

Ecuación de la Onda.

Objetivos.

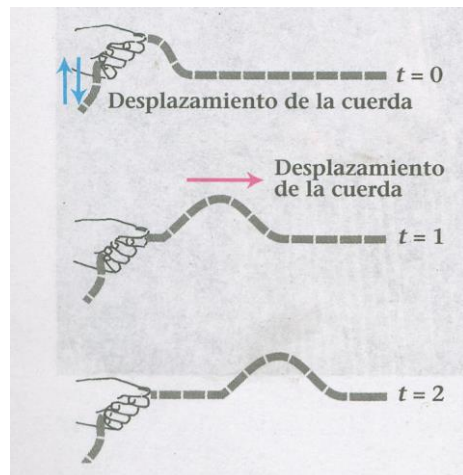
- ✓ Determinar la ecuación del movimiento de una onda.
- ✓ Establecer la ecuación de velocidad de propagación de una onda.
- ✓ Representar gráficamente un movimiento ondulatorio.

Conceptos Clave.

- ✓ Ecuación de onda.
- ✓ Velocidad de propagación transversal.
- ✓ Velocidad de propagación longitudinal.
- ✓ Potencia promedio.
- ✓ Intensidad.

Introducción.

La forma más sencilla para iniciar el estudio de las ondas es considerar la propagación de un pulso a lo largo de una cuerda. Si un extremo de una cuerda estirada tensamente se perturba en forma brusca y vuelta a su posición inicial, la acción genera un pulso de onda que viaja a lo largo de la cuerda hasta el otro extremo. Como puede ver en la figura, la vibración de la cuerda debido a este pulso de onda es perpendicular respecto a la dirección en la cual viaja el pulso. Por esta razón a este tipo de movimiento se le llama **pulso de onda transversal**.



Si observamos muy estrechamente cualquier punto particular de la cuerda, vemos que el movimiento de ese punto a lo largo de la dirección de la cuerda es muy ligero en comparación con el movimiento perpendicular a la cuerda.

Cada sección de la cuerda hace una sola oscilación hacia arriba y hacia abajo. Pero las oscilaciones no son independientes, porque cada sección de la cuerda está conectada a las secciones adyacentes. Así, la propagación de un pulso de onda transversal a lo largo de la cuerda es un movimiento colectivo de la cuerda entera, no simplemente el comportamiento aislado de alguna sección.

Además de distinguir entre el movimiento de un pulso, o de una onda, y el movimiento del medio (en este caso la cuerda), debemos distinguir la clase de movimientos que participan. Por ejemplo, la velocidad de una onda en una cuerda puede ser constante, mientras que la velocidad transversal de un punto de la cuerda puede ser senoidal en el tiempo. En este caso, las partículas de la cuerda oscilan hacia atrás y hacia adelante respecto a una posición de equilibrio, mientras que la onda se propaga a lo largo de la cuerda a su propia velocidad.

Las ondas electromagnéticas, como las de luz y de radio, son diferentes pues no requieren de un medio para su propagación.

El pulso que hemos descrito se llama **onda viajera**. El pulso ocurre en un lugar en un momento y en otro lugar en un tiempo posterior. La distancia que el pulso viaja es proporcional al tiempo transcurrido. Aquí tenemos una descripción muy general de una onda: **onda** es una perturbación que transfiere energía de un punto a otro sin impartir movimiento neto, a través del cual se propaga. Esta onda es muy general y como se puede apreciar, no requiere que la onda sea repetitiva.

Actividad 1: "Ondas armónicas".

"Supongamos que el extremo de un medio material es obligado a vibrar periódicamente, variando el desplazamiento "y" (transversal o longitudinal) con el tiempo".

Establecer de acuerdo con la ecuación del movimiento armónico simple la ecuación que rige el movimiento indicado anteriormente.

La ecuación obtenida se interpreta, como: "durante medio período, a través del medio el desplazamiento es en un cierto sentido, y durante otro medio período se propaga con un desplazamiento en el otro sentido".

Actividad 2: "Gráfica de ondas armónicas".

Construya una gráfica de ondas armónicas, de acuerdo a la siguiente tabla:

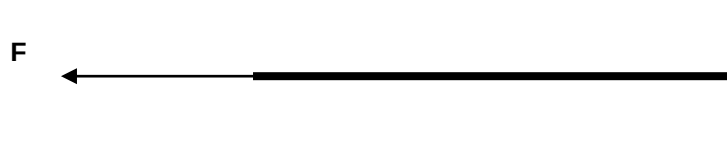
Y(0,t)									
t	0	T/8	T/4	3T/8	T/2	5T/8	3T/4	7T/8	T

Actividad 3: "Ecuación de velocidad".

Deduzca la ecuación de la velocidad constante con la que la onda se propaga, también llamada velocidad de fase, cuando avanza una distancia igual a una longitud de onda en un intervalo de tiempo de un período.

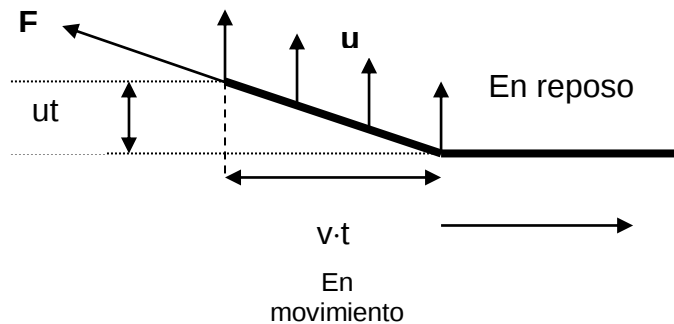
Actividad 4: “Velocidad de propagación transversal en una cuerda”.

Consideremos la cuerda representada en la figura, sometida a una tensión F y con una densidad lineal (masa por unidad de longitud) “ μ ”.



Inicialmente la cuerda se encuentra en reposo. En $t = 0$, se comunica al extremo izquierdo de la cuerda una velocidad transversal “ u ”.

La figura siguiente muestra la forma de la cuerda después de transcurrido un tiempo “ t ”.



El límite que separa las partes móvil y fija avanza hacia la derecha con velocidad de propagación “ v ”.

La velocidad de propagación de las ondas mecánicas transversales, producidas por ejemplo, en una cuerda de guitarra tensada en su armazón con una fuerza F , cuya masa por unidad de longitud es “ μ ”, es:

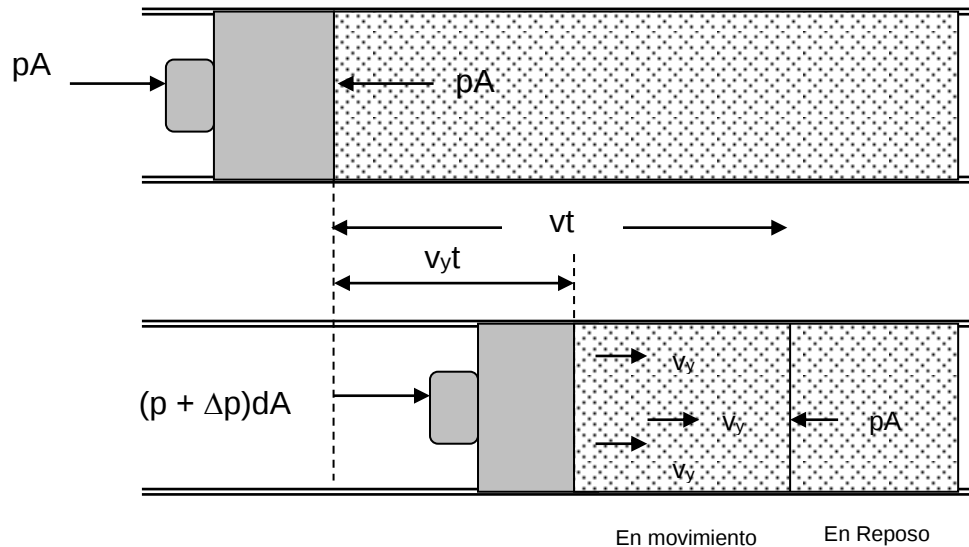
$$v = (F/\mu)^{1/2}$$

Actividad 5: “Ejemplo”

Un alambre de acero de 6 [m] de longitud tiene una masa de 60 [gr] y está sometido a una tensión de 100 [N]. ¿Cuál es la velocidad de propagación de una onda transversal en el alambre?

Actividad 6: “Velocidad de propagación longitudinal en un fluido”.

La figura representa un fluido (líquido o gas) de densidad “ ρ ” contenido en un tubo de sección transversal “ A ” y a la presión “ p ”.



Para determinar el aumento de presión en el fluido en movimiento, consideramos el módulo de compresibilidad: $B = -\Delta p/(\Delta V/V)$.

El módulo de compresibilidad permite determinar cuánto aumentó la presión debido a un cambio del volumen (es negativo porque una disminución de volumen = un aumento de la presión. Dicho de otro modo, si $\Delta V < 0$, $\Delta p > 0$).

El volumen original del fluido en movimiento, $V = v \cdot t \cdot A$, ha disminuido una cantidad:

$$\Delta V = -v_y t A$$

$$B = -\Delta p/(-Av_y t / Avt)$$

$$\Delta p = B(v_y/v)$$

La presión en el fluido en movimiento ha aumentado a $(p + \Delta p)$. La fuerza ejercida sobre esta parte del fluido es: $(p + \Delta p)A$.

La fuerza neta es por tanto: $A\Delta p = B(v_y/v)A$.

Según el teorema de impulso = cantidad de movimiento: $B(v_y/v)At = \rho v t A v_y$

De aquí, se obtiene la velocidad de propagación longitudinal en un fluido:

$$v = (B/\rho)^{1/2}$$

La velocidad aumenta con el módulo de compresibilidad (la fuerza de regreso al equilibrio) y disminuye con la densidad (la inercia).

Actividad 7: “Velocidad de propagación longitudinal para una barra”.

Esto se aplica también para sólidos y líquidos. Para una onda en una barra sólida, por ejemplo, hay una expansión lateral. Esto cambia un poco la rapidez de la onda:

$$v = (Y/\rho)^{1/2}$$

Donde “Y” es el módulo de Young. En todas estas ecuaciones, el numerador es una propiedad elástica del medio y el denominador es una propiedad proporcional a la inercia del medio.

Actividad 8: “Ejemplos”

Ejemplo 1.

Calcular la velocidad del sonido en una varilla de plomo, cuyo Módulo de Young es 1.6×10^{10} Pa y su densidad 11.3×10^3 kg/m³. Comparar con la velocidad del sonido en el aire.

Ejemplo 2.

Se golpea un extremo de una varilla de cobre de 180.00 m. Una persona en el otro extremo escucha dos sonidos causados por dos ondas longitudinales, una que viaja por la varilla y otra que viaja por el aire. Calcule el intervalo de tiempo entre los sonidos.

Para el cobre $Y = 1.1 \times 10^{11}$ Pa y $\rho = 8900$ kg/m³. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s.

Ejercicio 3.

Una barra metálica de 60.0 m tiene una densidad de 5000 kg/m³. Las ondas longitudinales tardan 1×10^{-2} s en llegar de un extremo al otro. Calcule el módulo de Young del metal.

Actividad 9: “Intensidad de onda de presión”.

La energía de un medio en la que se propaga una onda de presión es energía potencial.

Considerando el esquema de la Actividad 7, se tiene:

$$F = pA$$

$$dW = Fdx = pAdx = pdV : \text{Elemento del trabajo realizado.}$$

Al integrar se puede obtener:

$$W = \int pdV = U$$

Que corresponde a la **energía potencial que absorbe el sistema.**

Pero, considerando:

$$K = \rho_0(dp/d\rho)_0$$

Donde “K” es el Coeficiente de Compresibilidad de un material, que mide la resistencia a la compresión uniforme y, por tanto, indica el aumento de presión requerido para causar una disminución unitaria de volumen dado.

Con: $\rho_0 = m/V_0$

Donde: V_0 es el volumen inicial.

$$d\rho = d(m/V) = md(1/V) = -(m/V^2)dV$$

$$dV/d\rho = -(V^2/m)$$

Luego:

$$K = -(\rho_0 V_0^2/m)(dp/d\rho)_0 /dV$$

$$KdV = -(\rho_0 V_0^2/m)(dp/d\rho)_0 dV$$

$$kdV = -V_0 dp$$

$$dV/V_0 = -(1/K)dp$$

$$dV = -(V_0/K)dp$$

Con “P” sobrepresión, se tiene:

$$U = W = (V_o/K) \int p dp$$

$$U = W = (1/2)(V_o/K)P^2$$

Energía Potencial que absorbe el sistema en una compresión.

De aquí, se puede obtener la **Densidad de Energía**:

$$U/V_o = (1/2K)P^2$$

Si $P = P_{\text{máx}}$, entonces:

$$U = U_{\text{máx}} = (V_o/2K)P_{\text{máx}}^2$$

$$U_{\text{máx}}/V_o = (1/2K)P_{\text{máx}}^2$$

La energía acumulada en este elemento de volumen es igual a:

$$dE = (1/2K)P_{\text{máx}}^2 V_o = (1/2K)P_{\text{máx}}^2 (v dt) A$$

En el tiempo dt toda la energía comprendida en el elemento de volumen atravesará el área A , por lo tanto, el flujo de energía por unidad de área y unidad de tiempo, es:

$$I = dE/Adt = (v/2K)P_{\text{máx}}^2 = \text{Intensidad}$$

Pero:

$$v = (K/\rho_o)^{0.5}$$

$$K = v^2 \rho_o$$

Finalmente:

$$I = P_{\text{máx}}^2 / (2v\rho_o) = \text{Intensidad}$$

Actividad 10: “Ejemplo”

Calcule la intensidad de una onda sonora en el aire, en el oído interno, donde $P_{\text{máx}} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa a una temperatura de 20 °C, de modo que $\rho = 1.20$ kg/m³ y $v = 344$ m/s.

Actividad 11: “Ecuación de una onda”.

Supongamos que una onda sinusoidal (transversal o longitudinal) está avanzando hacia la derecha en un medio que se extiende indefinidamente en la dirección “x”. En un instante cualquiera, “t”, la elongación “y” de una partícula depende de su posición, o sea de su abscisa, “x”.

12.1 Grafique “y” en función de “t” y luego en función de “x”.

12.2 Determine la ecuación de la onda, escribiéndola en función de “t” y luego en función de “x”.

Actividad 12: “Ecuación de la onda en un sentido”.

Se observa que “y” es función de las variables independientes “x” y “t”. Escriba la ecuación de la onda sinusoidal (transversal o longitudinal) que se propaga en el sentido positivo de “x”.

Actividad 12: “Onda sinusoidal”.

En las ondas viajeras hemos supuesto que el desplazamiento “y” es cero en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Esto no tiene que ser siempre así.

La expresión general para una onda sinusoidal que viaje en la dirección “x” positiva es:

$$Y(x,t) = y_m \sin(Kx - \omega t + \phi)$$

Donde:

$(Kx - \omega t + \phi)$: fase de la onda.

“Se dice que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieren en cualquier múltiplo entero de 2π) están en “fase”; ejecutan el mismo movimiento al mismo tiempo.

ϕ : constante de fase.

“La constante de fase no afecta a la forma de onda; mueve a la onda hacia delante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo”.

Actividad 13: “Potencia Promedio e Intensidad”.

A menudo se considera que la entrada de potencia a la cuerda es el promedio en un periodo del movimiento.

La potencia promedio abastecida, entre t y $(t+T)$, es:

$$P_{\text{promedio}} = (1/T) \int P dt$$

Donde “ T ” es el período.

También se puede anotar como:

$$P_{\text{promedio}} = (1/2) y_m^2 \mu v \omega^2$$

La intensidad “ I ” se define como:

$$I = P_{\text{promedio}}/A$$

A : área normal a la dirección en que viaja la onda.

Nota: Cuando se transmite energía a lo largo de la cuerda, la energía se almacena en cada elemento de la cuerda como una combinación de energía cinética y de energía potencial de deformación. Esto es similar al caso del oscilador armónico simple.

Actividad 14: “Ejemplos”.

Ejemplo 1.

La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es:

$Y(x,t) = 2\cos[\pi(0,5x - 200t)]$, en la que “x” e “y” se miden en centímetros y “t” en segundos.

- Calcular la amplitud, longitud de onda, frecuencia, periodo y velocidad de propagación.
- Hacer un esquema de la forma de la cuerda para los siguientes valores de t: 0; 0,0025; y 0,005 [s].
- Si la masa de la cuerda por unidad de longitud es 5 [gr/cm], calcular la tensión.

Ejemplo 2.

La ecuación de una onda transversal que se propaga por una cuerda es:

$Y(x,t) = 6\cos[\pi(0,5x - 200t)]$, en la que “x” e “y” se miden en centímetros y “t” en segundos.

Determine la distancia entre los puntos P y Q que se encuentran ambos en $y = 2$ [cm].

Actividad 15: “Tarea”.

Una onda armónica que se mueve en la dirección “x” positiva tiene una amplitud de 3,0 [cm], una velocidad de 40 [cm/s] y una longitud de onda de 40 [cm]. Calcule el desplazamiento debido a la onda en:

- $X = 0,0$ [cm], $t = 2,0$ [s].
- $X = 10$ [cm], $t = 20$ [s].

Actividad 16: “Bibliografía”.

- ✓ Halliday, Resnick, Walker-Física Vol 1- Cap 28- Editorial CECSA-2002.
- ✓ Tipler-Física, conceptos y aplicaciones-Cap 21-Editorial McGraw Hill-2001.
- ✓ Sears, Zemansky, Young, Freedman-Física-Cap 22-Editorial Pearson Educación.
- ✓ Jones & Childers-Física Contemporánea-Cap 15-Editorial McGraw Hill-2001.

GUÍA DE EJERCICIOS.
Tema: ONDAS ARMÓNICAS.

1.- La función que describe cierto movimiento ondulatorio es:

$$y(x,t) = 0,05 \sin(16\pi(t-x/4))$$

Determine la amplitud, la frecuencia, el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de este movimiento.

Nota: x en metros y t en segundos.

Resp: $A = 0,05$ [m]

$\omega = 16\pi$ [rad/s]

$v = 4$ [m/s]

2.- Escriba la función que representa a una onda que se propaga en el sentido negativo del eje x, con velocidad de 40 [ciclos/s].

$$\text{Resp: } Y(x,t) = y_0 \cos(Kx + 80\pi t)$$

3.- Se genera una onda transversal sinusoidal en un extremo de una cuerda horizontal larga, mediante una barra que mueve el extremo hacia arriba y hacia abajo una distancia de 0,15 [m]. El movimiento es continuo y se repite regularmente dos veces cada segundo (MAS).

(a) Si la cuerda tiene una densidad lineal de 0,24 [Kg/m] y una tensión de 8,9 [N], calcular la velocidad, amplitud, frecuencia y longitud de onda del movimiento ondulatorio.

(b) Suponiendo que la onda se propaga de izquierda a derecha y que para $t=0$, el extremo de la cuerda ($x=0$) se encuentra en la posición de equilibrio $y=0$, escribir la ecuación de la onda.

(c) Al propagarse el tren de ondas, cada partícula de la cuerda oscila en dirección perpendicular a la de propagación. Determinar la velocidad y aceleración de una partícula a 3,05 [m] del extremo. ¿Puede escribirse el movimiento de esta partícula para $t=4$ [s]?

4.- Una partícula (A) de una onda transversal ha efectuado una oscilación completa. ¿A qué distancia de su posición de equilibrio se halla otra partícula (B) situada a 3 [cm] de (A), hacia delante? Considere que la amplitud es 5 [cm] y la longitud de onda es de 15 [cm].

5.- La ecuación de una onda transversal que se mueve a lo largo de una cuerda viene dada por $y(x,t) = 0,3 \sin \pi (0,5x - 50t)$, donde "x" e "y" están dados en centímetros y "t" en segundos.

(a) Hallar la amplitud, la longitud de onda, el número de ondas, la frecuencia, el período y la velocidad de la onda.

(b) Hallar la velocidad transversal máxima de cualquier partícula de la cuerda.

Resp:

(a) 0,3 [cm]; 4 [cm]; $0,5\pi$; 25 [Hz]; 0,04 [s]; 100 [cm/s]

(b) 47,1 [cm/s]

6.- Considérese una onda en el mar con $T = 10$ [s] y $\lambda = 15$ [m]. Un bote avanza con una velocidad de 0,5 [m/s] hacia la orilla (en la misma dirección de onda). ¿Con qué frecuencia sube y baja?

Determine una expresión para la frecuencia del bote, si este parte en el instante $t=0$ con velocidad 0,5 [m/s] y se acelera uniformemente con 0,1 [m/s²].

Resp: 0,03 [Hz]; $w = a/(v \cdot \tan \phi)$

7.- Un pescador en un bote anclado observa que las crestas de las olas lo pasan cada 2 [s] y que las crestas de las olas emplean 4 [s] para llegar a una boya a 13 [m] del bote. Calcular la longitud de onda de la ola.

Resp: $(13/2)$ [m]

8.- Una onda superficial de mar, de $\lambda = 8$ [m] avanza hacia la orilla con velocidad de 10 [m/s] de magnitud. Una balsa a 100 [m] de la orilla se encuentra en cierto instante en la altura máxima. ¿Cuánto tiempo después le toca a un bote que se encuentra a 60 [m] de la orilla estar en la mitad de su altura máxima?

Resp: 4,13 [s]

9.- Una onda transversal armónica de 10 [cm] de amplitud y de 200 [cm] de longitud de onda, viaja de izquierda a derecha a lo largo de una cuerda horizontal, larga y tensa, con rapidez de 100 [cm/s]. Considere el origen de un sistema de coordenadas en el extremo izquierdo de la cuerda no perturbada y el instante $t = 0$ cuando ese extremo pasa por el origen moviéndose hacia abajo.

- (a) Calcule la frecuencia, la frecuencia angular y la constante de propagación de la onda.
- (b) Determine la ecuación del movimiento del extremo izquierdo de la cuerda, la función de la onda y la ecuación del movimiento de una partícula de la cuerda a 150 [cm] a la derecha del origen.
- (c) Calcule la magnitud máxima de la velocidad transversal de cualquier partícula de la cuerda.
- (d) Calcule la velocidad transversal de una partícula a 150 [cm] a la derecha del origen, en el instante $t = 3,25$ [s].
- (e) Haga un gráfico de las formas de la cuerda en los instantes $t = 0$ y $t = 3,25$ [s], que represente los primeros 500 [cm] de la cuerda.

Resp:
0,5 [Hz]; π [rad/s]; π [rad/m].

10.- Una onda de frecuencia 500 [ciclos/s] tiene una velocidad de fase de 350 [m/s].

- (a) ¿Qué distancia hay entre dos puntos que tienen una diferencia de fase de 60° ?
- (b) ¿Cuál es la diferencia de fase entre dos desplazamientos que ocurren en cierto punto con un intervalo de 0,001 [s]?

11.- Una onda armónica se propaga a lo largo del eje x en el sentido positivo. Considérese dos puntos a una distancia de $3\lambda/4$ entre ellos. ¿Cuál es la diferencia de fase que presentan las perturbaciones producidas por la onda debida a tal separación? Si la frecuencia de la onda es 20 [ciclos/s] y la amplitud es de 10 [mm]. ¿Cuál será la perturbación del segundo punto 50 [m] después que se produjo la perturbación máxima en el primero?

12.- Un centro emisor de 1 [Watt] emite ondas esféricas en un medio isotrópico no absorbente. ¿Cuál es la intensidad de onda a 1 [m] del centro emisor?

13.- Una onda transversal sinusoidal de longitud de onda 20 [cm] se propaga por una cuerda. En el instante $t = T/4$ un punto ubicado a 4 [cm] del origen tiene una elongación igual a un tercio de la amplitud. ¿A qué distancia del origen se hallará un punto que en dicho instante ha alcanzado su posición extrema superior?

Resp:
0,08 m.

14.- Una onda transversal en una cuerda produce en cierto instante y en cierto lugar un desplazamiento de 0,5 [cm]. El desplazamiento máximo es 8 [cm], la magnitud de la velocidad de propagación vale 50 [m/s] y la frecuencia de vibración en un extremo es 20 [ciclos/s]. Calcule cuánto tiempo después un elemento de cuerda situado a 10 [m] más adelante tiene una velocidad de magnitud máxima.

15.- Una onda transversal sinusoidal de longitud $\lambda = 20$ [cm] se propaga por una cuerda hacia la derecha. En el instante $t = T/4$, el punto ubicado en el origen ha alcanzado su posición extrema superior.

¿Cuánto tiempo más tarde una partícula a 6 [cm] del origen alcanzará una elongación igual a $\frac{1}{4}$ de la amplitud por debajo de su posición de equilibrio?

16.- Un bote avanza con velocidad de 2 [m/s] en la misma dirección de las olas. Para esta $T = 10$ [s], $v = 3$ [m/s]. Otro bote lo persigue con velocidad V_2 habiendo partido en un instante en que se encontraba en una cúspide a 50 [m] del primer bote, y lo alcanza cuando tiene (el bote 2) por quinta vez la altura máxima. Calcular V_2 .