

Guía 2 2 IM

Profesor: Sergio Yansen Núñez

1. Sea $f :]-\infty, 2] \dashrightarrow [-1, +\infty[$

tal que $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

2. Sea $f : [-2, +\infty[\dashrightarrow [-1, +\infty[$

tal que $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

3. Sea $f :]-\infty, 2] \dashrightarrow]-\infty, 1]$

tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

4. Sea $f : [3, +\infty[\dashrightarrow [0, +\infty[$

tal que $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

5. Sea $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + 2|x|$$

Determine si f tiene inversa. En caso de no tener inversa, determine restricciones para que tenga. Obtenga la inversa de la función obtenida.

6. Sea $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{|x - 1| + 1}$$

Determine si f tiene inversa. En caso de no tener inversa, determine restricciones para que tenga. Obtenga la inversa de la función obtenida.

Solución:

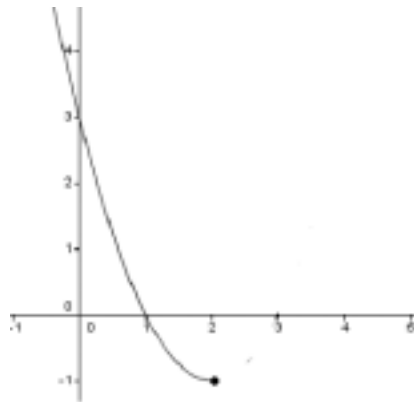
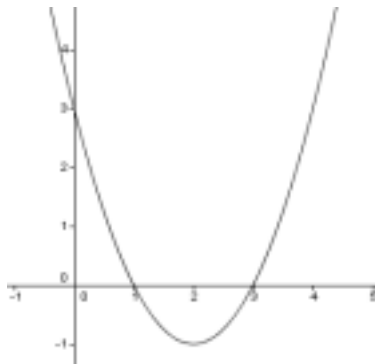
1. Sea $f :]-\infty, 2] \rightarrow [-1, +\infty[$

tal que $f(x) = x^2 - 4x + 3$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

Solución:

Graficando



f es inyectiva, pues toda recta horizontal corta al gráfico de f en a lo más un punto.

f es epiyectiva pues $\text{Rec}f = [-1, +\infty[= \text{Codom}f$

f es biyectiva

luego, existe f^{-1}

$$y = x^2 - 4x + 3$$

$$y = (x - 2)^2 - 1$$

$$y + 1 = (x - 2)^2$$

$$-\sqrt{y + 1} = x - 2, \text{ pues } x \leq 2$$

$$x = 2 - \sqrt{y + 1}$$

$$f^{-1} : [-1, +\infty[\dashrightarrow]-\infty, 2]$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{x + 1}$$

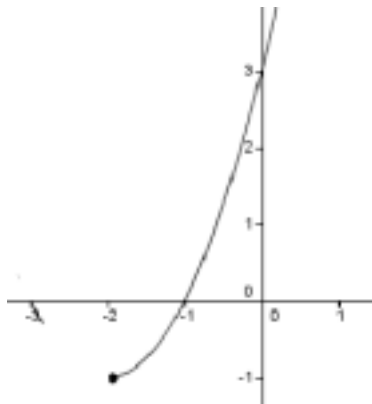
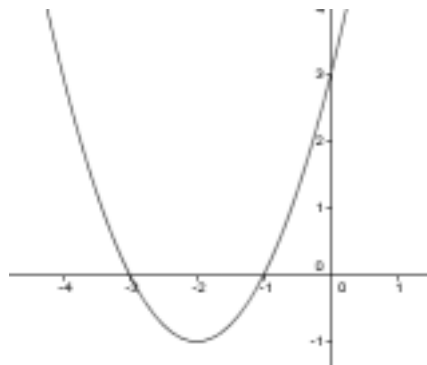
2. Sea $f : [-2, +\infty[\dashrightarrow [-1, +\infty[$

tal que $f(x) = x^2 + 4x + 3$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

Solución:

$$y = (x + 2)^2 - 1$$



f es inyectiva, pues toda recta horizontal corta al gráfico de f en a lo más

un punto.

f es epiyectiva pues $\text{Rec}f = [-1, +\infty[= \text{Codom}f$

f es biyectiva

luego, existe f^{-1}

$$y = (x + 2)^2 - 1$$

$$y + 1 = (x + 2)^2$$

$$\sqrt{y + 1} = x + 2 \text{ pues } x \geq -2$$

$$x = -2 + \sqrt{y + 1}$$

$$f^{-1} : [-1, +\infty[\dashrightarrow [-2, +\infty[$$

$$f^{-1}(x) = -2 + \sqrt{x + 1}$$

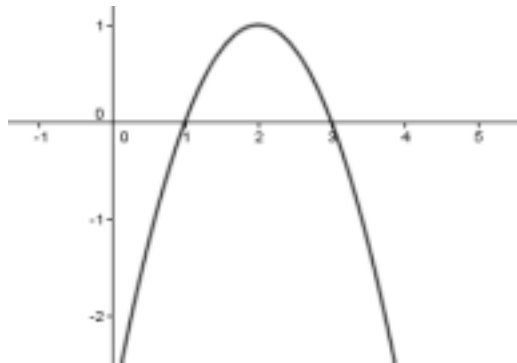
3. Sea $f :]-\infty, 2] \dashrightarrow]-\infty, 1]$

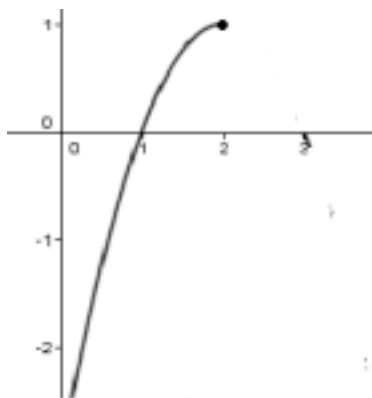
tal que $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

Solución:

$$f(x) = -((x - 2)^2 - 1)$$





f es inyectiva, pues toda recta horizontal corta al gráfico de f en a lo más un punto.

f es epiyectiva pues $\text{Rec}f =]-\infty, 1] = \text{Codom}f$

f es biyectiva

luego, existe f^{-1}

$$y = -((x-2)^2 - 1)$$

$$-y = (x-2)^2 - 1$$

$$1 - y = (x-2)^2$$

$$-\sqrt{1-y} = x-2 \text{ pues } x \leq 2$$

$$x = 2 - \sqrt{1-y}$$

$$f^{-1} :]-\infty, 1] \dashrightarrow]-\infty, 2]$$

$$f^{-1}(x) = 2 - \sqrt{1-x}$$

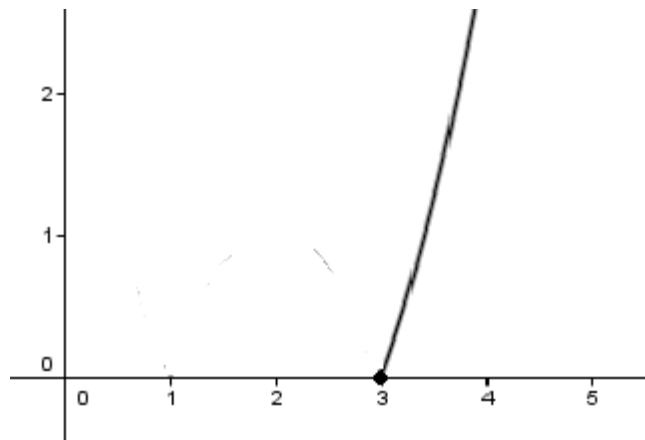
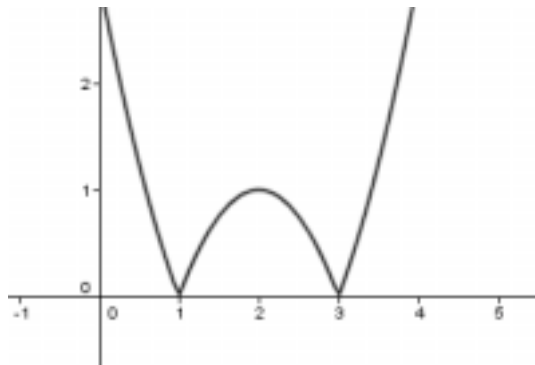
4. Sea $f : [3, +\infty[\dashrightarrow [0, +\infty[$

tal que $f(x) = |x^2 - 4x + 3|$

Determine f^{-1} , en caso de existir.

Solución:

$$f(x) = |(x-2)^2 - 1|$$



f es inyectiva, pues toda recta horizontal corta al gráfico de f en a lo más un punto.

f es epiyectiva pues $\text{Rec}f = [0, +\infty[= \text{Codom}f$

f es biyectiva

luego, existe f^{-1}

$$y = |(x-2)^2 - 1|$$

$$y = (x-2)^2 - 1 \text{ pues } (x-2)^2 - 1 \geq 0 \text{ para } x \geq 3$$

$$y+1 = (x-2)^2$$

$$\sqrt{y+1} = x-2 \text{ pues } x \geq 3$$

$$x = 2 + \sqrt{y+1}$$

$$f^{-1} : [0, +\infty[\dashrightarrow [3, +\infty[$$

$$f^{-1}(x) = 2 + \sqrt{x+1}$$

5. Sea $f : \mathbb{R} \dashrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = x^2 + 2|x|$$

Determine si f tiene inversa. En caso de no tener inversa, determine restricciones para que tenga. Obtenga la inversa de la función obtenida.

Solución:

para $x < 0$, $f(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1$

graficando $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 1)^2 - 1$

se obtiene:



para $x \geq 0$, $f(x) = x^2 + 2x = (x + 1)^2 - 1$

graficando $y = x^2$, $y = (x + 1)^2$, $y = (x + 1)^2 - 1$

se obtiene:

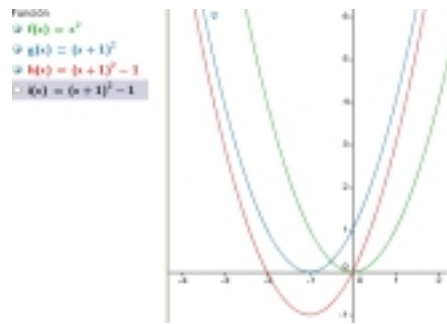
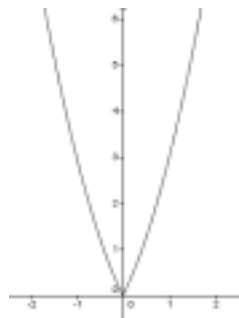


Gráfico de f



f no es inyectiva y no es epiyectiva

$$\text{Rec}f = [0, +\infty[$$

Sea g una función biyectiva obtenida a partir de f

$g : [0, +\infty[\dashrightarrow [0, +\infty[$ definida por

$$g(x) = x^2 + 2x, \text{ es biyectiva}$$

$$y = x^2 + 2x = (x+1)^2 - 1$$

$$y+1 = (x+1)^2$$

$$\sqrt{y+1} = x+1$$

$$x = \sqrt{y+1} - 1$$

$$g^{-1} : [0,+\infty[\dashrightarrow [0,+\infty[\quad , \quad g^{-1}(x) = \sqrt{x+1} - 1$$

6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{|x-1|+1}$$

Determine si f tiene inversa. En caso de no tener inversa, determine restricciones para que tenga. Obtenga la inversa de la función obtenida.

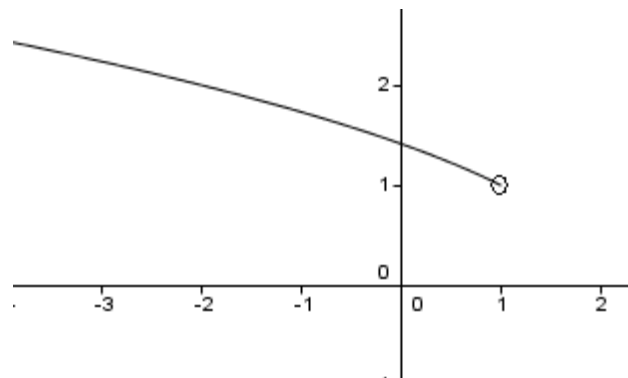
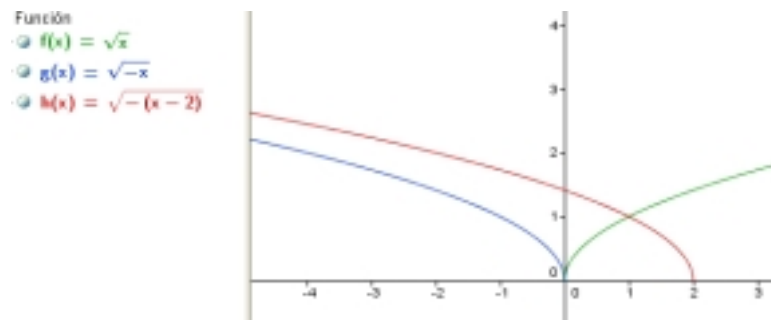
$$f(x) = \sqrt{|x-1|+1}$$

para $x < 1$, $f(x) = \sqrt{-(x-1)+1} = \sqrt{-x+2}$

$$= \sqrt{-(x-2)}$$

graficando $y = \sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = \sqrt{-(x-2)}$

se obtiene:



para $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{x-1+1} = \sqrt{x}$

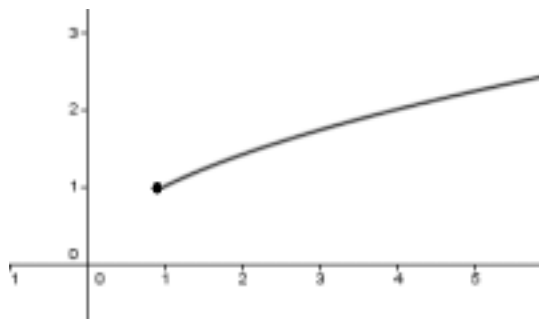
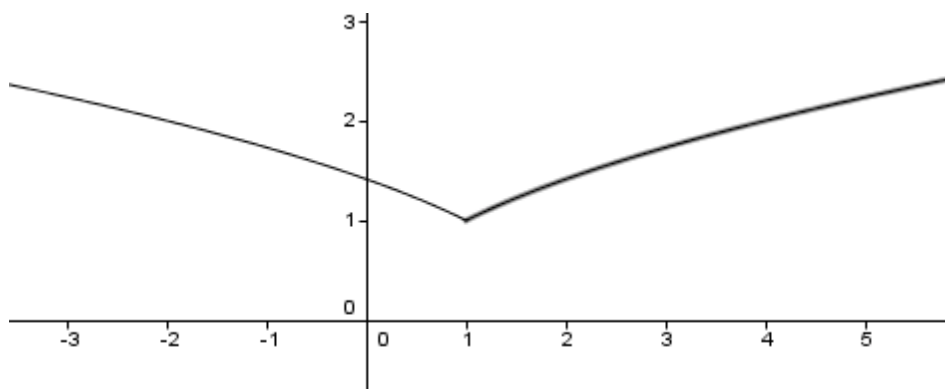


Gráfico de f



f no es inyectiva y no es epiyectiva

$$\text{Rec}f = [1, +\infty[$$

Sea g una función biyectiva obtenida a partir de f

$g : [1, +\infty[\dashrightarrow [1, +\infty[$ definida por

$$g(x) = \sqrt{x - 1 + 1} = \sqrt{x}, \text{ es biyectiva}$$

$$y = \sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = y^2$$

$$g^{-1} : [1, +\infty[\dashrightarrow [1, +\infty[\quad , \quad g^{-1}(x) = x^2$$