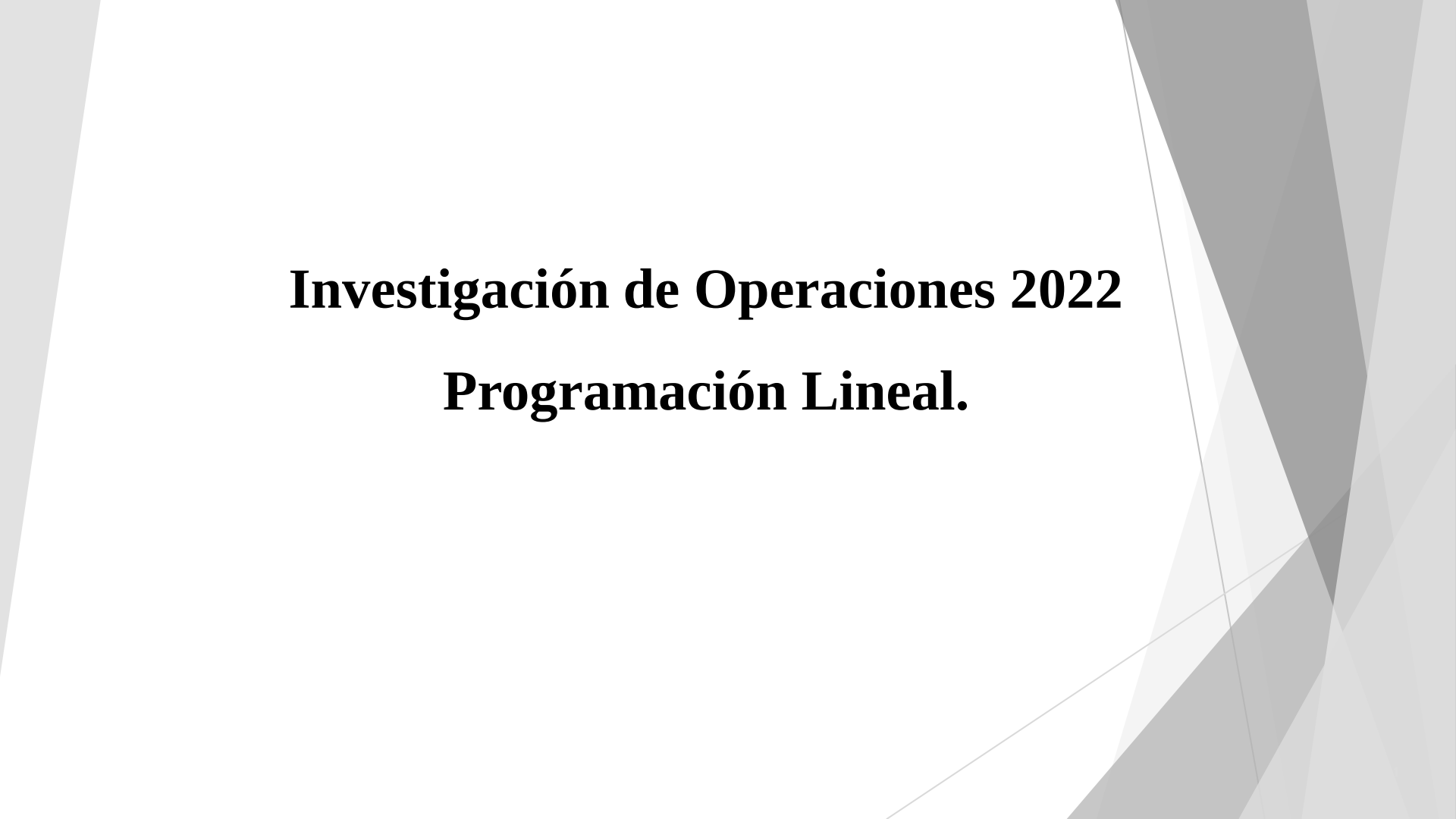




Investigación de Operaciones 2022

Programación Lineal.

Temario

1. **Introducción.**
2. Resolución gráfica de problemas.
3. Modelos de Programación Lineal.
4. El Método Simplex.
5. Dualidad en Programación Lineal.

Introducción

Elementos básicos de un modelo de optimización.

Formular y resolver problemas orientados a la toma de decisiones en diferentes áreas.

Se relaciona con problemas de minimizar o maximizar una función (objetivo) de una o varias variables, cuyos valores usualmente están restringidos por ecuaciones y/o desigualdades.

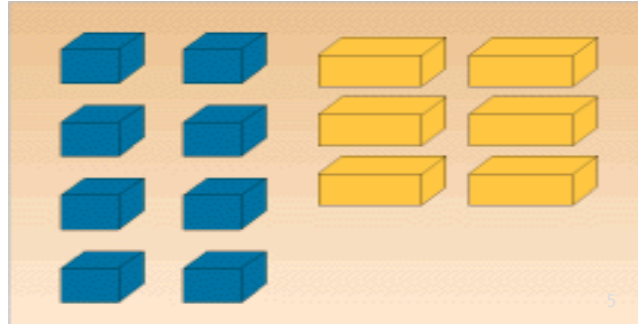
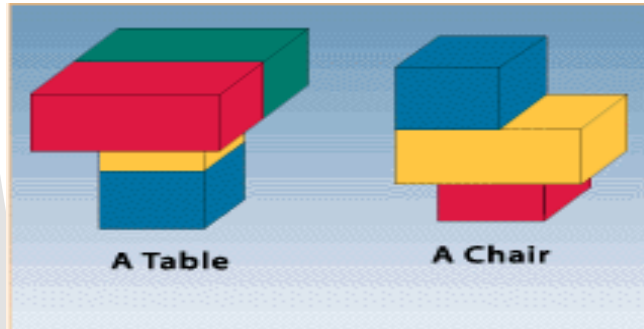
Introducción – Metodología de la IO



Ejemplo 1

Supongamos que se dispone de determinadas piezas para la elaboración de dos productos finales. Se dispone de 8 "piezas pequeñas" y 6 "piezas grandes".

Estas piezas son utilizadas para elaborar sillas (usando 2 piezas pequeñas y 1 pieza grande) y mesas (usando 2 piezas de cada tipo).



Ejemplo 1

Interesa decidir cuántas sillas y mesas fabricar de modo de obtener la máxima utilidad, dado un beneficio neto de U\$ 10 por cada silla y de U\$16 por cada mesa fabricada.

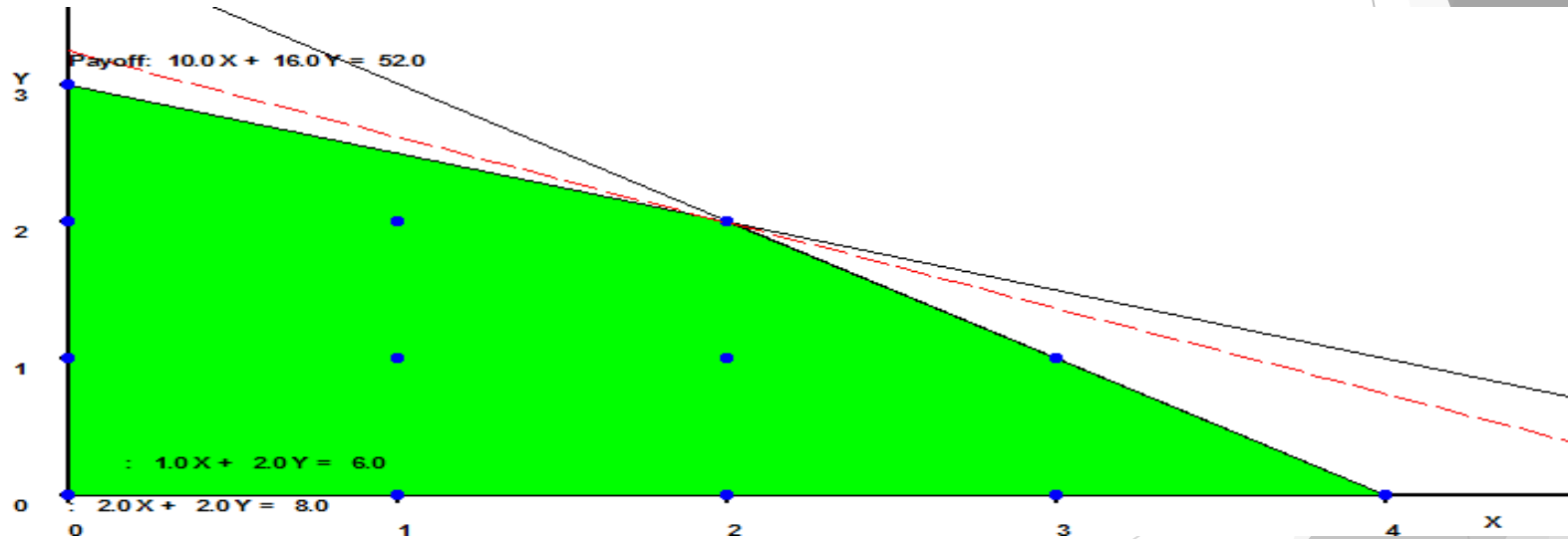
Ejemplo 1

La solución óptima de este problema se encuentra enumerando las posibles **soluciones factibles** a considerar, esto es soluciones que respetan las restricciones del número de piezas disponibles, son por ejemplo soluciones factibles, fabricar:

- 4 sillas, que reportan una utilidad de U\$40
- 1 sillas y 2 mesas , utilidad de U\$42
- 3 mesas, utilidad de U\$48
- 1 mesa y tres sillas, utilidad de U\$46
- 2 sillas y 2 mesas, utilidad de U\$52
- etc.

Ejemplo 1

El conjunto de puntos factibles (o soluciones factibles) se puede representar gráficamente en este ejemplo de 2 variables:



Introducción

El ejemplo corresponde a un modelo de Programación Lineal.

Si además restringimos los valores de x e y a números enteros, tendríamos un modelo de Programación Entera.

Por otra parte, si hubiese retornos crecientes a escala, deberíamos emplear una función objetivo no lineal como ser $f(x,y)=cx^a+dy^b$ con $a,b>1$, y tendríamos un modelo de Programación No Lineal.

Introducción

Supuestos Básicos de la Programación Lineal:

- i) Linealidad
- ii) Modelos deterministas
- iii) Variables reales
- iv) No negatividad

Temario

1. Introducción.
2. Resolución gráfica de problemas.
3. Modelos de Programación Lineal.
4. El Método Simplex.
5. Dualidad en Programación Lineal.

Planteamiento

- Parámetros
- Variables de Decisión
- Función Objetivo
- Restricciones

Ejemplo 1

Un **modelo de optimización** para hallar la mejor solución factible a este problema tiene tres componentes básicas:

i) **Las variables de decisión**, que consiste en definir cuáles son las decisiones que se debe tomar. En el ejemplo,

x: número de sillas elaboradas.

y: número de mesas elaboradas.

Ejemplo 1

ii) **La función objetivo** del problema, que permita tener un criterio para decidir entre todas las soluciones factibles. En el ejemplo, maximizar la utilidad dada por:

$$z = f(x,y) = 10x + 16y$$

Ejemplo 1

iii) **Restricciones del problema**, que consiste en definir un conjunto de ecuaciones e inecuaciones que restringen los valores de las variables de decisión a aquellos considerados como factibles. En el ejemplo, respetar la disponibilidad de piezas para la fabricación de sillas y mesas:

Piezas pequeñas: $2x + 2y \leq 8$

Piezas grandes : $x + 2y \leq 6$

También se impone restricciones de no negatividad:

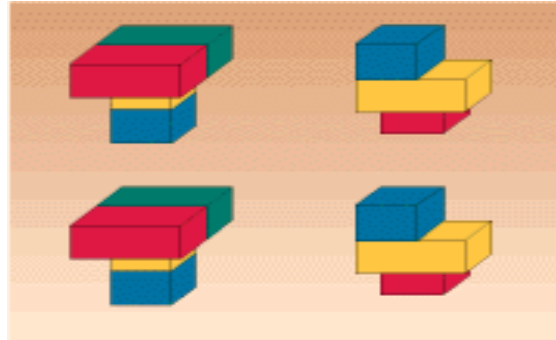
$$x \geq 0, y \geq 0$$

Ejemplo 1

En resumen:

$$\begin{array}{ll}\text{Max} & 10x + 16y \\ \text{s.a.} & 2x + 2y \leq 8 \\ & x + 2y \leq 6 \\ & x \geq 0, y \geq 0\end{array}$$

Solución óptima:



SOLVER

Empleando Solver de **EXCEL**, el ejemplo introductorio corresponde simplemente a:

The screenshot shows the Excel Solver Parameters dialog box overlaid on a spreadsheet. The spreadsheet contains data for a problem involving chairs (SILLAS) and tables (MESAS) with constraints on left (L.IZQ) and right (L.DER) sides. The objective is to maximize the value of the objective function (F.OBJETIVO) starting from 0.

	A	B	C	D	E
1		SILLAS	MESAS		
2		X1	X2		F.OBJETIVO
3					0
4		10	16		
5				L.IZQ	L.DER
6	R1	2	2	0	8
7	R2	1	2	0	6

Referencias:
<http://www.solver.com/content/basic-solver-define-and-solve-problem>

Parámetros de Solver

Establecer objetivo:

Para: ☒ Máx. ☐ Min ☐ Valor de:

Cambiando las celdas de variables:

Sujeto a las restricciones:

☒ Convertir variables sin restricciones en no negativas

Método de resolución:

Método de resolución
Seleccione el motor GRG Nonlinear para problemas de Solver no lineales suavizados. Seleccione el motor LP Simplex para problemas de Solver lineales, y seleccione el motor Evolutionary para problemas de Solver no suavizados.

Botones: Agregar, Cambiar, Eliminar, Restablecer todo, Cargar/Guardar, Opciones, Ayuda, Resolver, Cerrar

SOLVER

De donde se obtiene la siguiente solución óptima:

	A	B	C	D	E
1		SILLAS	MESAS		
2		X1	X2		F.OBJETIVO
3		2	2		52
4		10	16		
5				L.IZQ	L.DER
6	R1	2	2	8	8
7	R2	1	2	6	6
8	Referencias: http://www.solver.com/content/basic-solver-define-and-solve-problem				
9					
10					
11					
12					
13					
14					

Resultados de Solver

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.

☒ Conservar solución de Solver
☐ Restaurar valores originales

☐ Volver al cuadro de diálogo de parámetros de Solver

☐ Informes de esquema

Informes
Responder
Confidencialidad
Límites

Aceptar Cancelar Guardar escenario...

Solver encontró una solución. Se cumplen todas las restricciones y condiciones óptimas.
Al usar el motor GRG, Solver ha encontrado al menos una solución óptima local. Al usar Simplex LP, significa que Solver ha encontrado una solución óptima global.

También se puede utilizar OpenSolver como alternativa a Solver de Excel.

Actividad en Clases

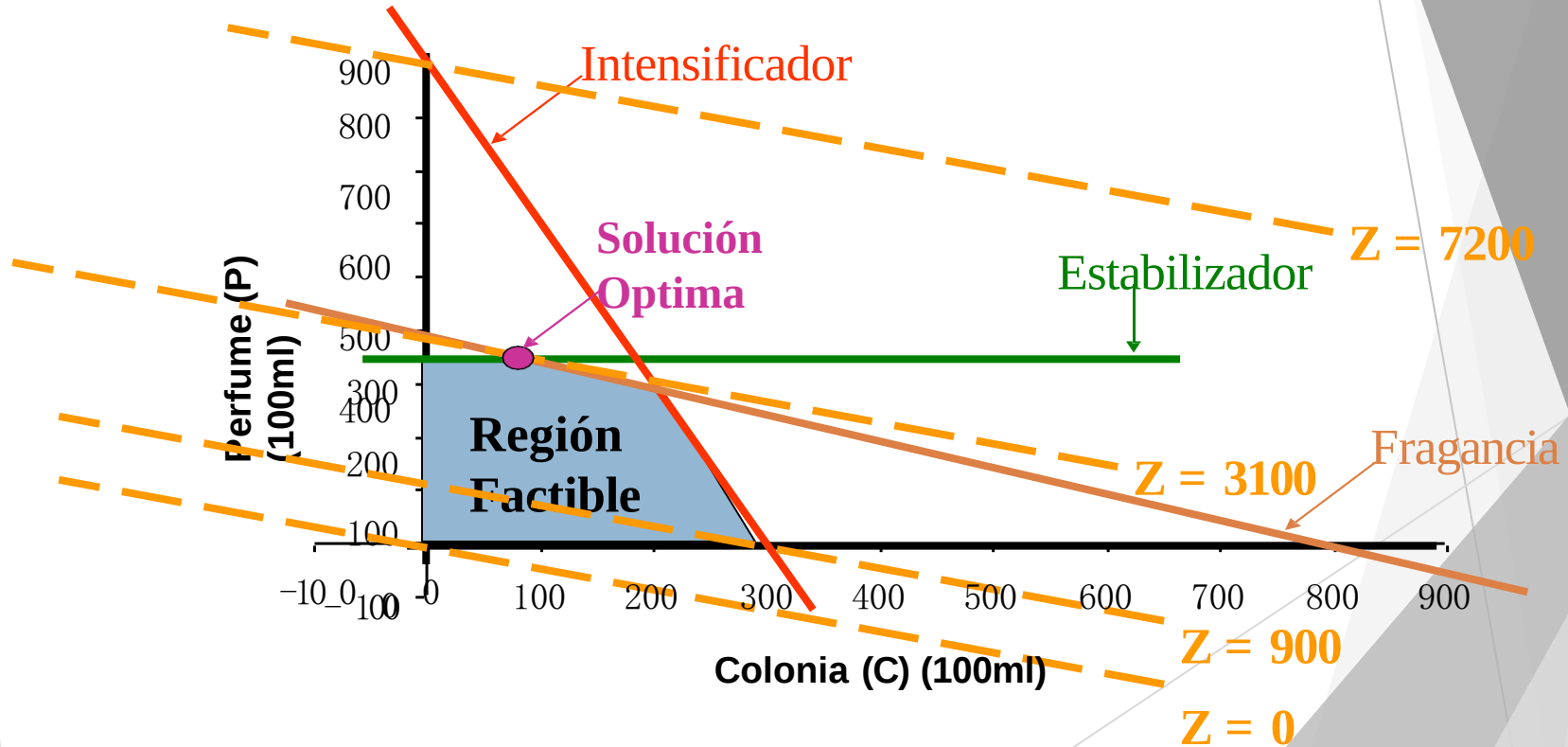
- Una tienda vende dos productos: colonia y perfume
- La colonia se vende por \$3.000/ 100ml ; cada 100ml requiere
 - 2 gramos de fragancia
 - 6 gramos de intensificador
- El perfume se vende por \$8.000/ 100ml ; cada 100ml requiere
 - 4 gramos de fragancia
 - 2 gramos de intensificador
 - 1 gramo de estabilizador
- Se tiene inventario limitado. En particular, tiene
 - 1.600 gramos de fragancia
 - 1.800 gramos de intensificador
 - 350 gramos de estabilizador
- S. T.debe usar sus insumos ahora! (no necesariamente a máxima capacidad)
- ¿Cuál es la estrategia de producción óptima? ¿Cuál es el ingreso asociado a esta estrategia?

Actividad en Clases

- Parámetros
- Variables de Decisión:
- Función Objetivo:
- Restricciones:

Actividad en Clases

Problema de S.T.



Resolución gráfica - Comprobación

Curvas de nivel

Consideremos el siguiente problema a resolver gráficamente:

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2$$

$$\text{s.a } x_1 \leq 4$$

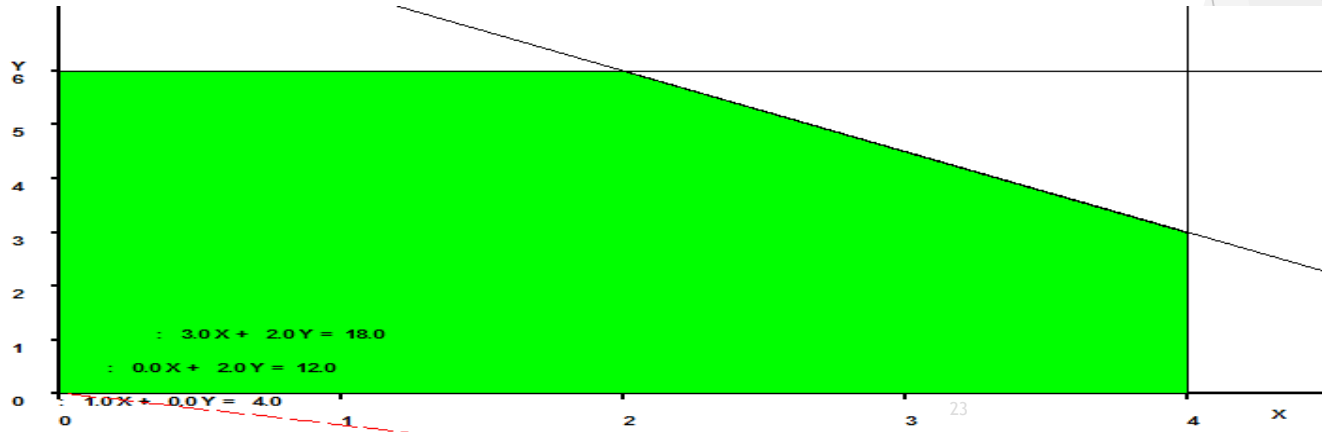
$$2x_2 \leq 12$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 18$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Resolución gráfica

En primer lugar, se debe obtener la región de puntos factibles en el espacio, obtenida por medio de la intersección de todos los semi - espacios que determinan cada una de las inecuaciones conjuntamente con todos los planos o rectas presentes en las restricciones del problema.



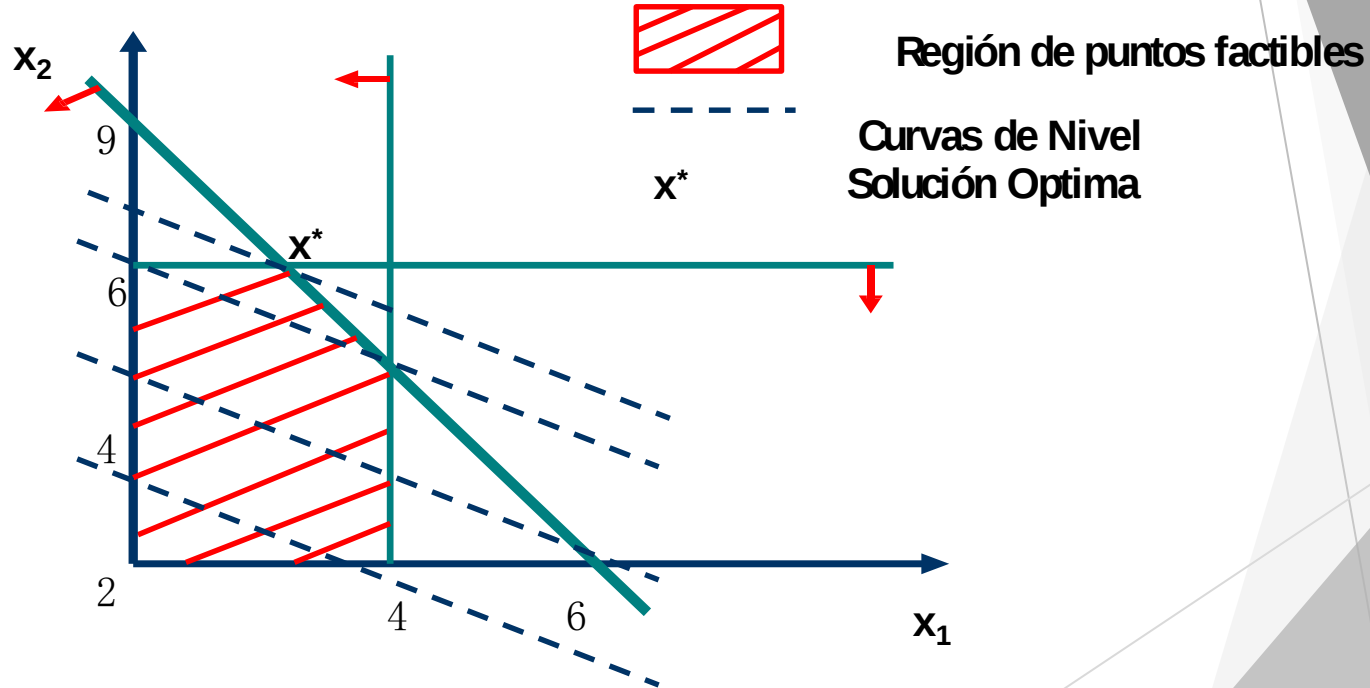
Resolución gráfica

Enseguida, se estudia el comportamiento de las curvas de nivel de la función objetivo, fijando la atención en la dirección de crecimiento de la función (que corresponde a la dirección del vector gradiente de la función, $\nabla z(x_1, x_2) = (3, 5)^T$).

De ahí se obtiene la solución óptima del problema en la intersección de las rectas: $2x_2 = 12$ y $3x_1 + 2x_2 = 18$ (restricciones activas). Esto es:

$$\begin{aligned}x_1^* &= 2 & x_2^* &= 6 \\ z^* &= 3x_1^* + 5x_2^* = 36\end{aligned}$$

Resolución gráfica



Resolución gráfica

Notar que se pueden dar otras situaciones en la búsqueda de una solución óptima para esta clase de problemas:

- i) La solución óptima exista pero sean infinitas.

En el ejemplo, considere la nueva función objetivo:

$$z = 6x_1 + 4x_2.$$

Resolución gráfica

ii) Problema no-acotado sin solución óptima, esto es con una región de puntos factibles no - acotada.

En el ejemplo, reemplace cada desigualdad $\leq$ por una $\geq$.

iii) Problema sin solución al no existir puntos factibles.

En el ejemplo, suponga que agregamos la restricción: $x_1 \geq 5$.

Análisis de Sensibilidad

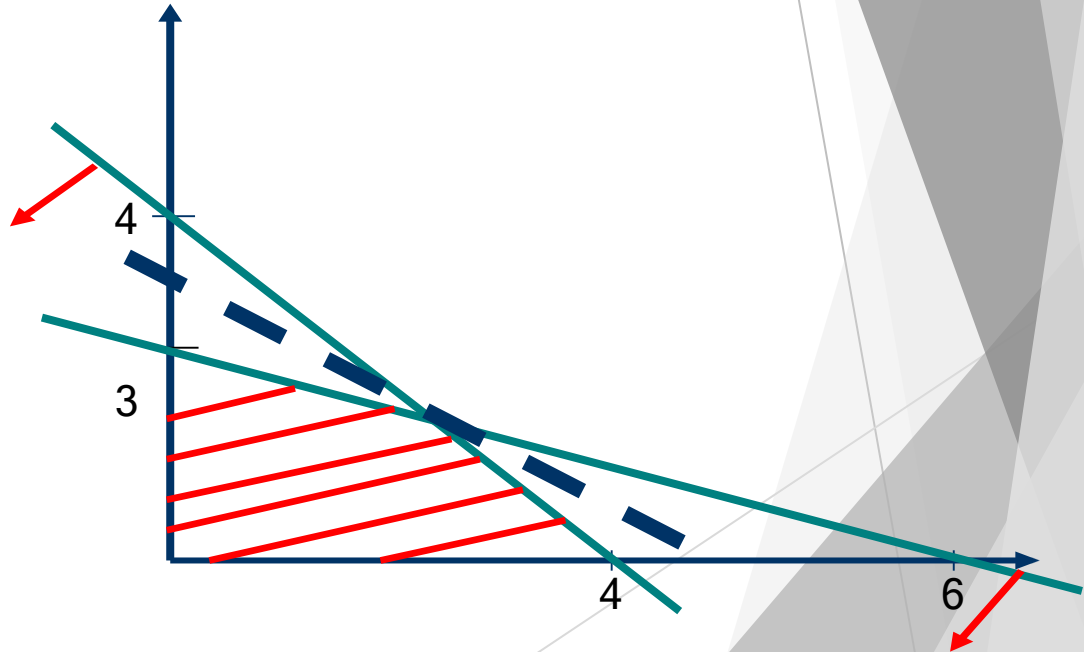
Ejemplo:

$$\text{Max } 15x + 20y$$

$$\text{s.a: } 2x + 2y \leq 8$$

$$x + 2y \leq 6$$

$$x, y \geq 0$$



Análisis de Sensibilidad

A partir de la resolución gráfica del problema se tiene:

Solución óptima : $x_1^* = 2$; $x_2^* = 2$

Valor óptimo : $z = z(2,2) = 70$

El análisis de sensibilidad permite responder, entre otras, las siguientes preguntas:

Análisis de Sensibilidad

1. ¿Cuál es el intervalo de variación de algún coeficiente de la función objetivo, de modo que la actual solución siga siendo la óptima?

Sea $z = c_1x_1 + c_2x_2$

La solución óptima de la nueva función, seguirá siendo: $x_1^* = 2$;
 $x_2^* = 2$ ssi:

$$-1 \leq \frac{-c_1}{c_2} \leq -\frac{1}{2}$$

Análisis de Sensibilidad

También podemos estudiar el intervalo de un sólo coeficiente, dejando el resto de los parámetros fijos:

Para c_1 :

$$-1 \leq \frac{-c_1}{20} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 10 \leq c_1 \leq 20$$

Para $c_2 \neq 0$:

$$-1 \leq \frac{-15}{c_2} \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 15 \leq c_2 \leq 30$$

Tarea

Ejercicio: Considere el siguiente problema de Programación Lineal:

$$\begin{array}{llll} \text{MAX} & 4*X + 3*Y & & \\ \text{S.A.} & 6*X + 2*Y \leq 120 & & (R1) \\ & 1*X + 4*Y \leq 100 & & (R2) \\ & 5*X + 5*Y \leq 150 & & (R3) \\ & X \geq 0 \quad Y \geq 0 & & \end{array}$$

Utilizando la resolución gráfica del problema, responda las siguientes preguntas:

1. ¿Cuál es la solución óptima?
2. ¿Cuál es el valor óptimo?
3. ¿Cuál es el intervalo de variación del coeficiente de X en la función objetivo que garantiza la misma solución óptima?
4. ¿Cuál es el intervalo de variación del coeficiente de Y en la función objetivo que garantiza la misma solución óptima?
5. ¿Qué sucede si el coeficiente de Y en la función objetivo cambia de 3 a 4?
6. Si se agrega la restricción $3*X + 4*Y \leq 110$ ¿Cambia la solución actual?
7. ¿Qué sucede si se agrega la restricción $X \geq 25$?
8. ¿Qué sucede si cambio las restricciones de " $\leq$ " por unas de " $\geq$ " ?
- 9.
- 10.