

Matrices y Sistemas de Ecuaciones

Claudia Barrera Robles

II semestre 2010

MATRICES

Definición: Se dice que $\mathbb{K}$, con las operaciones $+$ y $\cdot$ es un cuerpo, si cumple las siguientes propiedades:

1) $(\mathbb{K}, +)$ es un grupo abeliano:

a) Asociatividad:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{K}) ((x + y) + z = x + (y + z))$$

b) Elemento Neutro:

$$(\forall x \in \mathbb{K}) (\exists 0 \in \mathbb{K}) (x + 0 = 0 + x = x)$$

c) Elemento inverso:

$$(\forall x \in \mathbb{K}) (\exists (-x) \in \mathbb{K}) (x + (-x) = (-x) + x = 0)$$

d) Conmutatividad:

$$(\forall x, y \in \mathbb{K}) (x + y = y + x)$$

2) $(\mathbb{K}, \cdot)$ es un grupo abeliano:

a) Asociatividad:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{K}) ((x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z))$$

b) Elemento Neutro:

$$(\forall x \in \mathbb{K}) (\exists 1 \in \mathbb{K}) (x \cdot 1 = 1 \cdot x = x)$$

c) Elemento inverso:

$$(\forall x \in \mathbb{K}) (\exists x^{-1} \in \mathbb{K}) (x \cdot (x^{-1}) = (x^{-1}) \cdot x = 1)$$

d) Conmutatividad:

$$(\forall x, y \in \mathbb{K}) (x \cdot y = y \cdot x)$$

3) La multiplicación es distributiva:

$$(\forall x, y, z \in \mathbb{K}) ((x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z)$$

Ejercicio: Analice si los siguientes conjuntos numéricos son un cuerpo, si no lo son diga cual propiedad falla:

- 1) $\mathbb{N}$
- 2) $\mathbb{Z}$
- 3) $\mathbb{R}$
- 4) $\mathbb{C}$

- **Definición:**

- **Definición:**

- Una matriz A de orden (o tamaño) $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, es un arreglo rectangular de números reales con n filas y m columnas, es decir,

$$A = A_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(m-1)} & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Definición:**

- Una matriz A de orden (o tamaño) $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, es un arreglo rectangular de números reales con n filas y m columnas, es decir,

$$A = A_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(m-1)} & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- El elemento ubicado en la fila i y columna j se denota por a_{ij} .

Definición:

- Una matriz A de orden (o tamaño) $n \times m$ con coeficientes en un cuerpo $\mathbb{K}$, es un arreglo rectangular de números reales con n filas y m columnas, es decir,

$$A = A_{n \times m} = (a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1(m-1)} & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(m-1)} & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3(m-1)} & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{n(m-1)} & a_{nm} \end{pmatrix}$$

- El elemento ubicado en la fila i y columna j se denota por a_{ij} .
- Los elementos a_{ij} , donde $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ se llaman los coeficientes de la matriz y pertenecen a $\mathbb{K}$.

EJEMPLOS

- **Definiciones:** Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$

- **Definiciones:** Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$
- 1) $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$: denotará el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.

- **Definiciones:** Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$
- 1) $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$: denotará el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- 2) Si $n = m$: la matriz A se dice **cuadrada**.

- **Definiciones:** Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$
- 1) $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$: denotará el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- 2) Si $n = m$: la matriz A se dice **cuadrada**.
- 3) Las matrices A y B se dicen que son **iguales** si $n = p$, $m = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$

- **Definiciones:** Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{p \times q}$ dos matrices con coeficientes en $\mathbb{K}$
- 1) $\mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{K})$: denotará el conjunto de todas las matrices de orden $n \times m$ con coeficientes en $\mathbb{K}$.
- 2) Si $n = m$: la matriz A se dice **cuadrada**.
- 3) Las matrices A y B se dicen que son **iguales** si $n = p$, $m = q$ y $a_{ij} = b_{ij}$
- 4) Para una matriz A llamaremos **submatríz** de A a cada matríz que se obtenga de ella suprimiendo algunas de sus filas y/o columnas.

• OPERACIONES CON MATRICES

- **OPERACIONES CON MATRICES**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ dos matrices:

- **OPERACIONES CON MATRICES**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ dos matrices:

- **1) SUMA:**

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

- **OPERACIONES CON MATRICES**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ dos matrices:

- **1) SUMA:**

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Observaciones:**

- **OPERACIONES CON MATRICES**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ dos matrices:

- **1) SUMA:**

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Observaciones:**

- a) las matrices que se suman deben ser del mismo orden.

- **OPERACIONES CON MATRICES**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ dos matrices:

- **1) SUMA:**

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Observaciones:**

- a) las matrices que se suman deben ser del mismo orden.
- b) el orden de la matriz resultante se mantiene.

- **OPERACIONES CON MATRICES**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{n \times m}$ dos matrices:

- **1) SUMA:**

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1m} + b_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1} & a_{n2} + b_{n2} & \cdots & a_{nm} + b_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Observaciones:**

- a) las matrices que se suman deben ser del mismo orden.
- b) el orden de la matriz resultante se mantiene.
- c) $A + B = B + A$

- **2) MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR:**

• 2) MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR:

• Sea $\beta \in \mathbb{K}$

$$\beta \cdot A = (\beta \cdot a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} & \cdots & \beta \cdot a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta \cdot a_{n1} & \beta \cdot a_{n2} & \cdots & \beta \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

• 2) MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR:

- Sea $\beta \in \mathbb{K}$

$$\beta \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} & \cdots & \beta \cdot a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta \cdot a_{n1} & \beta \cdot a_{n2} & \cdots & \beta \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

• Observaciones:

- **2) MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR:**

- Sea $\beta \in \mathbb{K}$

$$\beta \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} & \cdots & \beta \cdot a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta \cdot a_{n1} & \beta \cdot a_{n2} & \cdots & \beta \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

- **Observaciones:**

- a) el orden de la matriz resultante se mantiene.

• 2) MULTIPLICACIÓN POR ESCALAR:

- Sea $\beta \in \mathbb{K}$

$$\beta \cdot A = (\alpha \cdot a_{ij})_{n \times m} = \begin{pmatrix} \beta \cdot a_{11} & \beta \cdot a_{12} & \cdots & \beta \cdot a_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta \cdot a_{n1} & \beta \cdot a_{n2} & \cdots & \beta \cdot a_{nm} \end{pmatrix}$$

• Observaciones:

- a) el orden de la matriz resultante se mantiene.
- c) $\beta \cdot A = A \cdot \beta$

- **3) MULTIPLICACIÓN:**

• 3) MULTIPLICACIÓN:

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{m \times q}$ dos matrices:

$$A \cdot B = C = \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times q}$$

- **3) MULTIPLICACIÓN:**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{m \times q}$ dos matrices:

$$A \cdot B = C = \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times q}$$

- **Observaciones:**

- **3) MULTIPLICACIÓN:**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{m \times q}$ dos matrices:

$$A \cdot B = C = \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times q}$$

- **Observaciones:**

- a) $A_{n \times m} \cdot B_{m \times q} = C_{n \times q}$

- **3) MULTIPLICACIÓN:**

- Sean $A = (a_{ij})_{n \times m}$ y $B = (b_{ij})_{m \times q}$ dos matrices:

$$A \cdot B = C = \left(c_{ij} = \sum_{k=1}^m a_{ik} \cdot b_{kj} \right)_{n \times q}$$

- **Observaciones:**

- a) $A_{n \times m} \cdot B_{m \times q} = C_{n \times q}$
- c) ¿ $A \cdot B = B \cdot A$?

● Definiciones:

- **Definiciones:**

- a) Se dice que dos matrices **conmutan** o son conmutativas si $A \cdot B = B \cdot A$

- **Definiciones:**

- a) Se dice que dos matrices **conmutan** o son conmutativas si $A \cdot B = B \cdot A$

- b) Se define la **matriz identidad** o unitaria de orden n a la matriz I , de la forma:

$$I = I_n = [\delta_{ij}] = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Definiciones:**

- a) Se dice que dos matrices **conmutan** o son conmutativas si $A \cdot B = B \cdot A$

- b) Se define la **matriz identidad** o unitaria de orden n a la matriz I , de la forma:

$$I = I_n = [\delta_{ij}] = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Se define la **matriz nula** a la matriz cuyos coeficientes son todos ceros.

- **Definiciones:**

- a) Se dice que dos matrices **conmutan** o son conmutativas si $A \cdot B = B \cdot A$

- b) Se define la **matriz identidad** o unitaria de orden n a la matriz I , de la forma:

$$I = I_n = [\delta_{ij}] = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- c) Se define la **matriz nula** a la matriz cuyos coeficientes son todos ceros.

- d) Se define la potencia n de A , como $A^n = A \cdot A \cdot \cdots \cdot A$ (n veces).

Definiciones: Sea $A = (a_{ij})_n$:

- a) Se dice que A es una **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0, i \neq j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definiciones: Sea $A = (a_{ij})_n$:

- a) Se dice que A es una **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0, i \neq j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- b) Se dice que A es una **matriz triangular superior** si $a_{ij} = 0$,
 $i > j$ (todo elemento bajo la diagonal es cero)

Definiciones: Sea $A = (a_{ij})_n$:

- a) Se dice que A es una **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0, i \neq j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- b) Se dice que A es una **matriz triangular superior** si $a_{ij} = 0$,
 $i > j$ (todo elemento bajo la diagonal es cero)
- c) Se dice que A es una **matriz triangular inferior** si $a_{ij} = 0$,
 $i < j$ (todo elemento sobre la diagonal es cero)

Definiciones: Sea $A = (a_{ij})_n$:

- a) Se dice que A es una **matriz diagonal** si $a_{ij} = 0, i \neq j$, es decir,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

- b) Se dice que A es una **matriz triangular superior** si $a_{ij} = 0$,
 $i > j$ (todo elemento bajo la diagonal es cero)

- c) Se dice que A es una **matriz triangular inferior** si $a_{ij} = 0$,
 $i < j$ (todo elemento sobre la diagonal es cero)

- d) Se dice que A es una **matriz triangular estrictamente superior**
si $a_{ij} = 0$, $i \geq j$

- e) Se dice que A es una **matriz triangular estrictamente inferior** si $a_{ij} = 0$, $i \leq j$

- e) Se dice que A es una **matriz triangular estrictamente inferior** si $a_{ij} = 0$, $i \leq j$
- f) Se dice A es **involutiva** si $A^2 = I$

- e) Se dice que A es una **matriz triangular estrictamente inferior** si $a_{ij} = 0$, $i \leq j$
- f) Se dice A es **involutiva** si $A^2 = I$
- g) Se dice A es **idempotente** si $A^2 = A$

- e) Se dice que A es una **matriz triangular estrictamente inferior** si $a_{ij} = 0$, $i \leq j$
- f) Se dice A es **involutiva** si $A^2 = I$
- g) Se dice A es **idempotente** si $A^2 = A$
- h) se dice A es **nilpotente** si existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A^k = 0$.

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.
- La traspuesta de A se denota por A^t .

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.
- La traspuesta de A se denota por A^t .
- **Propiedades:** Sean A y B matrices de orden $n \times m$ y $\beta \in \mathbb{K}$.

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.
- La traspuesta de A se denota por A^t .
- **Propiedades:** Sean A y B matrices de orden $n \times m$ y $\beta \in \mathbb{K}$.
- a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.
- La traspuesta de A se denota por A^t .
- **Propiedades:** Sean A y B matrices de orden $n \times m$ y $\beta \in \mathbb{K}$.
- a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- b) $(A + B)^t = A^t + B^t$

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.
- La traspuesta de A se denota por A^t .
- **Propiedades:** Sean A y B matrices de orden $n \times m$ y $\beta \in \mathbb{K}$.
 - a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
 - b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
 - c) $(\beta \cdot A)^t = (A \cdot \beta)^t = \beta \cdot A^t$

- **Definición:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- **Trasponer** una matriz A consiste en intercambiar sus filas por sus columnas, respetando la secuencia.
- La traspuesta de A se denota por A^t .
- **Propiedades:** Sean A y B matrices de orden $n \times m$ y $\beta \in \mathbb{K}$.
 - a) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
 - b) $(A + B)^t = A^t + B^t$
 - c) $(\beta \cdot A)^t = (A \cdot \beta)^t = \beta \cdot A^t$
 - d) $(A^t)^t = A$

- **Definiciones:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:

- **Definiciones:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
- a) Si $A = A^t$, se dice que A es **simétrica**.

- **Definiciones:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
 - a) Si $A = A^t$, se dice que A es **simétrica**.
 - b) Si $A = -A^t$, se dice que A es **antisimétrica**.

- **Definiciones:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
 - a) Si $A = A^t$, se dice que A es **simétrica**.
 - b) Si $A = -A^t$, se dice que A es **antisimétrica**.
- **Observación:**

- **Definiciones:** Sea $A = (a_{ij})_{n \times m}$:
 - a) Si $A = A^t$, se dice que A es **simétrica**.
 - b) Si $A = -A^t$, se dice que A es **antisimétrica**.
- **Observación:**
 - las matrices simétricas y antisimétricas son cuadradas.

- **Proposición:**

- **Proposición:**

- a) La suma y producto escalar de matrices simétricas es simétrica.

- **Proposición:**

- a) La suma y producto escalar de matrices simétricas es simétrica.
- b) El producto de matrices simétricas es simétrica si y sólo si las matrices conmutan.

MATRICES INVERTIBLES

- **Definición:**

MATRICES INVERTIBLES

- **Definición:**

- Se dice que una matriz cuadrada A es **invertible** (regular, no singular), si existe una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$.

MATRICES INVERTIBLES

- **Definición:**

- Se dice que una matriz cuadrada A es **invertible** (regular, no singular), si existe una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$.

- **Notación:**

MATRICES INVERTIBLES

- **Definición:**

- Se dice que una matriz cuadrada A es **invertible** (regular, no singular), si existe una matriz B tal que $A \cdot B = B \cdot A = I$.

- **Notación:**

- Si A es regular A^{-1} para la inversa de A .

EJEMPLOS

- **Proposición:**

- **Proposición:**
- La inversa de A es única.

- **Proposición:**
- La inversa de A es única.
- **Proposición:** Si A y B son regulares:

- **Proposición:**
- La inversa de A es única.
- **Proposición:** Si A y B son regulares:
- a) $A \cdot B$ es regular y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- **Proposición:**

- La inversa de A es única.

- **Proposición:** Si A y B son regulares:

- a) $A \cdot B$ es regular y $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- b) A^{-1} es regular y $(A^{-1})^{-1} = A$

DEMOSTRACIÓN

- Se define la inversa de una matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de orden 2 como:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

EJEMPLOS

- **Definición:**

- **Definición:**

- Dada una matriz A de orden $n \times m$, llamaremos operaciones elementales filas (O.E.F) sobre A a cada una de las siguientes operaciones:

- **Definición:**

- Dada una matriz A de orden $n \times m$, llamaremos operaciones elementales filas (O.E.F) sobre A a cada una de las siguientes operaciones:
 - a) F_{ij} : es el intercambio de la fila i con la fila j .

- **Definición:**

- Dada una matriz A de orden $n \times m$, llamaremos operaciones elementales filas (O.E.F) sobre A a cada una de las siguientes operaciones:
 - a) F_{ij} : es el intercambio de la fila i con la fila j .
 - b) $F_i(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por α veces la fila i , $\alpha \neq 0$.

- **Definición:**

- Dada una matriz A de orden $n \times m$, llamaremos operaciones elementales filas (O.E.F) sobre A a cada una de las siguientes operaciones:
 - a) F_{ij} : es el intercambio de la fila i con la fila j .
 - b) $F_i(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por α veces la fila i , $\alpha \neq 0$.
 - c) $F_{ij}(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por la suma de la fila i más α veces la fila j , $i \neq j$

- **Definición:**

- Dada una matriz A de orden $n \times m$, llamaremos operaciones elementales filas (O.E.F) sobre A a cada una de las siguientes operaciones:
 - a) F_{ij} : es el intercambio de la fila i con la fila j .
 - b) $F_i(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por α veces la fila i , $\alpha \neq 0$.
 - c) $F_{ij}(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por la suma de la fila i más α veces la fila j , $i \neq j$

- **Notación:**

● Definición:

- Dada una matriz A de orden $n \times m$, llamaremos operaciones elementales filas (O.E.F) sobre A a cada una de las siguientes operaciones:
- a) F_{ij} : es el intercambio de la fila i con la fila j .
- b) $F_i(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por α veces la fila i , $\alpha \neq 0$.
- c) $F_{ij}(\alpha)$: es el reemplazo de la fila i por la suma de la fila i más α veces la fila j , $i \neq j$

● Notación:

- Si A, B son matrices y B se obtiene desde A efectuando sobre ésta la operación elemental E , se anota $A \xrightarrow{E} B$

Ejemplo:

- Haga las siguientes operaciones filas para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

- Haga las siguientes operaciones filas para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) F_{13}

Ejemplo:

- Haga las siguientes operaciones filas para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) F_{13}
- b) $F_3(-2)$

Ejemplo:

- Haga las siguientes operaciones filas para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

- a) F_{13}
- b) $F_3(-2)$
- c) $F_{31}(2)$

- **Definición:**

- **Definición:**

- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice reducida por filas si:

- **Definición:**
- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice reducida por filas si:
 - a) el primer elemento no nulo de cada fila no nula de E es 1.

- **Definición:**

- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice reducida por filas si:
 - a) el primer elemento no nulo de cada fila no nula de E es 1.
 - b) Cada columna de E tiene sólo el primer elemento no nulo de alguna fila, el resto de los elementos son 0.

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Matrices reducidas por filas son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Ejemplo:**

- Matrices reducidas por filas son

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- No son matrices reducidas por filas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{¿por qué?}$$

- **Definición:**

- **Definición:**
- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice escalonada reducida por filas (E.R.F) si:

- **Definición:**
- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice escalonada reducida por filas (E.R.F) si:
 - a) E es reducida por filas

- **Definición:**
- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice escalonada reducida por filas (E.R.F) si:
 - a) E es reducida por filas
 - b) Toda fila nula de E , si las hay, estan debajo de todas las otras filas.

- **Definición:**

- Una matriz E de orden $n \times m$ se dice escalonada reducida por filas (E.R.F) si:

- a) E es reducida por filas

- b) Toda fila nula de E , si las hay, estan debajo de todas las otras filas.

- c) Si las filas $1, 2, \dots, r$ son las filas no nulas de E y si el primer elemento no nulo de la fila i está en la columna k_i , $i = 1, 2, \dots, r$, entonces

$$k_1 < k_2 < \dots < k_r$$

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Matrices E.R.F son

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Definición:**

- **Definición:**

- Sean A, B matrices en $M_{n \times m}(K)$, se dice que A es equivalente fila a B , si B se obtiene desde A por un número finito de operaciones elementales filas

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ¿es A equivalente por filas a una matriz E.R.F?

Proposición:

Toda matriz A es equivalente por filas a una única matriz E.R.F.

- **Definición:**

- **Definición:**

- Una matriz elemental de orden n , es la matriz identidad I luego de efectuarle una operación fila.

- **Definición:**

- Una matriz elemental de orden n , es la matriz identidad I luego de efectuarle una operación fila.

- Se anota:

$$I \xrightarrow{F_{ij}} E_{ij} \quad ; \quad I \xrightarrow{F_{ij}(\alpha)} E_{ij}(\alpha) \quad ; \quad I \xrightarrow{F_i(\alpha)} E_{ii}(\alpha)$$

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Calcule las matrices elementales E_{23} , $E_{12}(2)$, $E_{33}(4)$

- **Teorema:**

- **Teorema:**

- Sean A, B matrices de orden $n \times m$, si desde A se llega a B con operaciones elementales filas (o columnas), que enumeraremos por orden de ejecución, entonces existen matrices elementales filas $E_1, E_2, \dots, E_t$ de orden n , tales que

$$(E_t \cdot E_{t-1} \cdots E_2 \cdot E_1) A = B$$

- **Teorema:**

- Sean A, B matrices de orden $n \times m$, si desde A se llega a B con operaciones elementales filas (o columnas), que enumeraremos por orden de ejecución, entonces existen matrices elementales filas $E_1, E_2, \dots, E_t$ de orden n , tales que

$$(E_t \cdot E_{t-1} \cdots \cdots E_2 \cdot E_1) A = B$$

- **Observación:**

- **Teorema:**

- Sean A, B matrices de orden $n \times m$, si desde A se llega a B con operaciones elementales filas (o columnas), que enumeraremos por orden de ejecución, entonces existen matrices elementales filas $E_1, E_2, \dots, E_t$ de orden n , tales que

$$(E_t \cdot E_{t-1} \cdots \cdots E_2 \cdot E_1) A = B$$

- **Observación:**

- El teorema nos dice que existen matrices P y Q tales que $PAQ = B$

Ejemplo:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ determine P y B tal que $PA = B$.

- **Proposición:**

- **Proposición:**

- Toda matriz elemental es regular y se tiene:

- **Proposición:**

- Toda matriz elemental es regular y se tiene:

- a) $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

- **Proposición:**

- Toda matriz elemental es regular y se tiene:

- a) $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

- b) $(E_{ii}(\alpha))^{-1} = E_{ii}(\alpha^{-1}), \alpha \neq 0$

- **Proposición:**

- Toda matriz elemental es regular y se tiene:

- a) $(E_{ij})^{-1} = E_{ij}$

- b) $(E_{ii}(\alpha))^{-1} = E_{ii}(\alpha^{-1}), \alpha \neq 0$

- c) $(E_{ij}(\alpha))^{-1} = E_{ij}(-\alpha), \alpha \neq 0$

Ejemplo:

- Sea $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ escribir A como producto de matrices elementales.

- **Proposición:**

- **Proposición:**

- Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- **Proposición:**
- Las siguientes proposiciones son equivalentes:
- a) A es equivalente por fila a la matriz identidad

- **Proposición:**
- Las siguientes proposiciones son equivalentes:
 - a) A es equivalente por fila a la matriz identidad
 - b) A es producto de matrices elementales

- **Proposición:**

- Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- a) A es equivalente por fila a la matriz identidad

- b) A es producto de matrices elementales

- c) A es regular.

Ejemplo:

Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es regular.

- **Observación:**

- **Observación:**

- Sea A una matriz de orden n . Sabemos por la proposición anterior que si A es equivalente por fila a la matriz identidad, entonces A es regular.

- **Observación:**

- Sea A una matriz de orden n . Sabemos por la proposición anterior que si A es equivalente por fila a la matriz identidad, entonces A es regular.
- Luego existirá una matriz P tal que $PA = I$, donde P es el producto de matrices elementales $(E_t \cdot E_{t-1} \cdots \cdots E_2 \cdot E_1)$ y, por lo tanto, $P = A^{-1}$.

- **Observación:**

- Sea A una matriz de orden n . Sabemos por la proposición anterior que si A es equivalente por fila a la matriz identidad, entonces A es regular.
- Luego existirá una matriz P tal que $PA = I$, donde P es el producto de matrices elementales $(E_t \cdot E_{t-1} \cdots \cdots E_2 \cdot E_1)$ y, por lo tanto, $P = A^{-1}$.
- Si formamos la **matriz ampliada** $\left[A \ : \ I \right]$ de orden $n \times 2n$ y le aplicamos O.E.F de tal manera de que sea equivalente fila a una matriz de la forma $\left[I \ : \ P \right]$, entonces $P = A^{-1}$.

- **Observación:**

- Sea A una matriz de orden n . Sabemos por la proposición anterior que si A es equivalente por fila a la matriz identidad, entonces A es regular.
- Luego existirá una matriz P tal que $PA = I$, donde P es el producto de matrices elementales $(E_t \cdot E_{t-1} \cdots \cdots E_2 \cdot E_1)$ y, por lo tanto, $P = A^{-1}$.
- Si formamos la **matriz ampliada** $\left[A \ : \ I \right]$ de orden $n \times 2n$ y le aplicamos O.E.F de tal manera de que sea equivalente fila a una matriz de la forma $\left[I \ : \ P \right]$, entonces $P = A^{-1}$.
- Este es un método, llamado el **método del Gauss**, nos sirve para hallar la inversa de una matriz.

Ejemplo:

Demuestre que $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ es regular.

- **Determinante de una matriz**

- **Determinante de una matriz**

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se define el determinante de A , y se denota por $\det(A) = |A|$, como el número obtenido del siguiente modo:

- **Determinante de una matriz**

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se define el determinante de A , y se denota por $\det(A) = |A|$, como el número obtenido del siguiente modo:
 - a) si $n = 1$, es decir, $A = (a)$, entonces $\det(A) = |A| = a$

• Determinante de una matriz

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se define el determinante de A , y se denota por $\det(A) = |A|$, como el número obtenido del siguiente modo:
- a) si $n = 1$, es decir, $A = (a)$, entonces $\det(A) = |A| = a$
- b) Si $n = 2$, es decir, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = |A| = ad - bc$

- **Determinante de una matriz**

- Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ se define el determinante de A , y se denota por $\det(A) = |A|$, como el número obtenido del siguiente modo:
- a) si $n = 1$, es decir, $A = (a)$, entonces $\det(A) = |A| = a$

- b) Si $n = 2$, es decir, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, entonces $\det(A) = |A| = ad - bc$

- c) Si $n > 2$, entonces $|A| = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} \cdot a_{1j} \cdot |A_{1j}| = a_{11} |A_{11}| - a_{12} |A_{12}| + a_{13} |A_{13}| - a_{14} |A_{14}| + \dots$ donde $|A_{1j}|$ es el determinante de la submatriz de orden $n - 1$ obtenida desde A al eliminar la primera fila y la j - ésima columna.

Ejemplo:

Calcule el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Ejemplo:

Calcule el determinante de $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

- **Observación:**

- **Observación:**

- Dada una matriz A de orden 3, se puede calcular el determinante usando la **Regla de Sarrus**.

- **Observación:**

- Dada una matriz A de orden 3, se puede calcular el determinante usando la **Regla de Sarrus**.

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, se forma la matriz $\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$,

- **Observación:**

- Dada una matriz A de orden 3, se puede calcular el determinante usando la **Regla de Sarrus**.

- Si $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, se forma la matriz $\begin{pmatrix} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{pmatrix}$,

- luego el $\det(A) = (aei + bfg + cdh) - (ceg + afh + bdi)$

- **Propiedades:**

- **Propiedades:**

- a) $|A| = |A^t|$

- **Propiedades:**

- a) $|A| = |A^t|$

- b) $|I_n| = 1$

- **Propiedades:**

- a) $|A| = |A^t|$

- b) $|I_n| = 1$

- c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

- **Propiedades:**

- a) $|A| = |A^t|$

- b) $|I_n| = 1$

- c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

- d) Si todos los coeficientes de una fila o columna son ceros, entonces el determinante es cero.

- **Propiedades:**

- a) $|A| = |A^t|$

- b) $|I_n| = 1$

- c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$

- d) Si todos los coeficientes de una fila o columna son ceros, entonces el determinante es cero.

- e) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, entonces su determinante es cero.

• Propiedades:

- a) $|A| = |A^t|$
- b) $|I_n| = 1$
- c) $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- d) Si todos los coeficientes de una fila o columna son ceros, entonces el determinante es cero.
- e) Si una matriz tiene dos filas o columnas iguales, entonces su determinante es cero.
- f) Si a una matriz se le aplica sólo las O.E.F de la forma $F_{ij}(\alpha)$, entonces el determinante no cambia.

Teorema:

Sea A una matriz cuadrada. A es regular si y sólo si $\det(a) \neq 0$

Definición:

Dada una matriz A de orden n . Se define la matriz adjunta de A , como

$$\begin{aligned} \text{Adj}(A) &= \left[((-1)^{i+j} \cdot |A_{ij}|)_{ij} \right]^t \\ &= \begin{bmatrix} |A_{11}| & -|A_{12}| & \cdots & (-1)^{1+n} \cdot |A_{1n}| \\ -|A_{21}| & |A_{22}| & \cdots & (-1)^{2+n} \cdot |A_{2n}| \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

donde $|A_{ij}|$ es el determinante de la submatriz de orden $n - 1$ obtenida desde A al eliminar la fila i y la columna j .

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Calcule la adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- **Ejemplo:**

- Calcule la adjunta de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

- Respuesta: $Adj(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix}$

Proposición:

Si $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$ y es regular, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{Adj}(A)$$

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si es que existe.

- **Ejemplo:**

- Calcule la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, si es que existe.

- Respuesta: $A^{-1} = \frac{-1}{5} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 6 & -4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} & \frac{-1}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{-6}{5} & \frac{4}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix}$

Sistema de Ecuaciones Lineales

Consideremos el siguiente sistema de con n ecuaciones y m variables o incógnitas:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_m &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_m &= b_2 \\ \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \end{aligned} \right\}$$

Este sistema se puede escribir matricialmente como $AX = B$, donde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times m}(\mathbb{R});$$
$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{m \times 1}(\mathbb{R}); \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$$

Otra manera de escribirlo es, ampliar la matriz A :

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & B \end{bmatrix}_{n \times (m+1)}$$

Definición:

Diremos que dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

Un sistema es inconsistente si su conjunto solución es vacío.

Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales (cuadrados)

Sea $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{R})$; $B \in \mathbb{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$, tal que $|A| \neq 0$,
entonces el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ tiene única

solución $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, con $x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}$, $i = 1, \dots, n$

donde $\Delta_i = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$

$\uparrow$
columna i

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 7 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

- **Ejemplo:**

- Resolver por Cramer el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{array}{l} x - y + z = 7 \\ -x + 2y - z = 1 \\ 2x - y + z = 0 \end{array} \right\}$$

- Respuesta: $S = \{(-7, 8, 22)\}$

- **Proposición:**

- **Proposición:**

- Sea A una matriz de orden n y $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, entonces se tiene:

- **Proposición:**

- Sea A una matriz de orden n y $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, entonces se tiene:
 - a) Si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene única solución.

- **Proposición:**

- Sea A una matriz de orden n y $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales, entonces se tiene:
 - a) Si $\det(A) \neq 0$, entonces el sistema tiene única solución.
 - b) Si $\det(A) = 0$. entonces el sistema tiene infinitas o ninguna solución.

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$$

- **Ejemplo:**

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} = \\ = \\ = \end{bmatrix}$$

- Respuesta: $S = \{\}$

- **Definición:**

- **Definición:**

- Sea E una matriz E.R.F, se define el rango de E como el número de filas no nulas.

- **Definición:**

- Sea E una matriz E.R.F, se define el rango de E como el número de filas no nulas.

- **Notación:** $Rg(E)$: rango de E .

Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Proposición:

Dado un sistema $A_{n \times m} \cdot X_{m \times 1} = B_{n \times 1}$, entonces se cumple:

- a) Si $Rg(A) = Rg \begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix} \Rightarrow$ el sistema **tiene** solución.
- b) Si $Rg(A) = Rg \begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix} < m \Rightarrow$ el sistema posee **infinitas** soluciones.
- c) Si $Rg(A) = Rg \begin{bmatrix} A & : & B \end{bmatrix} = m \Rightarrow$ el sistema posee **única** solución.

- **Ejemplo:**

- **Ejemplo:**

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} = \\ = \\ = \end{cases}$$

- **Ejemplo:**

- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} = \\ = \\ = \end{bmatrix}$$

- Respuesta: $S = \{\}$