

GUÍA ESTUDIO PRUEBA 3 CÁLCULO INTEGRAL

1. Analizar la convergencia de las siguientes integrales impropias:

a. $\int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$

b. $\int_0^3 \frac{1}{x\sqrt{x}} dx$

2. Expresar, sin resolver, el análisis de convergencia de la siguiente integral impropia:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{(x-2)(x-5)} dx$$

3. Encontrar, si es posible, la suma de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n} =$ (Sol: 1/7)

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{\sqrt{n-1}} =$ (Sol: No es posible, la serie diverge)

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{-\sqrt{n}} - e^{-\sqrt{n-1}} \right) =$ (Sol: -1)

4. Analizar la convergencia de las siguientes series:

a. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{n^2}$ Criterio: Raíz – Sol: e. Diverge

b. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ Criterio: Cuociente – Sol: 1/4. Converge

c. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ Criterio: Cuociente – Sol: e. Diverge

d. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ Criterio: Cuociente – Sol: 1/e. Converge

e. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n(n+1)}$ Criterio: Leibniz. Converge

Recordar:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{-n} = \frac{1}{e}$$

- f. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(2n-1)!}$ Criterio: Cuociente – Sol: 0 Converge
- g. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n2^n}$ Criterio Comparación, Comparar con $1/2^n$. (Serie geométrica que converge, por lo tanto converge)
- h. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n + 4}$ Criterio Comparación, Comparar con $1/3^n$. (Serie geométrica que converge, por lo tanto converge)
- i. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5 + n}$ Criterio Comparación, Comparar con $1/n^5$. (Serie-p, con $p > 1$ converge, por lo tanto converge)
- j. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{2^n}$ Criterio: Leibniz o del cuociente. Converge
- k. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+2)}{n(n+1)}$ Criterio: Leibniz. Diverge.
- l. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3^{2n+1}}{n^{2n}}$ Criterio: de la raíz. Sol: 0. Converge
- m. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n$ Criterio: de la raíz. Sol: $\frac{1}{2}$. Converge
- n. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$ Criterio de la raíz. Converge.
- o. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$ Criterio de la Integral. Converge.
- p. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(6 + (-1)^n \right)^n}{8^n - 2}$ Criterio de comparación. Comparar con $(7/8)^n$ que converge, luego la serie diverge
- q. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^3}$ Criterio de la Integral. Converge

r. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(6+(-1)^n\right)^n}{3^n+2}$ Criterio de comparación. Comparar con $(5/3)^n$ que diverge, luego la serie diverge.

5. Determinar los valores de $a \in \mathbb{R}$ para que la siguiente serie sea divergente:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{\left(\frac{n}{a}\right)^n}$$

Sol: Por criterio de la razón, diverge si $a > e$