

GUÍA DE EJERCICIOS: OPERATORIA CON MATRICES

Ejercicios

1. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & -8 \\ 4 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 9 \\ -4 & -3 & 2 \\ 9 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 10 & 12 & -11 \\ 8 & 9 & 17 \\ -9 & 14 & 16 \end{bmatrix}.$$

Determine:

$$\text{a) } A + B - C \quad \text{b) } 2A - B^T + 2C \quad \text{c) } (3C - 2A)^T + 6B.$$

2. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & -3 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Determine, si es posible:

$$\text{a) } CA \quad \text{b) } AB \quad \text{c) } C + DA \quad \text{d) } 2DB + 5CD \quad \text{e) } (-2)BA + CD \quad \text{f) } B^2 \quad \text{g) } D^2.$$

3. Calcule $m, n, p, q \in \mathbb{R}$ si

$$-2 \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} m+1 & -2 \\ 3+p & 2q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & m-n \\ q & 6 \end{bmatrix}.$$

4. Determine si existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$\begin{bmatrix} c^2 + 1 - c & d \\ c + 2d & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{25} & 2c \\ 6 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Encuentre los valores de las variables en cada caso:

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & 7 \\ y & -6 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } \begin{bmatrix} x & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & y \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 3x & 5 \\ -1 & 4x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2y & -3 \\ -6 & -y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 4 & 2x \\ -4x & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -3y \\ 5y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{e) } x \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

6. Sea $A = [a_{ij}]_{4 \times 4}$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i - j, & \text{si } j > i, \\ j^2 - i, & \text{si } i \geq j. \end{cases}$$

Determine:

$$\text{a) } A \quad \text{b) } 3A^T \quad \text{c) } A^2.$$

7. Sea $A = [a_{ij}]_{2 \times 5}$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + j, & \text{si } j > i + 1, \\ 2j^2 - i, & \text{si } j - i < 1, \\ -2, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Determine $A^T A - 2I_5$.

8. Sea $A = [a_{ij}]_{3 \times 5}$, donde

$$a_{ij} = \begin{cases} 2i + j, & \text{si } j + i = 4, \\ j^2 - i, & \text{si } i < 4 - j, \\ i + 3, & \text{si } i > 5 - j, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y sea $B = [b_{ij}]_{5 \times 4}$, donde

$$b_{ij} = \begin{cases} i + j - 2, & \text{si } i > j, \\ i^2 - j^2, & \text{si } i = j, \\ 2 - i - j, & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Determine $(AB)^T$.

9. Dadas las matrices

$$S = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule $2S - 3K + D - I_3$. Observe que S es simétrica, K es antisimétrica y D es diagonal.

10. Dadas las matrices cuadradas

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz X en cada caso:

a) $2A + 3X = \frac{1}{2}CB$.

b) $(X - A)^T = B^2 - 2C$.

c) $\frac{1}{2}X = A - \frac{1}{3}C - 2B - X$.

11. Dadas las matrices

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 8 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Determine la matriz X en cada caso:

a) $A^2 - 2X = (BC)^T$ b) $CA + 3X = B^T$.

Solucionario: respuestas finales

$$1. \text{ a) } \begin{bmatrix} -6 & -8 & 25 \\ -6 & -5 & -23 \\ 22 & -12 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 10 & 36 & -21 \\ 28 & 35 & 10 \\ -19 & 14 & 33 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 70 & 12 & 19 \\ 4 & -5 & 66 \\ 11 & 115 & 92 \end{bmatrix}.$$

$$2. \text{ a) No definida. b) No definida. c) } \begin{bmatrix} 5 & -11 & 15 \\ 4 & -7 & 3 \\ 0 & 10 & 4 \end{bmatrix}. \text{ d) } \begin{bmatrix} -31 & 16 \\ 61 & -25 \\ -3 & 77 \end{bmatrix}. \text{ e) No definida. f) } \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 4 & 27 \end{bmatrix}. \text{ g) No definida.}$$

$$3. \text{ } m = -\frac{2}{3}, \text{ } n = \frac{26}{3}, \text{ } p = -\frac{19}{10}, \text{ } q = -\frac{3}{5}.$$

$$4. \text{ } c = \frac{6}{5}, \text{ } d = \frac{12}{5}.$$

$$5. \text{ a) } x = -5, \text{ } y = 4. \text{ b) } x = 3, \text{ } y = 2. \text{ c) } x = 1, \text{ } y = 2. \text{ d) } x = -4, \text{ } y = -3. \text{ e) } x = 7, \text{ } y = -11, \text{ } z = 6.$$

$$6. \text{ a) } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 6 & 2 \\ -3 & 0 & 5 & 12 \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } 3A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -6 & -9 \\ 0 & 6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 18 & 15 \\ -6 & 0 & 6 & 36 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } A^2 = \begin{bmatrix} 8 & -1 & -16 & -26 \\ -4 & 5 & 9 & 4 \\ -19 & 8 & 49 & 40 \\ -46 & 5 & 93 & 160 \end{bmatrix}.$$

$$7. \text{ } A^T A - 2I_5 = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 5 & 6 & 7 \\ -2 & 38 & -22 & 36 & 40 \\ 5 & -22 & 27 & 14 & 17 \\ 6 & 36 & 14 & 98 & 114 \\ 7 & 40 & 17 & 114 & 128 \end{bmatrix}.$$

$$8. \text{ } (AB)^T = \begin{bmatrix} 29 & 41 & 54 \\ 35 & 46 & 65 \\ 15 & 39 & 52 \\ -9 & 14 & -9 \end{bmatrix}.$$

$$9. \text{ } 2S - 3K + D - I_3 = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 17 \\ 4 & -3 & 3 \\ -1 & 9 & 10 \end{bmatrix}.$$

$$10. \text{ a) } X = \begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{6} & -\frac{17}{6} \end{bmatrix}.$$

$$\text{b) } X = \begin{bmatrix} 37 & -2 & -3 \\ 14 & 1 & -6 \\ -13 & -6 & -2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{c) } X = \begin{bmatrix} -\frac{22}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{4}{9} \\ \frac{4}{9} & 0 & \frac{26}{9} \\ -\frac{8}{9} & -\frac{20}{9} & \frac{10}{9} \end{bmatrix}.$$

$$11. \text{ a) } X = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{13}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}. \quad \text{b) } X = \begin{bmatrix} -\frac{7}{3} & -\frac{14}{3} \\ \frac{10}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$