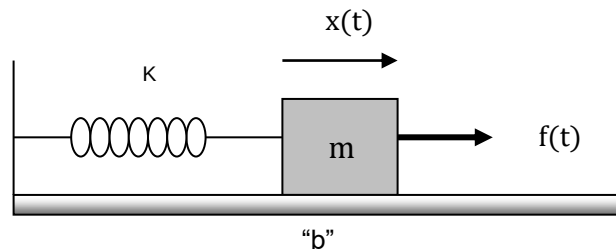


6.5 Ejemplo modelado de un sistema mecánico con desplazamiento lineal.

Considere un sistema constituido por un bloque de masa “m” y un resorte

de constante elástica “K”. El bloque se encuentra sobre una superficie rugosa.



Donde:

$f(t)$: es la fuerza exterior que actúa sobre la masa “m”.

$x(t)$: es la posición que adquiere el bloque en un tiempo “t”.

K: constante elástica del resorte.

m: masa del bloque.

$$a = \frac{dv}{dt}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$a = \frac{d\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt} = \ddot{x}$$

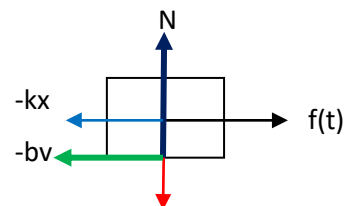
Si se conoce la fuerza aplicada $f(t)$ y las condiciones iniciales (posición y velocidad) puede determinarse la posición $x(t)$ del bloque en cualquier instante.

Utilizando la Segunda Ley de Newton en traslación, se tiene:

$$\sum F = ma$$

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$\sum F = m\ddot{x}$$



El rozamiento de la masa con la superficie da lugar a otra fuerza que se opone al desplazamiento y que puede suponerse proporcional a la velocidad con la constante de proporcionalidad “b”.

$$F_{\text{fricción}}(t) = -bv$$

$$F_{\text{fricción}}(t) = -b\dot{x}$$

Por Ley de Hooke, podemos obtener la fuerza aplicada por el resorte sobre el bloque:

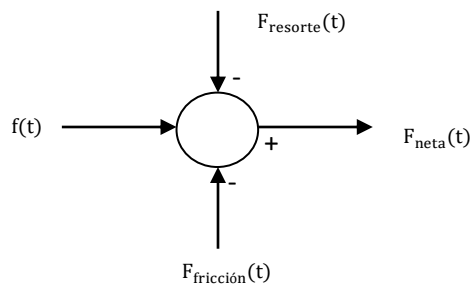
$$F_{\text{resorte}}(t) = -Kx$$

$$\sum F = m\ddot{x}$$

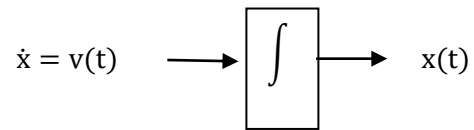
$$f(t) - kx - b\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$f(t) = F_{\text{resorte}}(t) + F_{\text{fricción}}(t) + F_{\text{neta}}(t)$$

Lo anterior se puede trabajar en el siguiente esquema:

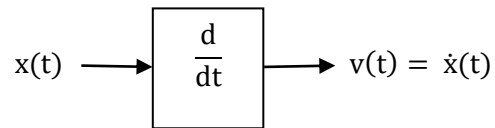


Utilizando integrador y derivador:



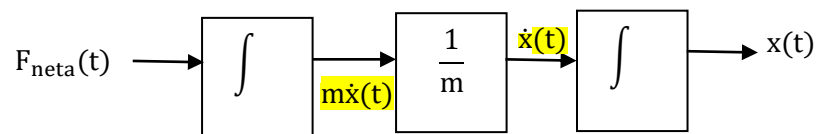
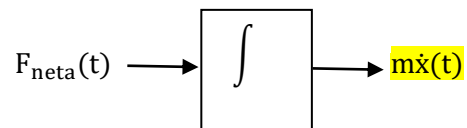
$$v = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$$

$$\int \dot{x} dt = \int \left(\frac{dx}{dt} \right) dt = x$$

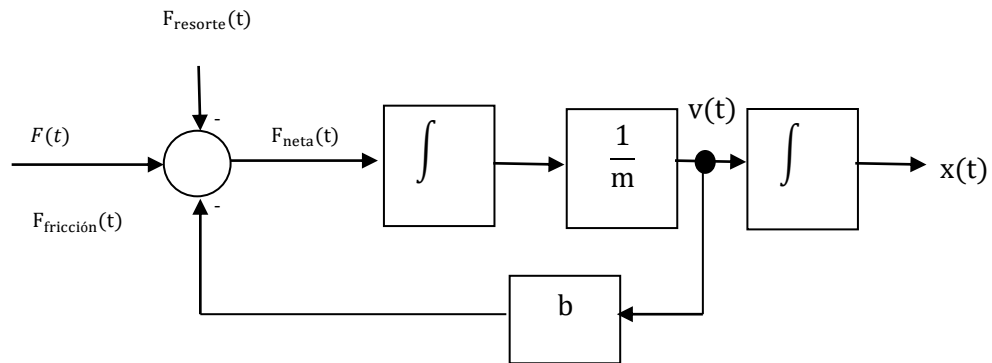


$$\frac{dx}{dt} = v = \dot{x}$$

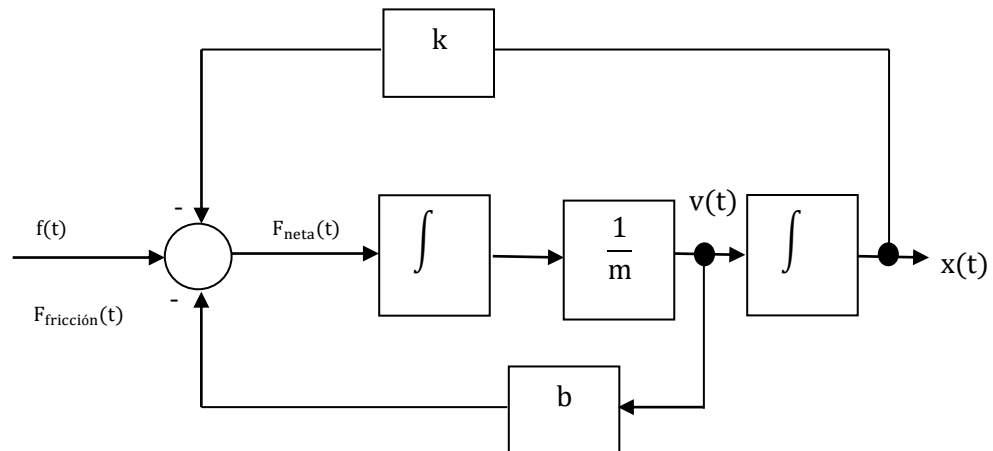
Para la Fuerza Neta:



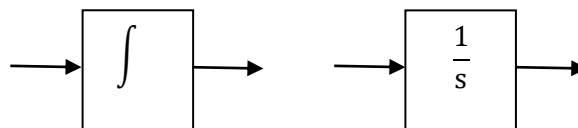
Para la fuerza de fricción: $F_{\text{fricción}}(t) = -bv$



Para la fuerza del resorte: $F_{\text{resorte}}(t) = -kx$



Pero:



Sea f una función definida para $t \geq 0$, la transformada de Laplace de $f(t)$ se define como:

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

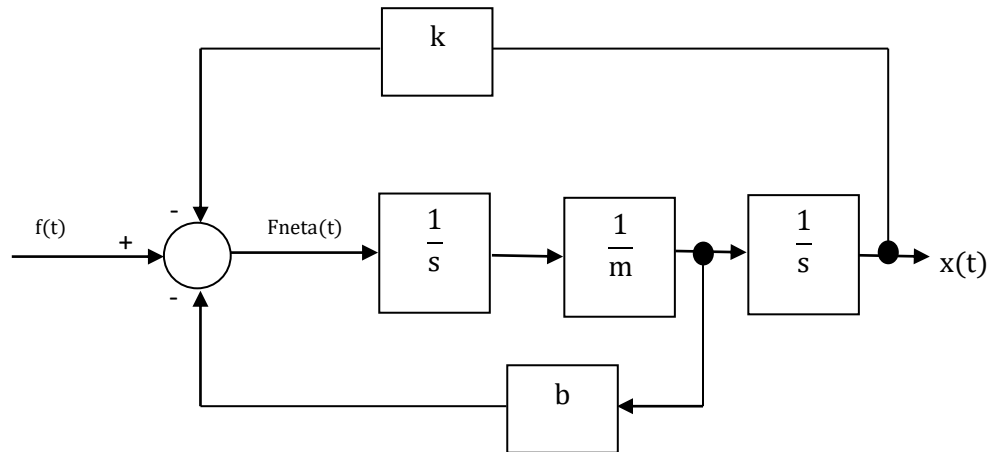
cuando tal integral converge.

Donde s es una variable compleja: $s = jw$

$$\mathcal{L}\left(\int f(t)dt\right) = \frac{1}{s} \mathcal{L}(f(t))$$

“Transformada de Laplace de una integral”

Finalmente, el diagrama de bloques correspondiente al modelado de un sistema mecánico con desplazamiento lineal, es:



Estableciendo la ecuación final para la posición que adquiere el bloque en tiempo “t”, se tiene:

$$F_{\text{neta}} = m \left(\frac{dv}{dt} \right)$$

$$v = \int_0^t \left(\frac{F_{\text{neta}}}{m} \right) dt$$

Pero: $v = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^t \left(\frac{F_{\text{neta}}}{m} \right) dt$$

$$dx = \left(\int_0^t \left(\frac{F_{\text{neta}}}{m} \right) dt \right) dt$$

$$x = \int_0^t \left(\int_0^t \frac{F_{\text{neta}}}{m} dt \right) dt$$

Nota: Se presenta la Tabla de Transformada de Laplace, para su uso en la solución de problemas de modelado.

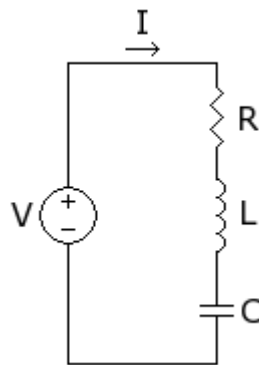
TABLA DE TRANSFORMADAS DE LAPLACE.	
$\delta(t)$	1
1	$\frac{1}{s}$
t	$\frac{1}{s^2}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
$\text{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\text{cos}\omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\text{sen}\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at}\text{cos}\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$t^n e^{-at}$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$

6.6 Ejemplo de determinación de la función de transferencia del circuito RLC.

Inicialmente se debe considerar:

Componente	Voltaje-Corriente	Voltaje-Carga	Impedancia
Resistor	$v_R(t) = i(t)R$	$v_R(t) = \frac{Rdq(t)}{dt}$	R
Capacitor	$v_c(t) = \left(\frac{1}{C}\right) \int_0^t i(t)dt$	$v_c(t) = \left(\frac{1}{C}\right) q(t)$	$\frac{1}{Cs}$
Inductor	$v_L(t) = \frac{Ldi(t)}{dt}$	$v_L(t) = \frac{Ld^2q(t)}{dt^2}$	Ls

Considerando el circuito mostrado en la figura:



Definimos:

V_L : diferencia de potencial en la inductancia.

V_R : diferencia de potencial en el resistor.

V_C : diferencia de potencial en el capacitor.

V : f.e.m

Realizando un L.V.K, se tiene:

$$V_L + V_R + V_C = V \quad (1)$$

$$\frac{Ldi(t)}{dt} + Ri(t) + V_c = V \quad (2)$$

Se sabe:

$$v(t) = \left(\frac{1}{C}\right) \int_0^t i(t) dt$$

Luego:

$$i(t) = C\left(\frac{dv_c}{dt}\right) \quad (3)$$

Reemplazando (3) en (2), se tiene:

$$LC\left(\frac{d^2V_c(t)}{dt^2}\right) + RC\left(\frac{dV_c(t)}{dt}\right) + V_c(t) = V(t)$$

Considerando la Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$$

Usando las Transformadas de Laplace, para derivadas:

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

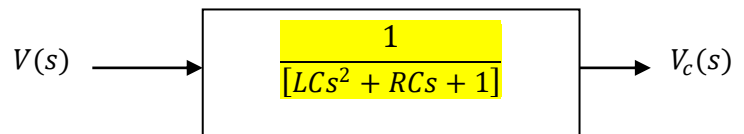
Tomando la Transformada de Laplace suponiendo condiciones iniciales cero:

$$LC[s^2V_c(s)] + RC[sV_c(s)] + V_c(s) = V(s)$$

$$V_c(s)[LCs^2 + RCs + 1] = V(s)$$

Despejando la Función de Transferencia, se tiene:

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{[LCs^2 + RCs + 1]}$$



6.7 Modelamiento de un Sistema Térmico.

Consideremos el calentamiento de un cuerpo, tal como, un horno, de una máquina eléctrica o de algún artefacto electrónico. Como primer control de variable tomaremos en cuenta temperatura homogénea.

Las variables a analizar son:

P: potencia calorífica.

P_c : potencia requerida para calentar el cuerpo.

P_f : potencia que fluye hacia el exterior.

C: capacidad térmica.

R: resistencia térmica.

T: temperatura de la resistencia térmica.

T_e : temperatura exterior.

El esquema que representa el fenómeno descrito es:

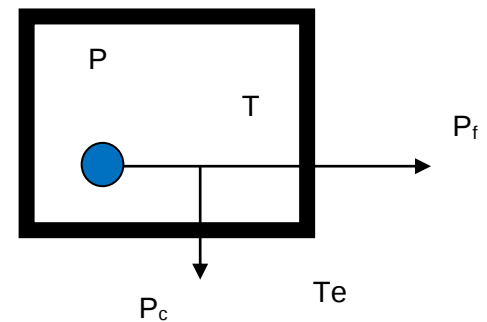
La potencia requerida para calentar el cuerpo, corresponde a:

$$P_c = C \left(\frac{dT}{dt} \right) \quad (1)$$

Pero:

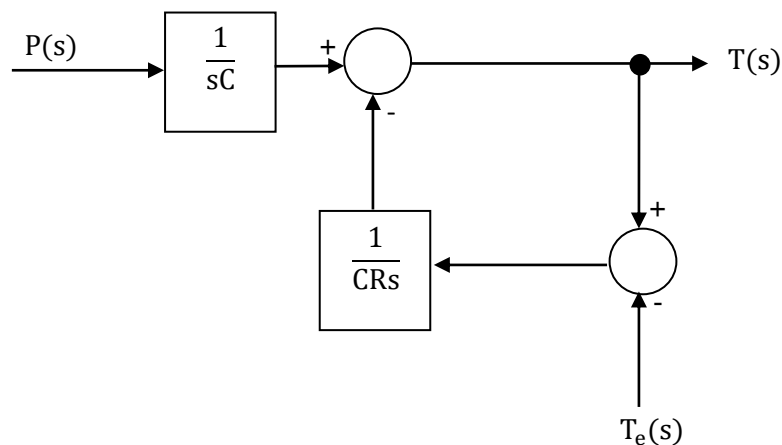
$$P_c = P - P_f \quad (2)$$

$$P_f = \frac{T - T_e}{R} \quad (3)$$



Reemplazando (3) y (1) en (2):

$$C \left(\frac{dT}{dt} \right) = P - \frac{(T - T_e)}{R}$$



6.8 Modelamiento de Ley de Enfriamiento de Newton.

Cuando la diferencia de temperaturas entre un cuerpo y su medio ambiente no es demasiado grande, el calor transferido hacia el cuerpo o desde el cuerpo por conducción, convección y radiación es aproximadamente proporcional a la diferencia de temperatura entre el cuerpo y el medio externo.

$$\frac{dQ}{dt} = \alpha S(T - T_a) \text{ ec. (1)}$$

Donde “ α ” es el coeficiente de intercambio de calor y “S” es el área del cuerpo.

Si la temperatura T del cuerpo es mayor que la temperatura del medio ambiente T_a , el cuerpo pierde una cantidad de calor dQ en el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + dt$, disminuyendo su temperatura T en dT .

Se tiene que: $dQ = -mcdT$ ec. (2)

Donde:

c : calor específico de la sustancia.

m : masa de la sustancia.

$\rho = \frac{m}{V}$: densidad volumétrica.

$$m = \rho V \text{ ec. (3)}$$

Reemplazando ec.(3) en ec.(2):

$$dQ = -\rho VcdT \text{ ec. (4)}$$

Reemplazando ec.(4) en ec.(1):

$$\frac{-\rho VcdT}{dt} = \alpha S(T - T_a)$$

$$\frac{dT}{dt} = -\left(\frac{\alpha S}{\rho Vc}\right)(T - T_a)$$

O bien:

$$\frac{dT}{dt} = -K(T - T_a)$$

Integrando esta ecuación con la condición inicial de que en el instante $t = 0$, la temperatura del cuerpo es T_o

$$\int_{T_o}^T \frac{dT}{(T - T_a)} = -K \int_0^t dt$$

Se obtiene la siguiente relación:

$$\ln(T - T_a) = -Kt + \ln(T_o - T_a)$$

Despejando, se tiene:

$$T = T_a + (T_o - T_a)e^{-kt}$$

Aplicando Transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(T_a) + \mathcal{L}((T_o - T_a)e^{-kt})$$

$$T(s) = \frac{T_a}{s} + \frac{T_o - T_a}{s + k}$$

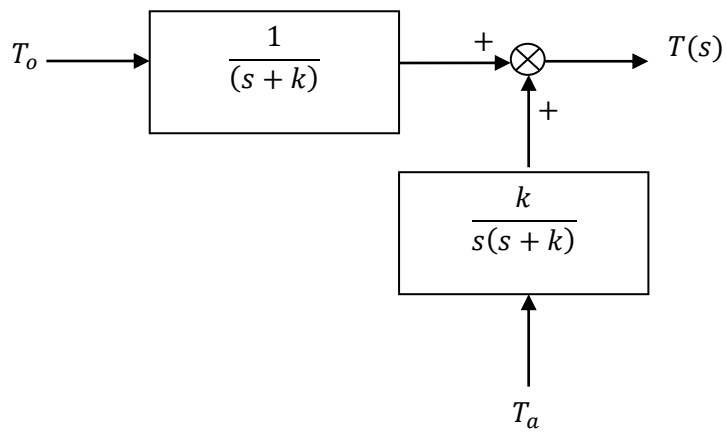
$$T(s) = \frac{T_a}{s} + \frac{T_o}{s+k} - \frac{T_a}{s+k}$$

$$T(s) = \frac{T_a}{s} - \frac{T_a}{s+k} + \frac{T_o}{s+k}$$

$$T(s) = \frac{[T_a(s+k) - T_a s]}{s(s+k)} + \frac{T_o}{s+k}$$

$$T(s) = \frac{T_a[(s+k) - s]}{s(s+k)} + \frac{T_o}{s+k}$$

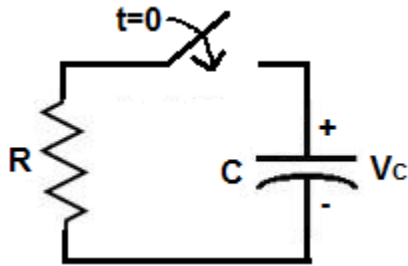
$$T(s) = \frac{T_a[k]}{s(s+k)} + \frac{T_o}{s+k}$$



6.9 Modelamiento de la Descarga de un Capacitor.

Para obtener la expresión que describe la descarga de un capacitor, es necesario considerar lo siguiente:

Ley de Ohm	$V_R = IR \quad (1)$
Capacitancia	$C = \frac{Q}{V_C} \quad (2)$
Intensidad de Corriente	$I = \frac{dQ}{dt} \quad (3)$
Constante de tiempo de descarga del capacitor	$\tau = RC \quad (4)$



Para el estudio de la descarga de un capacitor, se considerará un circuito de lazo cerrado, en el que se puede aplicar L.V.K (Ley de Voltaje de Kirchoff), quedando:

$$-V_C - V_R = 0$$

$$V_R = -V_C \quad (5)$$

Reemplazando (1) y (2) en (5):

$$IR = -\frac{Q}{C} \quad (6)$$

(3) en (6):

$$\left(\frac{dQ}{dt}\right)R = -\frac{Q}{C}$$

Despejando, se tiene:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC}$$

Integrando:

$$\int_0^{Q_0} \frac{dQ}{Q} = -\left(\frac{1}{RC}\right) \int_0^t dt$$

$$\ln \left[\frac{Q(t)}{Q_0} \right] = -\frac{t}{RC}$$

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Dividiendo por el valor de la capacitancia:

$$\frac{Q(t)}{C} = \left(\frac{Q_0}{C} \right) e^{-\frac{t}{RC}}$$

Se tiene:

$$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$

Para construir el diagrama de bloques correspondiente:

$$V(t) = V_c(t) + V_R(t)$$

$$V(t) = V_c(t) + i(t)R$$

Pero:

$$i(t) = C \left(\frac{dV_c}{dt} \right)$$

$$V(t) = V_c(t) + RC \left(\frac{dV_c}{dt} \right)$$

Aplicando Transformada de Laplace, considerando las condiciones iniciales cero:

$$\mathcal{L}[V(t)] = \mathcal{L}[V_c(t)] + \mathcal{L} \left[RC \left(\frac{dV_c}{dt} \right) \right]$$

$$V(s) = V_c(s) + RCsV_c(s)$$

$$V(s) = V_c(s)[1 + sRC]$$

$$\frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{[1 + sRC]}$$

