

APLICACIONES DE EDO

Profesora: Catherine Hardy

TEMPERATURA

LEY DE ENFRIAMIENTO DE NEWTON

En un cuerpo que se está enfriando la tasa de cambio de la temperatura $T(t)$ con respecto al tiempo t es proporcional a la diferencia entre la temperatura del cuerpo $T(t)$ y la temperatura T_A del medio que lo rodea.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

Ejemplos:

- 1) Una barra metálica a una temperatura de $100^{\circ}F$ se pone en un cuarto a una temperatura constante de $0^{\circ}F$. Después de 20 minutos la temperatura de la barra es de $50^{\circ}F$
- a) ¿Cuánto tiempo tardará la barra para llegar a una temperatura de $25^{\circ}F$?
- b) ¿Cuál será la temperatura de la barra después de 10 minutos?

SOLUCIÓN:

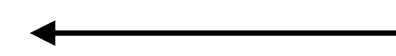
Datos

$$T(0) = 100^{\circ}F$$

$$T(20) = 50^{\circ}F$$

$$T_A = 0^{\circ}F$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$



Ley de enfriamiento de Newton

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 0)$$



Reemplazar T_A

$$\frac{dT}{dt} = kT$$

$$\frac{dT}{T} = kdt$$



Separar variables y luego integrar

$$\int \frac{dT}{T} = \int k dt$$

$$\ln(T) = kt + C$$

Despejar T

$$T = e^{kt+C}$$

$$T = e^{kt} e^C$$

Propiedades de potencias
 e^C es otra constante, la llamaremos C_1

$$T(t) = C_1 e^{kt}$$

Función que estamos buscando

El siguiente paso es reemplazar los valores iniciales que tenemos para conocer el valor de las constantes C_1 y k

Datos

$$T(0) = 100^{\circ}F$$

$$T(20) = 50^{\circ}F$$

$$T_A = 0^{\circ}F$$

$$T(t) = C_1 e^{kt}$$

Reemplazando $T(0)$

$$100 = C_1 e^0$$

$$C_1 = 100$$

Reemplazando $T(20)$

$$50 = 100 e^{20k}$$

$$\frac{50}{100} = e^{20k}$$

$$\frac{1}{2} = e^{20k}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 20k$$

$$k = -0,03466$$

$$\therefore T(t) = 100 e^{-0,03466t}$$

Ecuación de Temperatura en
función del tiempo que
modela la situación

Ahora, respondemos las preguntas:

$$\therefore T(t) = 100e^{-0,03466t}$$

a) ¿Cuánto tiempo tardará la barra para llegar a una temperatura de $25^{\circ}F$?

$$25 = 100e^{-0,03466t}$$

$$t \approx 40$$

R: La barra llegará a una temperatura de $25^{\circ}F$ después de app. 40 minutos

c) ¿Cuál será la temperatura de la barra después de 10 minutos?

$$T = 100e^{-0,03466*10}$$

$$T = 70,71$$

R: Después de 10 minutos la temperatura de la barra será app. de $70,71^{\circ}F$

Ejemplos:

2) Un cuerpo a una temperatura desconocida se pone en un refrigerador a una temperatura constante de $1^{\circ}F$. Si después de 20 minutos la temperatura del cuerpo es de $40^{\circ}F$, y después de 40 minutos la temperatura del cuerpo es de $20^{\circ}F$.

Hallar la temperatura inicial de este.

Datos

$$T(20) = 40^{\circ}F$$

$$T(40) = 20^{\circ}F$$

$$T_A = 1^{\circ}F$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_A)$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 1) \longleftarrow$$

Reemplazar T_A

$$\frac{dT}{T - 1} = kdt$$

$$\int \frac{dT}{T - 1} = \int kdt$$

$$\int \frac{dT}{T-1} = \int k dt$$

$$\ln(T-1) = kt + C$$

$$T-1 = e^{kt+C}$$

$$T-1 = C_1 e^{kt}$$

$$T(t) = C_1 e^{kt} + 1$$

Reemplazando $T(20) = 40$

$$40 = C_1 e^{20k} + 1$$

Reemplazando $T(40) = 20$

$$20 = C_1 e^{40k} + 1$$

$$39 = C_1 e^{20k}$$

$$19 = C_1 e^{40k}$$

Sistema de ecuaciones
(dividir ambas ecuaciones)

$$\frac{39}{19} = e^{-20k}$$

$$\ln\left(\frac{39}{19}\right) = -20k$$

$$k = -0,036$$

$$39 = C_1 e^{20 \cdot -0,036}$$

$$C_1 = 80$$

$$\therefore T(t) = 80e^{-0,036t} + 1$$

Por lo tanto, la temperatura inicial es en $t = 0$

$$T(0) = 80e^0 + 1$$

$$T(t) = 81$$

Resp: La Temperatura inicial es de aproximadamente $81^\circ F$

DESINTEGRACIÓN RADIATIVA

LEY DE DESINTEGRACIÓN RADIATIVA

La velocidad de desintegración de una sustancia radiactiva en un instante dado es proporcional a la cantidad de sustancia presente en ese instante.

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

La **vida media** de una sustancia radiactiva es el tiempo necesario para que se desintegren la mitad de los átomos de una cantidad inicial de dicha sustancia.

Ejemplo:

Si inicialmente hay 50 miligramos de cierto material radiactivo y después de 2 horas se observa que el material ha perdido el 10 % de su masa original, encuentre:

- a) Una expresión para la masa de material restante en ese momento t
- b) ¿Cuántos miligramos del material quedan después de 4 horas?
- c) ¿Cuál es la vida media de este material?

Solución

Datos

$$x(0) = 50$$

$$x(2) = 45$$

$$\frac{dx}{dt} = kx$$

$$\frac{dx}{x} = kdt$$

$$\int \frac{dx}{x} = \int kdt$$

$$\ln(x) = kt + C$$

$$x = e^{kt+C}$$

$$x(t) = C_1 e^{kt}$$

$$\text{Reemplazando } x(20) = 50$$

$$50 = C_1 e^0$$

$$C_1 = 50$$

$$\text{Reemplazando } x(2) = 45$$

$$45 = 50e^{2k}$$

$$k = -0,053$$

a) $x(t) = 50e^{-0,053t}$

b) $x(4) = 50e^{-0,053 \cdot 4}$

$$x(4) = 40.5$$

Después de 4 horas quedan
40,5 mg

c)

Para calcular la vida media, se termina el valor de t para el cual

$$x(t) = \frac{x_0}{2} = 25 \quad (\text{la mitad de la cantidad inicial})$$

$$25 = 50e^{-0,053t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -0,053t$$

$$t = 13$$

Respuesta: La vida media de este material es de 13 horas.

MODELOS DE POBLACIÓN

LEY DE MALTHUS

- La **Ley de Malthus** de crecimiento de poblaciones dice que la razón de cambio de la población es proporcional al número de individuos en ese tiempo.

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad k > 0$$

Donde $x(t)$ es el número de individuos en el tiempo t

Ejemplo:

En un cultivo de bacterias se tenían x número de familias. Después de una hora se observan 1000 familias de la bacteria y después de 4 horas, 3000 familias.

a) Encontrar la expresión para el número de familias de la bacteria presentes en el cultivo al tiempo t .

b) Encontrar el número de familias de la bacteria que había originalmente en el cultivo.

Solución:

a)

$$x(t) = 693.36e^{0.366t}$$

b)

$$x(0) \approx 693$$

Bibliografía

Becerril & Elizarraraz (2004). Ecuaciones diferenciales: Técnicas de solución y aplicaciones.