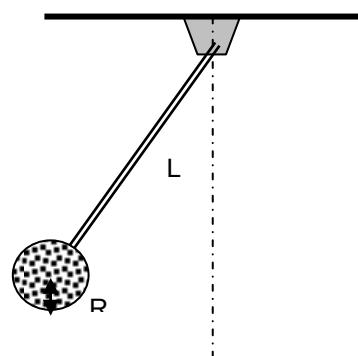
4. Un sistema oscilatorio masa-resorte tiene una energía mecánica de 0.18 [J], una amplitud de 19.84 [cm] y una velocidad máxima de 1.22 [m/s]. Encuentre la constante del resorte, la masa del bloque y la frecuencia de oscilación. (11-03-2011)

5. La figura muestra una barra de masa $M = 8$ [kg] y largo $L = 4.0$ [m], la barra se encuentra en equilibrio inicialmente y articulada en "O", de manera que puede oscilar en torno a ese punto si se saca de su posición de equilibrio. Determine el periodo de oscilación de la barra para el caso de oscilaciones pequeñas. Suponga un valor de $k = 2.0$ [N/m] y $g = 10$ [m/s²]. (11-03-2011)



6. Se cuelga de un resorte una masa de 280 [g] produciendo cierto estiramiento. Si luego se agrega una masa de 490 [g] el resorte se estira 70 [cm] más. Luego se saca la masa de 490 [g] y el sistema queda oscilando con MAS. Determine la constante del resorte y su frecuencia angular. (11-03-2011)
7. El modelo matemático para la aceleración de una partícula con movimiento armónico simple es la siguiente:
- $$a = 5,2 \cos(3,14 + 2,8 t)$$
- Donde "a" está dado en metros sobre segundos cuadrado y "t" en segundos. Determine la frecuencia del movimiento y encuentre además para $t = 2,5$ [s], su aceleración, rapidez y posición. (10-03-2010)

8. Un péndulo consta de un disco uniforme de 10,3 [cm] de radio y 488 [g] de masa unido a una barra de 52,4 [cm] de longitud que tiene una masa de 272 [g]. Determine el periodo de oscilación del sistema para ángulos pequeños. (10-03-2010)



9. Un objeto de 5,22 [kg] está unido a la parte inferior de un resorte vertical y es puesto a vibrar. La rapidez máxima del objeto es 15,3 [cm/s] y el periodo es de 645 [ms]. encuentre: La constante de fuerza del resorte, la amplitud del movimiento, la frecuencia de oscilación, la aceleración en los extremos. (10-03-2010)

Taller N°8.

Tema: MAA.

Objetivos:

- ✓ Establecer la ecuación general para un M.A.A.

Introducción.

En el movimiento armónico simple los límites del movimiento están igualmente espaciados a uno y otro lado de la posición de equilibrio, para obtener esta condición se despreciaron los efectos de las fuerzas disipativas. Si esta suposición fuese estricta, una masa suspendida de un resorte oscilaría con la misma amplitud indefinidamente.

Como es de conocimiento común, las oscilaciones reales después de un tiempo desaparecen, dado que todo sistema tiene inevitablemente ciertas características disipativas mediante las cuales se va perdiendo la energía mecánica de vibración. En realidad la amplitud disminuye poco a poco hasta que finalmente la masa llega al reposo, debido a las fuerzas de roce (estas fuerzas pueden provenir de la resistencia del aire o de fuerzas internas). A este tipo de movimiento se le llama **Movimiento Amortiguado**. Bajo condiciones especiales es posible que las fuerzas disipativas sean pequeñas y de origen a un **Movimiento Armónico Amortiguado**.

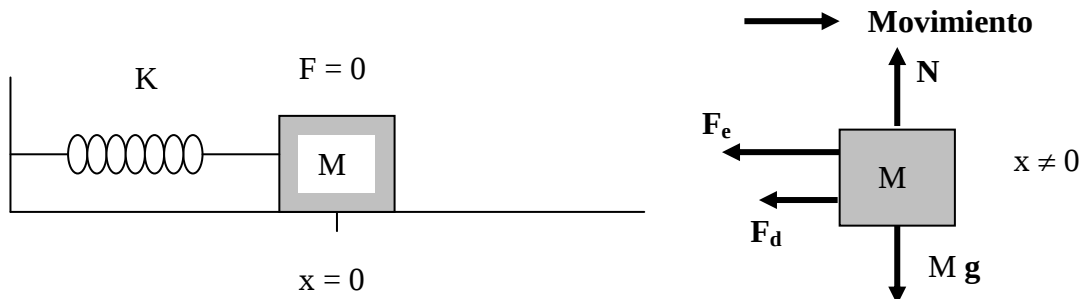
Conceptos Clave.

- Movimiento Armónico Amortiguado.

Actividad 1: “Movimiento armónico Amortiguado (M.A.A)”.

Si un péndulo oscila libremente, siempre termina deteniéndose porque las fuerzas de rozamiento disminuyen su energía mecánica. Un movimiento con estas características se denomina movimiento **amortiguado**. Si el amortiguamiento es muy grande, como por ejemplo el caso de un péndulo que oscila en aceite, el oscilador no alcanza a ejecutar una oscilación completa, sino que se mueve hacia la posición de equilibrio con una velocidad que se aproxima a cero cuando el objeto se acerca a dicha posición de equilibrio. Este tipo de movimiento se denomina **Sobreamortiguado**. Si, en cambio, el amortiguamiento del movimiento es débil, de modo que la amplitud decrece lentamente con el tiempo, como le ocurre a un niño que se divierte en un columpio de un parque cuando su madre deja de empujarle, el movimiento resultante se denomina **Subamortiguado o Bajoamortiguado**. Cuando se tiene una compensación del efecto restaurador con el efecto disipador, se produce el amortiguamiento mínimo para que se produzca un movimiento no oscilatorio, se dice que el sistema está **Amortiguado críticamente**. (Cualquier amortiguamiento inferior produce un movimiento subamortiguado).

Para analizar los movimientos disipativos, consideremos un sistema masa resorte que se encuentra afecto tanto a una fuerza elástica ($F_e = -k X$) como a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad pero con dirección opuesta a la dirección del movimiento. ($F_d = -b V$)



Del diagrama de cuerpo libre es posible encontrar las siguientes ecuaciones dinámicas:

$$F_e + F_d = M a$$

$$N - M g = 0 \quad \rightarrow \quad N = M g$$

Usando el hecho de que la fuerza elástica es $F_e = -k X$ (Ley de Hooke), la fuerza disipativa $F_d = -b V$ y que la aceleración corresponde a la segunda derivada de la posición con respecto del tiempo, se logra:

$$M \frac{d^2 X}{dt^2} + b \frac{dX}{dt} + k X = 0$$

$$\frac{d^2 X}{dt^2} + \frac{b}{M} \frac{dX}{dt} + \frac{k}{M} X = 0$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de primer grado y segundo orden, la cual tiene tres tipos de solución, según sea el efecto disipativo menor, igual o mayor que el efecto restaurador. Cada caso define las oscilaciones Bajo amortiguada, Críticamente amortiguada y Sobre amortiguada respectivamente.

La única solución que consideraremos aquí es aquella que representa efectos disipativos pequeños y que dan origen a oscilaciones armónicas amortiguadas. La solución para dichas oscilaciones es:

$$X(t) = A_0 e^{\frac{-b}{2M}t} \cos(\omega t + \delta)$$

En esta expresión, se considera que la amplitud del movimiento decrece exponencialmente con el tiempo según la expresión:

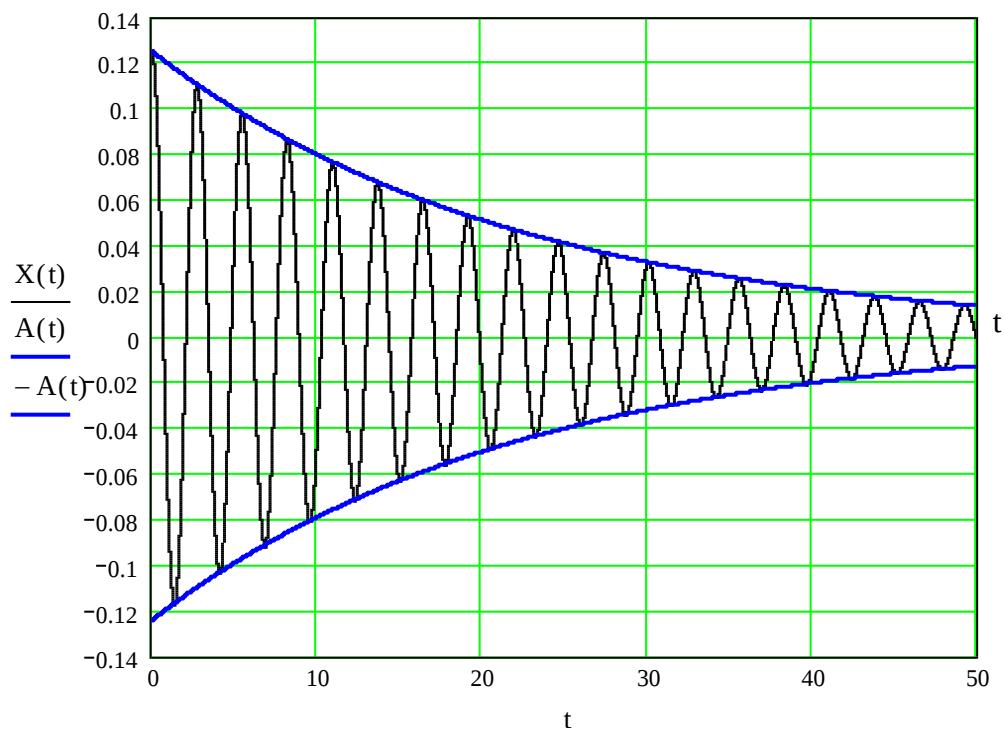
$$A(t) = A_0 e^{\frac{-b}{2M}t}$$

La frecuencia de oscilación del movimiento difiere de la frecuencia natural (sin disipación) según la expresión:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4M^2}}$$

Actividad 2: “x = x(t)”.

- Grafique la expresión obtenida para el M.A.A.
- Muestre en el gráfico las componentes de la ecuación del M.A.A.
- Establezca las conclusiones correspondientes.
- Compare sus resultados con la gráfica siguiente.



La curva azul representa la amplitud de la oscilación y refleja la envolvente de la curva cosenoidal.

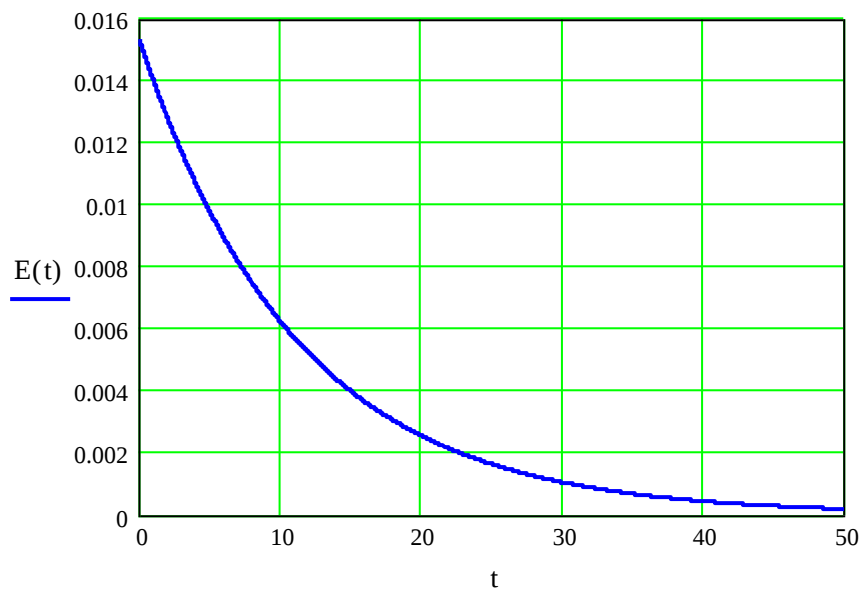
Note que la frecuencia disminuye respecto de la frecuencia natural de oscilación del sistema.

Actividad 3: “Energía del Movimiento Sub-amortiguado”.

Un sistema que cumple con la ecuación anterior se dice que está amortiguado linealmente. Encuentre la energía mecánica total del sistema y compruebe que está decrece según la expresión:

$$E(t) = \frac{1}{2} k A(t)^2 = \frac{1}{2} k A_o^2 e^{\frac{-b}{M} t} = E_o e^{\frac{-b}{M} t}$$

La gráfica que representa el comportamiento de la energía mecánica es del tipo:



$\tau = M/b$ es el tiempo de extinción o constante de tiempo. La constante de tiempo es el tiempo necesario para que la energía disminuya en un factor “e”.

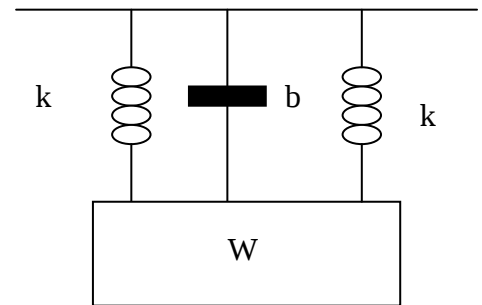
Actividad 4: “Ejemplo”.

Dado el siguiente sistema amortiguado, hallar:

- A) La frecuencia natural del sistema.
- B) El coeficiente de amortiguamiento.

La velocidad para $t = 0$ es 1,2 [m/s], hallar:

- C) La amplitud.
- D) La elongación para un tiempo “t”.
- E) La velocidad para un tiempo “t”.



DATOS: $b = 149$ [Ns/m]; $k = 178$ [N/m]; $W = 178$ [N]

Resp: (a) $\omega_0 = (2K/m)^{0,5}$; (b) 4,1 rad/s; (c) -0,3 m.

Actividad 5: “Tarea”.

6.1. Averigüe acerca de los diferentes tipos de amortiguamiento, graficando e indicando las condiciones para que se produzcan.

6.2. ¿Cuándo ocurre resonancia? De un ejemplo.

Actividad 6: “Bibliografía”.

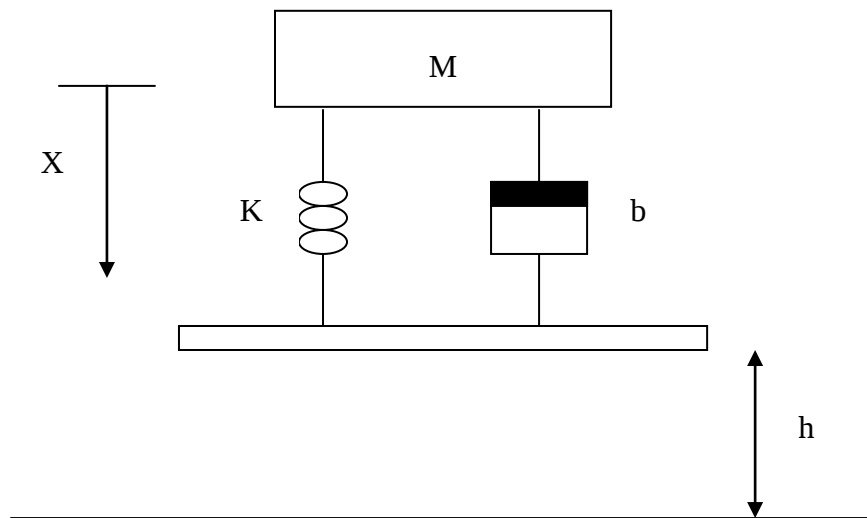
- ✓ Halliday, Resnick, Walker-Física Vol 1- Cáp 17- Editorial CECSA-2001.
- ✓ Tipler-Física, conceptos y aplicaciones-Cáp 14-Editorial M^cGraw Hill-01.
- ✓ Sears, Zemansky, Young, Freedman-Física-Vol 1-Cáp 13-Editorial Pearson Educación.
- ✓ Tipler, Mosca. Física para la Ciencia y la Tecnología. Vol 1. Cáp 14. Editorial Reverte.

Guía de Ejercicios. Tema: M.A.A.

Prob.1. Un péndulo simple tiene un período de 2 [s], y una amplitud de 2° . Después de 10 oscilaciones completas su amplitud se ha reducido a $1,5^\circ$. Encuentre el coeficiente de amortiguamiento " γ ".

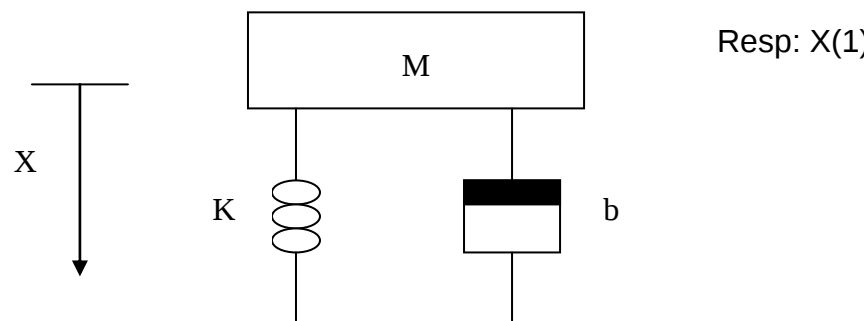
Resp: 0,014 [1/s]

Prob.2. Si el sistema mostrado en la figura, se suelta desde una altura " h " sobre una superficie dura, ¿cuál será el movimiento resultante de la masa " m "?



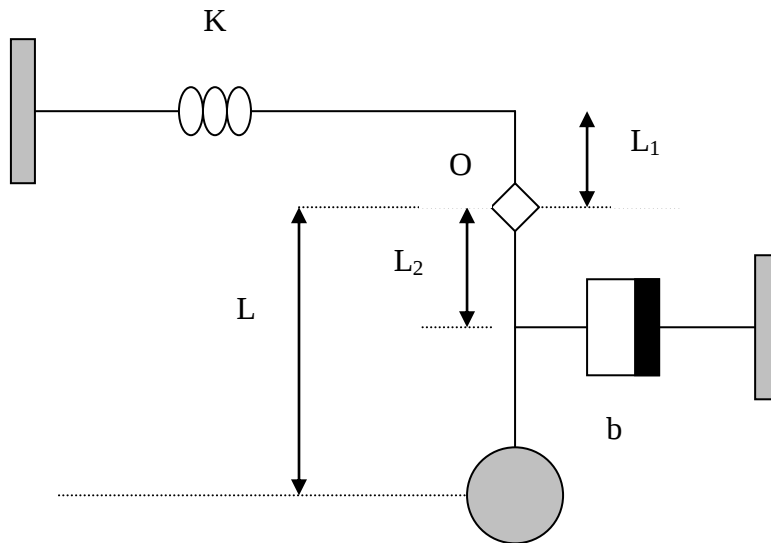
Resp: $X(t) = -[(2gh)^{0,5} \cdot e^{-\gamma t} \cos(\omega t + \pi/2)]/\omega$

Prob.3. Una masa de 50 [Lbf] reposa sobre un resorte de 25 [Lbf/pulg] y un amortiguador de 0,75 [Lbf/pulg] como se muestra en la figura. Si se aplica una velocidad de 4 [pulg/s] a la masa en su posición de reposo, ¿cuál será el desplazamiento al final del primer segundo?



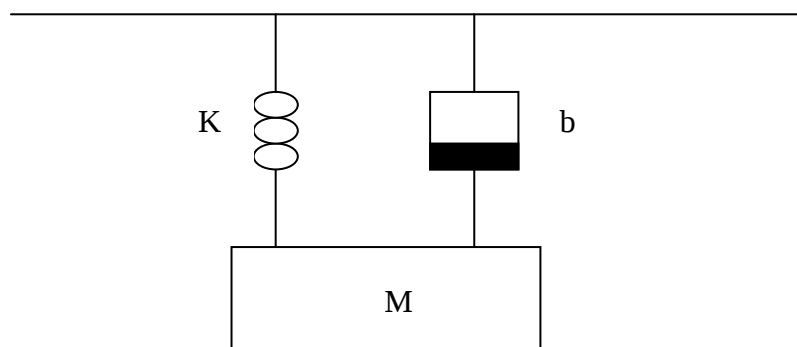
Resp: $X(1) = -0,015$ [pulg]

Prob.4. Un péndulo simple está pivoteado en el punto "O", como se muestra en la figura. Si la masa de la varilla es despreciable y las oscilaciones pequeñas, encuentre la frecuencia natural amortiguada del péndulo.



$$\text{Resp: } w_a = [((KL_1^2 + mgL)/I)^2 - ((bL^2)/2I)^2]^{0,5}$$

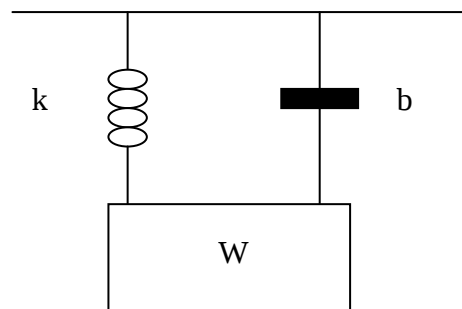
Prob.5. Se observa que la amplitud de vibración del sistema mostrado en la figura decrece hasta un 25% del valor inicial, después de cinco ciclos consecutivos. Determine el coeficiente de amortiguamiento del sistema si $K = 20$ [Lbf/pulg] y $W = 10$ [Lbf].



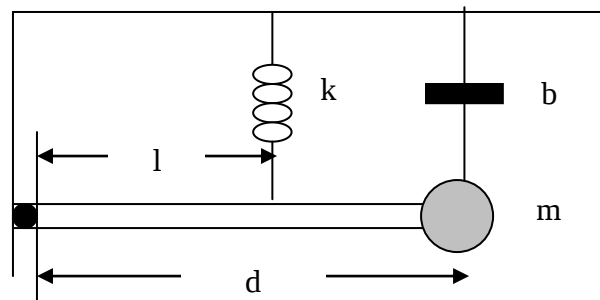
$$\text{Resp: } b = 0,065 \text{ [Lbfs/pulg]}$$

Prob.6. Halle la frecuencia del sistema AMORTIGUADO.

DATOS: $b = 100 \text{ [Ns/m]}$; $k = 100 \text{ [N/m]}$; $W = 100 \text{ [N]}$



Prob.7. El sistema mostrado en la figura consiste en una varilla uniforme de masa “ $2m$ ” con una masa puntual “ m ” en su extremo y un resorte de constante “ K ”. Si el sistema se encuentra inicialmente en equilibrio y luego se lo perturba, calcular el período de oscilación para amplitudes pequeñas. Considere $I_{CM} = ML^2/12$ y $l = 3d/4$.



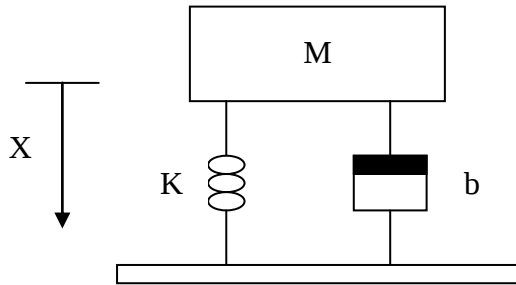
Resp: $\omega_0 = 3/2[K/5m]^{0,5}$

Prob.8. Un oscilador armónico amortiguado consta de un bloque $M = 2.0 \text{ kg}$, un resorte de constante elástica $k = 14 \text{ N/m}$ y una fuerza de amortiguamiento proporcional a la velocidad. Si la amplitud del movimiento es 28 cm y después de cuatro ciclos la amplitud disminuye a tres cuartas partes de su valor inicial. ¿qué tipo de movimiento amortiguado es? ¿Cuál es el valor del coeficiente de viscosidad?

Prob.9. En un oscilador amortiguado, la masa del sistema que oscila es 1620 g , la constante del resorte 81 N/m y el coeficiente de viscosidad 0.162 kg/s . ¿Qué tipo de movimiento amortiguado es? ¿Cuántos periodos de oscilación son necesarios para que la energía mecánica se reduzca a $1/4$ de su valor inicial?

Prob.10. Un oscilador armónico amortiguado consta de un bloque de masa 2.0 kg , un resorte $k = 12.0 \text{ N/m}$. Inicialmente, oscila con una amplitud de 26.0 cm ; a causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye a tres cuartas partes de este valor inicial después de cuatro ciclos completos. ¿Cuánta energía se ha perdido durante esos 4 ciclos?

Prob.11. La Fragata Blanco posee en su propulsión montajes antivibracionales que permiten disipar el ruido para no ser detectados por naves enemigas. Se adjunta un esquema del montaje con los siguientes datos: $b = 149 \text{ [Ns/m]}$; $k = 178 \text{ [N/m]}$; $W = 178 \text{ [N]}$. Determine la frecuencia de amortiguación del sistema e indique el tipo de amortiguación del que se trata. (05-04-2012)



Prob.12. Un oscilador armónico bajo amortiguado consta de un bloque de masa desconocida y tres resortes como se muestra en la figura. Los resortes tienen constantes elásticas $k_1 = 2.0 \text{ N/m}$, $k_2 = 4.0 \text{ N/m}$, $k_3 = 6.0 \text{ N/m}$. Si se sabe que la frecuencia angular de oscilación es 10 [Hz] , y que después de 10 oscilaciones la amplitud corresponde a A_0/e^2 , siendo A_0 la amplitud inicial, determine la masa del sistema.

Prob.13. Un péndulo físico se forma con un disco de masa $M = 10 \text{ [kg]}$ y radio $R = 1.0 \text{ [m]}$. Una masa puntual m que se ubica en el centro del disco permite cambiar el periodo del disco. ¿Cuál debe ser el valor de esta masa, si el periodo de oscilación es 4 [s] .

Bibliografía.

- ✓ Halliday, Resnick, Walker-Física Vol 1- Pág 17- Editorial CECSA-2001.
- ✓ Tiplers-Física, conceptos y aplicaciones-Pág 14-Editorial McGraw Hill-01.
- ✓ Sears, Zemansky, Young, Freedman-Física-Vol 1-Pág 13-Editorial Pearson Educación.