



EXAMEN
MATEMÁTICAS III

NOMBRE: Paula N° CAD. _____ CURSO: 3°EJ _____.

1. **DOCENTE(S):** S. Baquedano, C. Hardy, A. Rauch.
2. **FECHA:** NOVIEMBRE 2025.
3. **UNIDAD(ES) TEMÁTICA(S):** Integral indefinida - Integral definida - Aplicaciones
4. **TIEMPO:** 120 minutos
5. **PUNTAJE TOTAL - PUNTAJE PARA APROBAR:** 100 puntos – 60 puntos
6. **MATERIALES:** de escritorio, calculadora no algebraica.
7. **INDICACIONES:**
 - Lea cuidadosamente cada pregunta o problema propuesto, efectuando un análisis cuidadoso de la interrogante planteada.
 - Utilice lápiz pasta azul o negro. **Si escribe con lápiz grafito pierde derecho a corrección.**
 - **No se puede usar corrector. Si se equivoca, tache el error.**
 - Resuelva su prueba en forma ordenada, respetando la secuencia lógica que acompaña el desarrollo de un problema matemático.
 - Conteste todo en las hojas destinadas para responder.

8. **RESULTADOS OBTENIDOS:**

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	32	
2	15	
3	18	
4	20	
5	15	
Puntaje total	100	
NOTA		



PREGUNTA N°1 (32 puntos)

Capacidad : Razonamiento Lógico.

Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y reglas de integración.

Contenido : Reglas básicas de integración. Métodos de integración.

Resolver las siguientes integrales indefinidas:

a) $\int \left(2 \operatorname{tg}(x) + \frac{4+x^3}{x} - \sqrt[5]{x^3} + 7 \right) dx$

$$= 2 \int \operatorname{tg}(x) dx + \int \frac{4}{x} dx + \int x^2 dx - \int x^{3/5} dx + 7 \int dx$$

$$= 2 \ln|\sec(x)| + 4 \ln|x| + \frac{x^3}{3} - \frac{x^{8/5}}{8/5} + 7x + C_f$$

b) $\int x^3 \cdot e^{3x^4} dx$

$$u = 3x^4$$

$$du = 12x^3 dx$$

$$\frac{du}{12} = x^3 dx$$

$$\int e^u \cdot \frac{du}{12} = \frac{1}{12} e^u + C$$

$$= \frac{1}{12} e^{3x^4} + C //$$



c) $\int x \cdot \cos(2x) dx$

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= \cos(2x) dx \\ du &= dx & v &= \frac{\sin(2x)}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int x \cos(2x) dx &= x \cdot \frac{\sin(2x)}{2} - \int \frac{\sin(2x)}{2} dx \\ &= \frac{x \sin(2x)}{2} - \frac{1}{2} \int \sin(2x) dx \\ &= \frac{x \sin(2x)}{2} - \frac{1}{2} \cdot -\frac{\cos(2x)}{2} + C \\ &= \frac{x \sin(2x)}{2} + \frac{1}{4} \cos(2x) + C \end{aligned}$$



$$d) \int \frac{2x^2 - 2x - 6}{(x^2 - 1)(x + 2)} dx$$

$$\int \frac{2x^2 - 2x - 6}{(x+1)(x-1)(x+2)} dx$$

$$\frac{2x^2 - 2x - 6}{(x+1)(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \quad | \quad (x+1)(x-1)(x+2)$$

$$2x^2 - 2x - 6 = A(x-1)(x+2) + B(x+1)(x+2) + C(x+1)(x-1)$$

$$x=1$$

$$-6 = 6B$$

$$\boxed{B = -1}$$

$$x=-2$$

$$8 + 4 - 6 = 3C$$

$$6 = 3C$$

$$\boxed{C = 2}$$

$$x=-1$$

$$2 + 2 - 6 = -2A$$

$$-2 = -2A$$

$$\boxed{A = 1}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x+1} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx + \int \frac{2}{x+2} dx$$

$$= \ln|x+1| - \ln|x-1| + 2 \ln|x+2| + C //$$



PREGUNTA N°2 (15 puntos)

Capacidad	: Razonamiento Lógico.
Objetivo	: Aplicar teoremas y propiedades en el cálculo de integrales definidas
Contenido	: Integral definida

Calcular $\int_{-2}^5 f(x) dx$

Donde $f(x) = \begin{cases} 5 & ; -2 \leq x < 0 \\ x+1 & ; 0 \leq x < 2 \\ x^2+x & ; 2 \leq x < 5 \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_{-2}^5 f(x) dx &= \int_{-2}^0 5 dx + \int_0^2 (x+1) dx + \int_2^5 (x^2+x) dx \\ &= (5x) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_0^2 + \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_2^5 \\ &= (0 - 10) + (2 + 2 - 0) + \left(\frac{125}{3} + \frac{25}{2} - \left(\frac{8}{3} + 2 \right) \right) \\ &= 10 + 4 + \left(\frac{325}{6} - \frac{14}{3} \right) \\ 14 + \frac{99}{2} &= \frac{127}{2} // \end{aligned}$$



PREGUNTA N°3 (18 puntos)

Capacidad : Razonamiento Lógico.

Objetivo : Aplicar la integral definida en la resolución de problemas de volúmenes de sólidos de revolución.

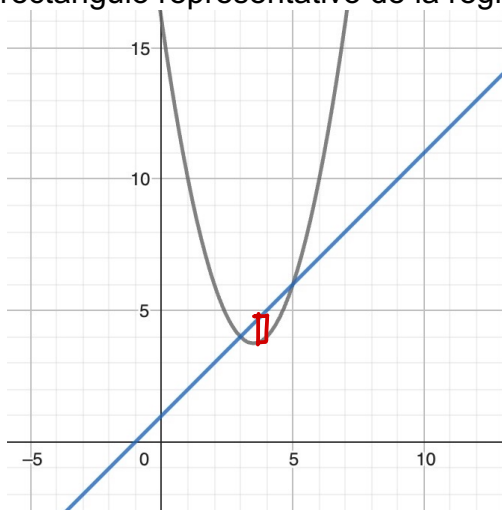
Contenido : Volúmenes de sólidos de revolución

Dadas las siguientes curvas:

$$y = x^2 - 7x + 16$$

$$y = x + 1$$

- a) Grafique y dibuje el rectángulo representativo de la región comprendida entre ellas.



- b) Calcular puntos de intersección.

$$\begin{aligned} x^2 - 7x + 16 &= x + 1 \\ x^2 - 8x + 15 &= 0 \\ (x - 5)(x - 3) &= 0 \\ x &= 3 \quad \quad x = 5 \end{aligned}$$

- c) **EXPRESAR** mediante integrales el volumen del sólido generado al rotar la región encerrada por las curvas en torno a eje indicado:

i. Eje X

$$V_x = \pi \int_3^5 [(x+1)^2 - (x^2 - 7x + 16)^2] dx$$

ii. Eje Y

$$V_y = 2\pi \int_3^5 x [x+1 - (x^2 - 7x + 16)] dx$$



PREGUNTA N°4 (17 puntos)

Capacidad : Razonamiento Lógico. Resolver Problemas.

Objetivo : Formular un plan de trabajo al resolver problemas que involucren aplicaciones de la integral.

Contenido : Problemas de aplicación.

Una estructura metálica a una temperatura de $120^{\circ} F$ se instala dentro de una habitación que se encuentra a una temperatura constante de $5^{\circ} F$. Después de 25 minutos la temperatura de la estructura metálica es de $70^{\circ} F$. Determinar:

- La ecuación de la temperatura T en función del tiempo t .
- El tiempo que tarda la estructura metálica en llegar a una temperatura de $30^{\circ} F$.
- La temperatura de la estructura metálica después de 40 minutos.

OBSERVACIÓN: Escribir sus resultados finales aproximando a 4 decimales.

$$T(0) = 120^{\circ} F$$

$$T_A = 5^{\circ} F$$

$$T(25) = 70^{\circ} F$$

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 5)$$

$$\frac{dT}{T - 5} = k dt \quad \Big| \int$$

$$\ln |T - 5| = k \cdot t + C \quad | e$$

$$T - 5 = e^{kt+C} = e^{kt} \cdot e^C$$

$$T = C_1 \cdot e^{kt} + 5$$

$$T(0) = 120$$

$$120 = C_1 \cdot e^0 + 5$$

$$115 = C_1$$

$$T(25) = 70^{\circ} F$$

$$70 = 115 \cdot e^{k \cdot 25} + 5$$

$$65 = 115 \cdot e^{25k}$$

$$k = -0,0228$$

$$a) T = 115 \cdot e^{-0,0228 \cdot t} + 5$$

$$b) 30 = 115 \cdot e^{-0,0228 \cdot t} + 5$$

$$t = 66,9323 \text{ min.}$$

$$c) T = 115 \cdot e^{-0,0228 \cdot 40} + 5$$

$$T = 51,1978^{\circ} F //$$



PREGUNTA N°5 (17 puntos)

Capacidad Evaluada: Razonamiento lógico. Resolver problemas.

Objetivo: Formular un plan de trabajo al resolver problemas que involucren aplicaciones de la derivada.

Contenido: Problemas de aplicación de derivadas.

La función $G(x) = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x + 10$, indica la ganancia obtenida en miles de pesos al vender x productos. $(0 \leq x \leq 10)$

- Indicar cual es la ganancia al vender 6 unidades
- Indicar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función
- ¿Cuántos productos se deben vender para obtener la ganancia máxima?
- ¿Cuál es la ganancia máxima?
- ¿Cuántos productos se deben vender para obtener la ganancia mínima?
- ¿Cuál es la ganancia mínima?

$$a) G(6) = \frac{6^3}{3} - 3 \cdot 6^2 + 8 \cdot 6 + 10$$

$$= 22 \text{ mil peson.}$$

$$G'(x) = \frac{3x^2}{3} - 6x + 8$$

$$x^2 - 6x + 8$$

$$(x - 2)(x - 4)$$

	0	2	4	10
$x - 2$	-	0	+	+
$x - 4$	-	-	0	+
	+	-	+	

$\nearrow$ $\searrow$ $\nearrow$

b) Intervalos crecimiento: $]0, 2[\cup]4, \infty[$
 " decrecimiento: $]2, 4[$

c) 2 o 10 productos.

$$d) G(2) = \$16.667$$

$$G(10) = \$123.333$$

e) 4 productos

$$f) G(4) = \$15.333$$