



EXAMEN
MATEMÁTICAS III

NOMBRE: _____ N° CAD. _____ CURSO: 3°EJ _____.

1. **DOCENTE(S):** S. Baquedano, C. Hardy, A. Rauch.
2. **FECHA:** 26 NOVIEMBRE 2024.
3. **UNIDAD(ES) TEMÁTICA(S):** Integral indefinida - Integral definida - Aplicaciones
4. **TIEMPO:** 120 minutos
5. **PUNTAJE TOTAL - PUNTAJE PARA APROBAR:** 100 puntos – 60 puntos
6. **MATERIALES:** de escritorio, calculadora no algebraica.
7. **INDICACIONES:**
 - Lea cuidadosamente cada pregunta o problema propuesto, efectuando un análisis cuidadoso de la interrogante planteada.
 - Utilice lápiz pasta azul o negro. **Si escribe con lápiz grafito pierde derecho a corrección.**
 - **No se puede usar corrector. Si se equivoca, tache el error.**
 - Resuelva su prueba en forma ordenada, respetando la secuencia lógica que acompaña el desarrollo de un problema matemático.
 - Conteste todo en las hojas destinadas para responder.

8. **RESULTADOS OBTENIDOS:**

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	30	
2	18	
3	18	
4	17	
5	17	
Puntaje total	100	
	NOTA	



Capacidad : Razonamiento Lógico.

Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y reglas de integración.

Contenido : Reglas básicas de integración. Métodos de integración.

PREGUNTA N°1 (30 puntos: 6 – 8 – 8 – 8)

Resolver las siguientes integrales indefinidas:

$$\begin{aligned} \text{a) } \int x^2(x^2 - 4) dx &= \int (x^4 - 4x^2) dx \\ &= \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3} + C // \end{aligned}$$

$$\text{b) } \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx \quad \begin{aligned} u &= \sqrt{x} \\ du &= \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int e^u du &= e^u + C \\ &= e^{\sqrt{x}} + C \end{aligned}$$



c) $\int x e^{8x} dx$

$u = x$
 $du = dx$

$dv = e^{8x} dx$
 $v = \frac{e^{8x}}{8}$

$$\begin{aligned} \int x \cdot e^{8x} dx &= x \cdot \frac{e^{8x}}{8} - \int \frac{e^{8x}}{8} dx \\ &= \frac{x e^{8x}}{8} - \frac{1}{8} \int e^{8x} dx \\ &= \frac{x e^{8x}}{8} - \frac{1}{8} \cdot \frac{e^{8x}}{8} + C \\ &= \frac{x e^{8x}}{8} - \frac{1}{64} e^{8x} + C \end{aligned}$$

d) $\int \frac{7x - 13}{(x - 3)(x + 1)} dx$

$$\frac{7x - 13}{(x - 3)(x + 1)} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x + 1} \quad | (x - 3)(x + 1)$$

$$7x - 13 = A(x + 1) + B(x - 3)$$

Si $x = -1$
 $-20 = -4B$
 $B = 5$

Si $x = 3$
 $8 = 4A$
 $A = 2$

$$\begin{aligned} \int \frac{7x - 13}{(x - 3)(x + 1)} dx &= \int \frac{2}{x - 3} dx + \int \frac{5}{x + 1} dx \\ &= 2 \ln|x - 3| + 5 \ln|x + 1| + C \end{aligned}$$



Capacidad	: Razonamiento Lógico.
Objetivo	: Aplicar teoremas y propiedades en el cálculo de integrales definidas
Contenido	: Integral definida

PREGUNTA N°2 (18 puntos)

Calcular $\int_1^5 f(x) dx$

Donde $f(x) = \begin{cases} 2 & ; 0 \leq x < 2 \\ |x-3| & ; x \geq 2 \end{cases}$

$$|x-3| = \begin{cases} -(x-3); & x < 3 \\ x-3; & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\int_1^5 f(x) dx = \int_1^2 2 dx + \int_2^3 (-x+3) dx + \int_3^5 (x-3) dx$$

$$= (2x) \Big|_1^2 + \left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_2^3 + \left(\frac{x^2}{2} - 3x \right) \Big|_3^5$$

$$= (4-2) + \left(-\frac{9}{2} + 9 \right) - \left(-2 + 6 \right) + \left(\frac{25}{2} - 15 \right) - \left(\frac{9}{2} - 9 \right)$$

$$= 2 + \frac{9}{2} - 4 + -\frac{5}{2} + \frac{9}{2}$$

$$= 2 + \frac{1}{2} + 2$$

$$= \frac{5}{2} //$$



Capacidad : Razonamiento Lógico.

Objetivo : Aplicar la integral definida en la resolución de problemas de áreas de curvas definidas en coordenadas rectangulares.

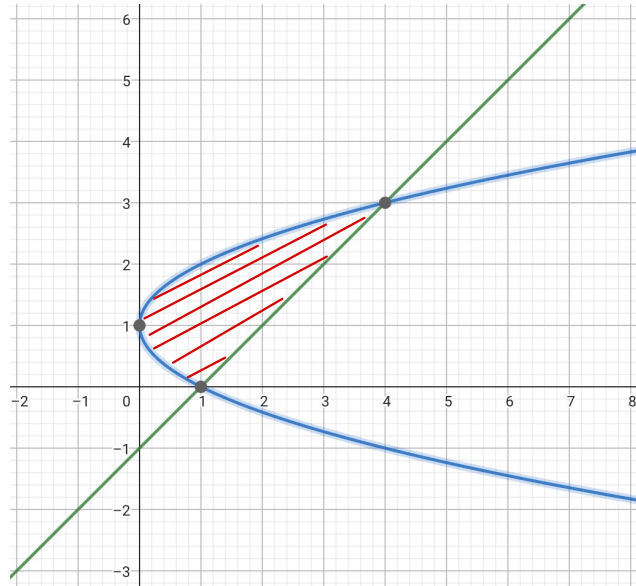
Contenido : Área entre curvas.

PREGUNTA N°3 (18 puntos)

Grafique, achure y calcule, mediante integrales, el área de la región limitada por las curvas:

$$x = y + 1$$

$$x = y^2 - 2y + 1$$



Ptos. $\cap$

$$y^2 - 2y + 1 = y + 1$$

$$y^2 - 3y = 0$$

$$y(y - 3) = 0$$

$$y = 0 \quad \vee \quad y = 3$$

$$A = \int_0^3 [y + 1 - (y^2 - 2y + 1)] dy$$

$$A = \int_0^3 (-y^2 + 3y) dy = \left(-\frac{y^3}{3} + \frac{3y^2}{2} \right) \Big|_0^3$$

$$A = -9 + \frac{27}{2} = \frac{9}{2} \text{ u}^2 //$$



Capacidad : Razonamiento Lógico. Resolver Problemas.
Objetivo : Formular un plan de trabajo al resolver problemas que involucren aplicaciones de la integral.

Contenido : Problemas de aplicación.

PREGUNTA N°4 (17 puntos)

Un cuerpo tiene una temperatura de 70°F y es depositado en un lugar que tiene una temperatura de 30°F , después de 4 minutos la temperatura del cuerpo es de 50°F .

- Encontrar la expresión para la temperatura del cuerpo en función del tiempo.
- Calcular la temperatura del cuerpo a los 5 minutos
- Calcular el tiempo que demora en alcanzar una temperatura de 35°F

$$\begin{aligned} T(0) &= 70^{\circ}\text{F} \\ T_A &= 30^{\circ}\text{F} \\ T(4) &= 50^{\circ}\text{F} \end{aligned}$$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_A)$$

$$\frac{dT}{dt} = K(T - 30)$$

$$\frac{dT}{T-30} = K dt \quad \int$$

$$\int \frac{dT}{T-30} = \int K dt$$

$$\ln|T-30| = Kt + C \quad |e$$

$$T-30 = e^{Kt+C}$$

$$T-30 = e^{Kt} \cdot e^C$$

$$T = C_1 e^{Kt} + 30$$

$$\begin{aligned} \text{Si } t &= 0 \\ 70 &= C_1 \cdot e^0 + 30 \\ C_1 &= 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Si } t &= 4 \\ 50 &= 40 e^{4K} + 30 \\ 20 &= 40 e^{4K} \\ \frac{1}{2} &= e^{4K} \quad | \ln \end{aligned}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 4K$$

$$K = -0,1733$$

$$a) T(t) = 40 e^{-0,1733t} + 30$$

$$\begin{aligned} b) T(5) &= 40 \cdot e^{-0,1733 \cdot 5} + 30 \\ T(5) &= 46,8168^{\circ}\text{F} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) 35 &= 40 \cdot e^{-0,1733t} + 30 \\ t &\approx 11,999 \text{ min} \end{aligned}$$



Capacidad Evaluada: Razonamiento lógico. Resolver problemas.

Objetivo: Formular un plan de trabajo al resolver problemas que involucren aplicaciones de la derivada.

Contenido: Problemas de aplicación de derivadas, razón de cambio.

PREGUNTA N°5 (17 puntos)

Un globo esférico está siendo inflado de modo que su volumen aumenta a razón de $4 \left[\frac{m^3}{min} \right]$.

¿Con qué rapidez aumenta su diámetro, cuando este tiene $15 [m]$?

Considere $V_{esfera} = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}$$

$$D = 2R$$

$$\frac{dD}{dt} = ? \quad \Big|_{D=15}$$

$$R = \frac{D}{2}$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^3$$

$$V = \frac{4}{3} \pi \frac{D^3}{8}$$

$$V = \frac{\pi}{6} D^3 \quad \Big| \frac{d}{dt}$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{3\pi}{6} D^2 \cdot \frac{dD}{dt}$$

$$4 = \frac{\pi}{2} \cdot 15^2 \cdot \frac{dD}{dt}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{8}{225\pi} \approx 0,011$$

R: El diámetro aumenta a razón de $0,011 \text{ m/min}$