

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

21 DE AGOSTO DE 2023

Función creciente y decreciente

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$, $x, y \in A$. Decimos que:

Función creciente y decreciente

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$, $x, y \in A$. Decimos que:

- f es **creciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Función creciente y decreciente

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$, $x, y \in A$. Decimos que:

- f es **creciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- f es **decreciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Función creciente y decreciente

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$, $x, y \in A$. Decimos que:

- f es **creciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- f es **decreciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$. Decimos que:

Función creciente y decreciente

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$, $x, y \in A$. Decimos que:

- f es **creciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- f es **decreciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$. Decimos que:

- f es **estrictamente creciente** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$

Función creciente y decreciente

Definición

Sea $f : A \rightarrow B$, $x, y \in A$. Decimos que:

- f es **creciente** si

$$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- f es **decreciente** si

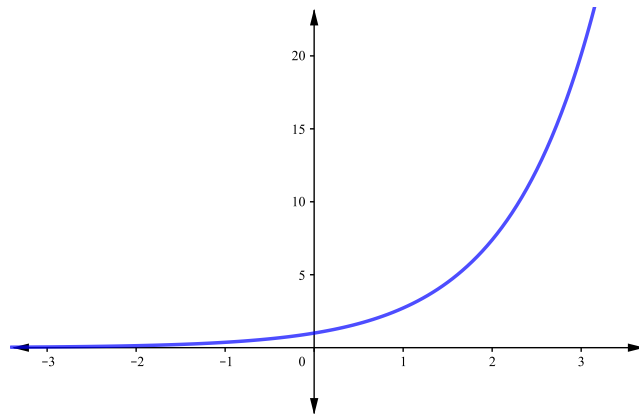
$$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Definición

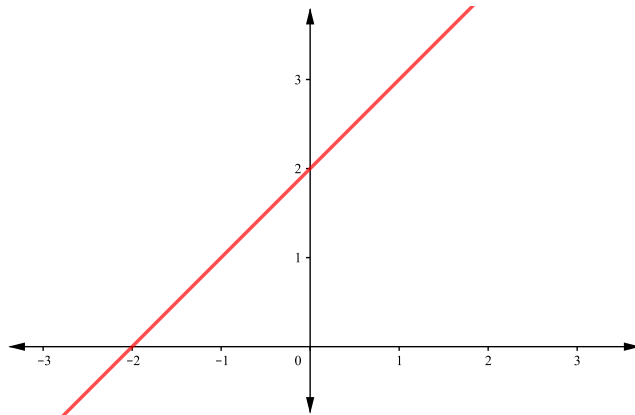
Sea $f : A \rightarrow B$. Decimos que:

- f es **estrictamente creciente** si $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$
- f es **estrictamente decreciente** si $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

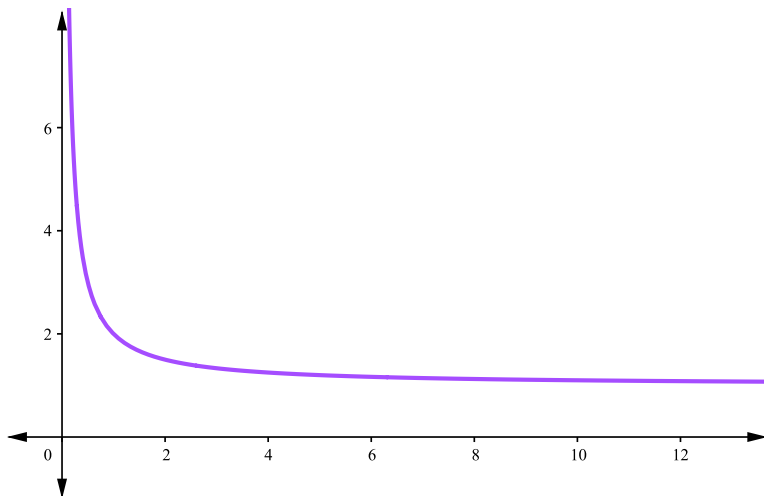
Ejemplo de función creciente. $f(x) = e^x$



Ejemplo de función creciente. $g(x) = x + 2$



Ejemplo de función decreciente.



Si $x < y$ entonces

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $f'(x) > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $f'(x) > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Más aún, si y se encuentra cerca de x , entonces:

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $f'(x) > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Más aún, si y se encuentra cerca de x , entonces:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $f'(x) > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Más aún, si y se encuentra cerca de x , entonces:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Luego: $f(x) - f(y) < 0$.

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $f'(x) > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Más aún, si y se encuentra cerca de x , entonces:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Luego: $f(x) - f(y) < 0$. Por lo tanto $f(x) < f(y)$

Si $x < y$ entonces $x - y < 0$.

Si $f'(x) > 0$, entonces

$$\lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Más aún, si y se encuentra cerca de x , entonces:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0$$

Luego: $f(x) - f(y) < 0$. Por lo tanto $f(x) < f(y)$

Entonces si $f' > 0$, la función es creciente.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $g(x) = x^3$. Su derivada es

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $g(x) = x^3$. Su derivada es $g'(x) = 3x^2 > 0$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $g(x) = x^3$. Su derivada es $g'(x) = 3x^2 > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $g(x) = x^3$. Su derivada es $g'(x) = 3x^2 > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $h(x) = -2x$. Su derivada es

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $g(x) = x^3$. Su derivada es $g'(x) = 3x^2 > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $h(x) = -2x$. Su derivada es $h'(x) = -2 < 0$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$.

- Si $f'(x) > 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es creciente en $[a, b]$
- Si $f'(x) < 0$, para todo $x \in]a, b[$, entonces f es decreciente en $[a, b]$

Ejemplos:

- $f(x) = e^x$. Su derivada es $f'(x) = e^x > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $g(x) = x^3$. Su derivada es $g'(x) = 3x^2 > 0$. Por lo tanto es creciente en todo su dominio.
- $h(x) = -2x$. Su derivada es $h'(x) = -2 < 0$. Por lo tanto es decreciente en todo su dominio.

Puntos críticos

Un valor c se llama punto crítico si cumple uno de los siguientes casos:

- $f'(c) = 0$
- $f'(c)$ no existe

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo absoluto** de f en A si $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in A$.

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo absoluto** de f en A si $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor **mínimo absoluto** de f en A si $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in A$.

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo absoluto** de f en A si $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor **mínimo absoluto** de f en A si $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor extremo absoluto de f en A si es un máximo o mínimo absoluto

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo absoluto** de f en A si $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor **mínimo absoluto** de f en A si $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor extremo absoluto de f en A si es un máximo o mínimo absoluto

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo absoluto** de f en A si $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor **mínimo absoluto** de f en A si $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor extremo absoluto de f en A si es un máximo o mínimo absoluto

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo local** de f , si existe un intervalo abierto $I \subseteq A$, $c \in I$, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in I$.

Máximos y mínimos

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo absoluto** de f en A si $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor **mínimo absoluto** de f en A si $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in A$.
- $f(c)$ es valor extremo absoluto de f en A si es un máximo o mínimo absoluto

Definición

Sea $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Sea $c \in A$. Decimos que:

- $f(c)$ es valor **máximo local** de f , si existe un intervalo abierto $I \subseteq A$, $c \in I$, tal que $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in I$.
- $f(c)$ es valor **mínimo local** de f , si existe un intervalo abierto $I \subseteq A$, $c \in I$, tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in I$.

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .
- Si f' cambia de negativa a positiva en c , entonces f tiene un mínimo local en c .

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .
- Si f' cambia de negativa a positiva en c , entonces f tiene un mínimo local en c .
- Si f' no cambia de signo en c , entonces f no tiene un extremo local en c .

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$f'(x) = 12x^3 -$$

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 -$$

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x$$

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\ &= 12x \end{aligned}$$

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\ &= 12x(x^2 - x - 2)\end{aligned}$$

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\&= 12x(x^2 - x - 2) \\&= 12x(x - 2)(x + 1)\end{aligned}$$

Ejercicio 1

Determine los intervalos en los que la función $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ es creciente y decreciente.

Solución:

$$\begin{aligned}f'(x) &= 12x^3 - 12x^2 - 24x \\&= 12x(x^2 - x - 2) \\&= 12x(x - 2)(x + 1)\end{aligned}$$

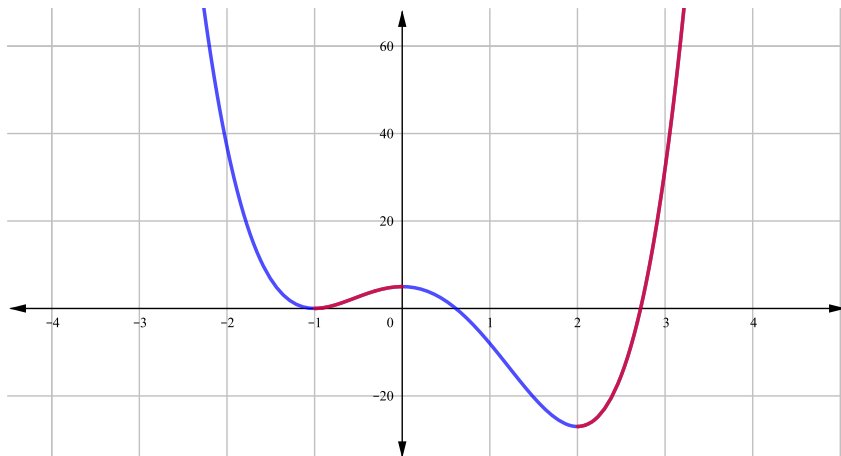
La expresión cambia de signo en $-1, 0, 2$

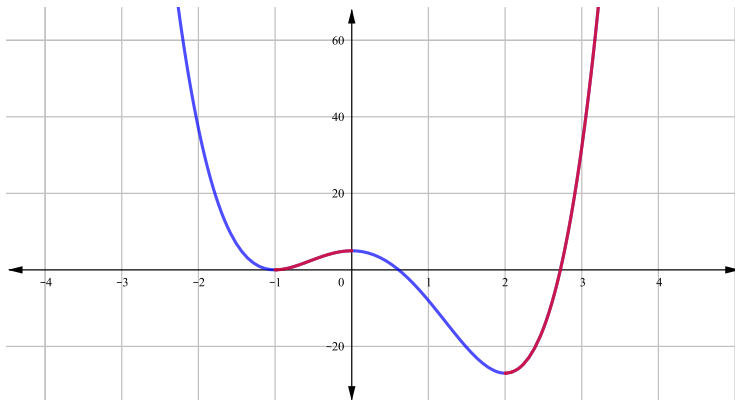
$$f'(x) = 12x(x - 2)(x + 1)$$

$$f'(x) = 12x(x - 2)(x + 1)$$

	$] - \infty, -1]$	$[-1, 0]$	$[0, 2]$	$[2, \infty[$
$x + 1$	—	+	+	+
x	—	—	+	+
$x - 2$	—	—	—	+
$12x(x - 2)(x + 1)$	—	+	—	+

Por lo tanto f es decreciente en $] - \infty, -1]$ y en $[0, 2]$. f es creciente en $[-1, 0]$ y en $[2, \infty[$.





f tiene máximo local en 0. Tiene mínimos locales en -1 y 2 .

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$. Determine:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los valores extremos locales

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$. Determine:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los valores extremos locales

Solución: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 =$

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$. Determine:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los valores extremos locales

Solución: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$. Determine:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los valores extremos locales

Solución: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

	$] - \infty, -1]$	$[-1, 3]$	$[3, \infty[$
$x + 1$	—	+	+
$x - 3$	—	—	+
$f'(x)$	+	—	+

Ejercicio 2

Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$. Determine:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los valores extremos locales

Solución: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

	$] - \infty, -1]$	$[-1, 3]$	$[3, \infty[$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

f es creciente en $] - \infty, -1]$ y en $[3, \infty[$. f es decreciente en $[-1, 3]$.

Ejercicio 2

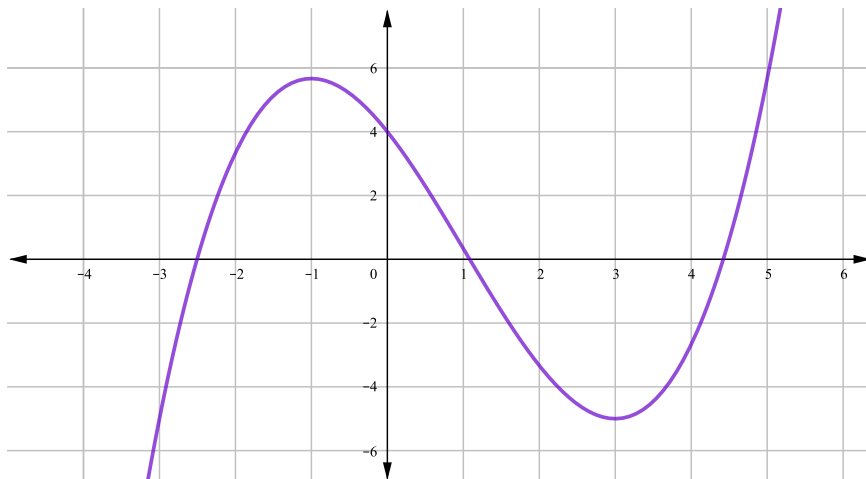
Sea $f(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 4$. Determine:

- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Los valores extremos locales

Solución: $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = (x + 1)(x - 3)$

	$] - \infty, -1]$	$[-1, 3]$	$[3, \infty[$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$

f es creciente en $] - \infty, -1]$ y en $[3, \infty[$. f es decreciente en $[-1, 3]$. f tiene un máximo local en $x = -1$, y un mínimo local en $x = 3$



Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c

Nota: Si $f''(c) = 0$ no es valor extremo.

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) =$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 -$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 =$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) =$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

$$f''(0) = 0.$$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

$$f''(0) = 0.$$

$$f''(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 =$$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

$$f''(0) = 0.$$

$$f''(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 32 > 0.$$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

$$f''(0) = 0.$$

$$f''(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 32 > 0.$$

$$f''(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) =$$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

$$f''(0) = 0.$$

$$f''(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 32 > 0.$$

$$f''(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) = -32 < 0$$

Ejercicio 3:

Determinar los valores extremos de $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{4x^3}{3}$ con el criterio de la segunda derivada.

Solución: $f'(x) = x^4 - 4x^2 = x^2(x^2 - 4) = x^2(x - 2)(x + 2)$.

$$f''(x) = 4x^3 - 8x$$

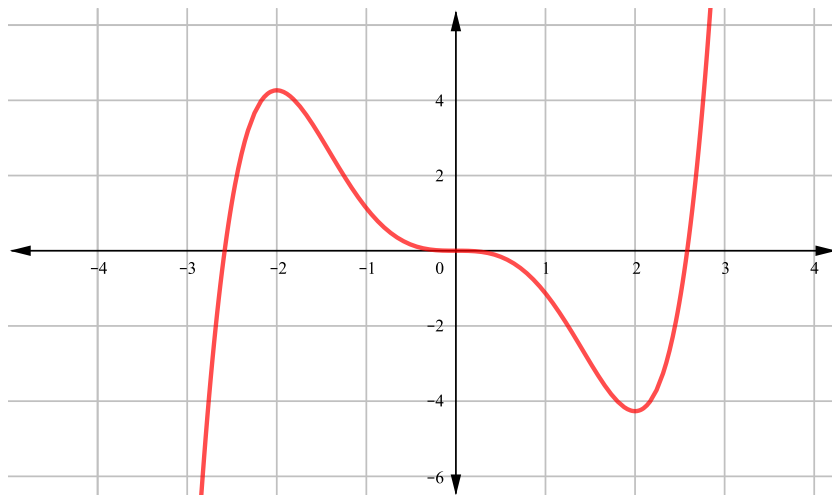
Los puntos críticos son $0, 2, -2$.

$$f''(0) = 0.$$

$$f''(2) = 4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2 = 32 > 0.$$

$$f''(-2) = 4 \cdot (-2)^3 - 8 \cdot (-2) = -32 < 0$$

Por lo tanto f tiene un máximo en $x = -2$, f tiene un mínimo en $x = 2$.



Ejercicio 4

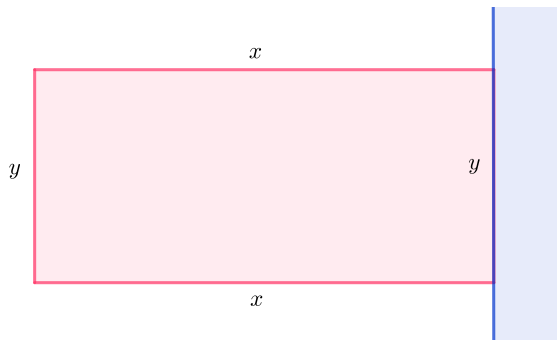
Un granjero dispone de 2400 metros de material de cerca, destinado a limitar un terreno rectangular contiguo a un río de curso rectilíneo. No se requiere cercar el río. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que este tenga área máxima? ¿Cuál es el valor de esa área?

Ejercicio 4

Un granjero dispone de 2400 metros de material de cerca, destinado a limitar un terreno rectangular contiguo a un río de curso rectilíneo. No se requiere cercar el río. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del terreno para que este tenga área máxima? ¿Cuál es el valor de esa área?

Solución: Sean x, y las dimensiones del terreno.

$$2400 = 2x + y$$



Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$A = x \cdot y$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \end{aligned}$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Escribimos $A(x) = 2400x - 2x^2$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Escribimos $A(x) = 2400x - 2x^2$

$$A'(x) = 2400 - 4x = 0$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Escribimos $A(x) = 2400x - 2x^2$

$$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 600.$$

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Escribimos $A(x) = 2400x - 2x^2$

$$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 600.$$

$A''(x) = -4 < 0$, por lo tanto el valor crítico encontrado necesariamente es un máximo.

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Escribimos $A(x) = 2400x - 2x^2$

$$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 600.$$

$A''(x) = -4 < 0$, por lo tanto el valor crítico encontrado necesariamente es un máximo. Luego, $y = 2400 - 2 \cdot 600 = 1200$. Por lo tanto, el terreno mide 600[m] de ancho por 1200[m] de largo.

Como se dispone de 2400 metros para cercar,

$$2400 = 2x + y \quad \Rightarrow y = 2400 - 2x$$

El área del rectángulo es:

$$\begin{aligned} A &= x \cdot y \\ &= x \cdot (2400 - 2x) \\ &= 2400x - 2x^2 \end{aligned}$$

Escribimos $A(x) = 2400x - 2x^2$

$$A'(x) = 2400 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = 600.$$

$A''(x) = -4 < 0$, por lo tanto el valor crítico encontrado necesariamente es un máximo. Luego, $y = 2400 - 2 \cdot 600 = 1200$. Por lo tanto, el terreno mide $600[m]$ de ancho por $1200[m]$ de largo. El área es $A = 600 \cdot 1200 = 720.000[m^2]$, o 72 hectáreas.

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0$

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow$

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

$$I''(x) = -\frac{1}{400} < 0.$$

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

$I''(x) = -\frac{1}{400} < 0$. Por lo tanto el valor encontrado es necesariamente un máximo.

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

$I''(x) = -\frac{1}{400} < 0$. Por lo tanto el valor encontrado es necesariamente un máximo.

El ingreso es $I(400) = 400 - \frac{400^2}{800} =$

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

$I''(x) = -\frac{1}{400} < 0$. Por lo tanto el valor encontrado es necesariamente un máximo.

El ingreso es $I(400) = 400 - \frac{400^2}{800} = 400 - \frac{160000}{800} =$

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

$I''(x) = -\frac{1}{400} < 0$. Por lo tanto el valor encontrado es necesariamente un máximo.

El ingreso es $I(400) = 400 - \frac{400^2}{800} = 400 - \frac{160000}{800} = 400 - 200 = 200$

Ejercicio 5

Considere la función ingreso I definida por $I(x) = x - \frac{x^2}{800}$, donde x representa el número de unidades producidas, e $I(x)$ es el ingreso en dólares. Determine el número de unidades para que el ingreso sea máximo, y determine ese ingreso

Solución: $I'(x) = 1 - \frac{x}{400} = 0 \Rightarrow x = 400$.

$I''(x) = -\frac{1}{400} < 0$. Por lo tanto el valor encontrado es necesariamente un máximo.

El ingreso es $I(400) = 400 - \frac{400^2}{800} = 400 - \frac{160000}{800} = 400 - 200 = 200$

Por lo tanto, produciendo 400 unidades se maximiza el ingreso, y este es igual a 200 *USD*

Ejercicio 6

Para que un paquete puede enviarse por su servicio de correos es necesario que la suma de la altura con el perímetro de la base no exceda los 250 cm. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se pueda enviar por este servicio.

Ejercicio 6

Para que un paquete puede enviarse por su servicio de correos es necesario que la suma de la altura con el perímetro de la base no exceda los 250 cm. Encuentre las dimensiones de la caja con base cuadrada de mayor volumen que se pueda enviar por este servicio.

Solución: Lado basal: $\frac{125}{3}$, altura: $\frac{250}{3}$

Ejercicios

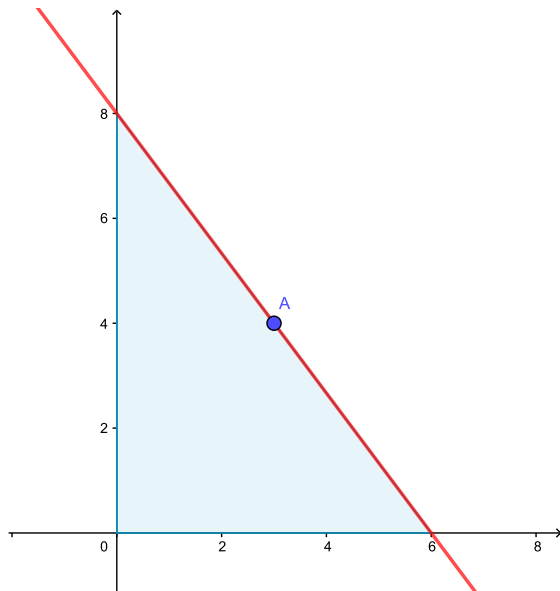
- 1 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,4)$ y determina en el primer cuadrante un triángulo con los ejes de área mínima.
- 2 Un granjero tiene 1200 metros de malla para encerrar un potrero doble con dos regiones rectangulares de áreas iguales. Hallar el área máxima que el granjero puede encerrar.
- 3 Leer ejemplo 435 de la página 348 de matemáticas para ingeniería.

Solución Ejercicio 1

La recta tiene ecuación $y - 4 = m(x - 3)$, es decir $y = mx + 4 - 3m$. Observe que la recta intersecta al eje Y en $(0, 4 - 3m)$, e intersecta al eje X en $(\frac{3m-4}{m}, 0)$. El triángulo formado es un triángulo rectángulo de base $\frac{3m-4}{m}$ y altura $4 - 3m$, luego, podemos construir una función que calcula el área del triángulo:

$$A(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3m - 4}{m} \cdot (4 - m)$$

Tenemos como restricción $m < 0$, pues en otro caso la recta no formará ningún triángulo.



Derivamos para minimizar, tenemos $A'(m) = \frac{16-9m^2}{2m^2}$. Luego,

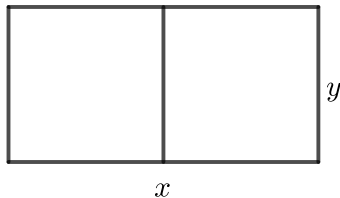
$$A'(m) = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{4}{3}$$

Nuestro candidato es $m = -\frac{4}{3}$. Para verificar que es un mínimo, calculamos $A''(m) = -\frac{16}{m^3}$, luego, la segunda derivada es positiva (si evaluamos en cualquier $m < 0$, por lo tanto en $m = -\frac{4}{3}$ hay un mínimo local, así, la ecuación de la recta que minimiza el área del rectángulo es $y = -\frac{4}{3}x + 8$.

En este caso, la base mide 6 y la altura mide 8 unidades, por lo tanto el área del triángulo es de 24 unidades cuadradas.

Solución ejercicio 2

Representamos el potrero como se ve en la imagen.



Si x, y son las dimensiones, entonces $2x + 3y = 1200$, pues los lados del potrero son paralelos y la suma debe ser igual a los 1200 metros de malla disponibles. Despejando, $y = \frac{1200-2x}{3}$. Podemos construir una función que modela el área total del potrero:

$$A(x) = x \cdot y = \frac{1200 - 2x}{3} \cdot x = 400x - \frac{2}{3}x^2$$

Luego, $A'(x) = 400 - \frac{4}{3}x = 0 \Leftrightarrow x = 300$. En este punto la función alcanza un mínimo, dado que A describe una parábola cóncava. Esto se verifica porque $A''(x) = -\frac{4}{3} < 0$. Entonces, $y = \frac{1200-2 \cdot 300}{3} = 200$, por lo tanto el área máxima que puede encerrarse es $60.000[m^2]$