

TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE

13 de octubre de 2023

Transformada de Laplace

Definición:

Sea f una función definida en la variable $t \geq 0$. La integral:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

es llamada **Transformada de Laplace** de f .

Ejemplos:

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad s > 0$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{L}\{e^{-3t}\} = \frac{1}{s+3} \quad s > -3$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{L}\{\sin(2t)\} = \frac{2}{s^2 + 4} \quad s > 0$$

A partir de las propiedades de la integral, resulta:

- $\mathcal{L}\{f + g\} = \mathcal{L}\{f\} + \mathcal{L}\{g\}$
- $\mathcal{L}\{\alpha f\} = \alpha \mathcal{L}\{f\}$

Resumen de Fórmulas:

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

Ejercicios

Calcular:

① $\mathcal{L}\{1 + 5t\}$

② $\mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10\sin(2t)\}$

③ $\mathcal{L}\{2t^4\}$

④ $\mathcal{L}\{4t - 10\}$

⑤ $\mathcal{L}\{t^2 + 6t - 10\}$

⑥ $\mathcal{L}\{1 + e^{4t}\}$

⑦ $\mathcal{L}\{(1 + e^{2t})^2\}$

⑧ $\mathcal{L}\{4t^2 - 5\sin(3t)\}$

⑨ $\mathcal{L}\{t^2 - e^{-9t} + 5\}$

Ejercicios

Calcular:

- ① $\mathcal{L}\{1 + 5t\}$
- ② $\mathcal{L}\{4e^{-3t} - 10\sin(2t)\}$
- ③ $\mathcal{L}\{2t^4\}$
- ④ $\mathcal{L}\{4t - 10\}$
- ⑤ $\mathcal{L}\{t^2 + 6t - 10\}$
- ⑥ $\mathcal{L}\{1 + e^{4t}\}$
- ⑦ $\mathcal{L}\{(1 + e^{2t})^2\}$
- ⑧ $\mathcal{L}\{4t^2 - 5\sin(3t)\}$
- ⑨ $\mathcal{L}\{t^2 - e^{-9t} + 5\}$

Soluciones:

- ① $\frac{1}{s} + \frac{5}{s^2}$
- ② $\frac{4}{s+3} - \frac{20}{s^2+4}$
- ③ $\frac{48}{s^5}$
- ④ $\frac{4}{s^2} - \frac{10}{s}$
- ⑤ $\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} - \frac{10}{s}$
- ⑥ $\frac{1}{s} + \frac{1}{s-4}$
- ⑦ $\frac{1}{s} + \frac{2}{s-2} + \frac{1}{s-4}$
- ⑧ $\frac{4}{s^3} - \frac{15}{s^2+9}$
- ⑨ $\frac{2}{s^3} - \frac{1}{s+9} + \frac{5}{s}$

Transformación Inversa de Laplace

- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{s^{n+1}} \right\} = t^n$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + k^2} \right\} = \sin(kt)$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + k^2} \right\} = \cos(kt)$

Nota: Esta transformación también tiene propiedad de linealidad

Ejercicios:

Calcular:

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^5} \right\}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 7} \right\}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2s + 6}{s^2 + 4} \right\}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2 - 4s} \right\}$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} \right\}$$

$$\textcircled{6} \quad \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)} \right\}$$

Ejercicios:

Calcular:

- ① $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^5} \right\}$
- ② $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s^2 + 7} \right\}$
- ③ $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{-2s + 6}{s^2 + 4} \right\}$
- ④ $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + 1}{s^2 - 4s} \right\}$
- ⑤ $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{6s^2 + 50}{(s + 3)(s^2 + 4)} \right\}$
- ⑥ $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s - 1)(s - 2)(s + 4)} \right\}$

Soluciones:

- ① $\frac{t^4}{24}$
- ② $\frac{1}{\sqrt{7}} \sin(\sqrt{7}t)$
- ③ $-2 \cos(2t) + 3 \sin(2t)$
- ④ $-\frac{1}{4} + e^{4t}$
- ⑤ $8e^{-3t} - 2 \cos(2t) + 3 \sin(2t)$
- ⑥ $-\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$