

MATRICES

Definición y Notación Formal

Una matriz es un arreglo rectangular de números reales dispuestos en m filas y n columnas.

$$A = [a_{ij}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El elemento a_{ij} se ubica en la fila i y columna j . El conjunto se denota $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Ejemplo Práctico

Matriz de orden 2×3 (2 filas, 3 columnas):

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Fila 1, Columna 2 : $a_{12} = 3$

Fila 2, Columna 1 : $a_{21} = -1$

Matrices Especiales

Matriz Cuadrada

Mismo número de filas y columnas ($m = n$).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Orden 2

Matriz Nula

Todos sus elementos son cero ($a_{ij} = 0$).

$$\mathbf{0}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Orden 2×3

Matriz Identidad

Matriz cuadrada; diagonal principal con 1, el resto 0.

$$I_3 = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

Orden 3

Matrices Especiales

Matriz Diagonal

Ceros fuera de la diagonal principal.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Superior

Elementos bajo la diagonal principal son ceros.

$$U = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Matriz Triangular Inferior

Elementos sobre la diagonal principal son ceros.

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

Matriz Transpuesta (A^t)

El Intercambio

Trasponer una matriz A de orden $m \times n$ consiste en escribir sus filas como columnas. Resulta en A^t de orden $n \times m$.

$$A = [a_{ij}] \Rightarrow A^t = [a_{ji}]$$

Propiedades Fundamentales:

1. $(A^t)^t = A$
2. $(A + B)^t = A^t + B^t$
3. $(k \cdot A)^t = k \cdot A^t$
4. $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

Ejemplo de Transformación

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$
$$A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ -3 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices Simétricas y Antisimétricas

Simétrica ($A = A^t$)

Condición: $a_{ij} = a_{ji}$

Reflejo idéntico respecto a la diagonal principal.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Antisimétrica ($A = -A^t$)

Condición: $a_{ij} = -a_{ji}$

Reflejo con signo opuesto y diagonal obligatoria de ceros.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

ÁLGEBRA DE MATRICES

SUMA DE MATRICES

Condición: Las matrices deben tener el mismo orden ($m \times n$).

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}]$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$$

Multiplicación por escalar

Definición: Cada elemento de la matriz se multiplica por el escalar c .

$$c \cdot A = c \cdot [a_{ij}] = [c \cdot a_{ij}]$$

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

Igualdad de Matrices:

Dos matrices A y B son iguales si tienen el mismo orden y $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j .

Producto de Matrices ($A \cdot B$)

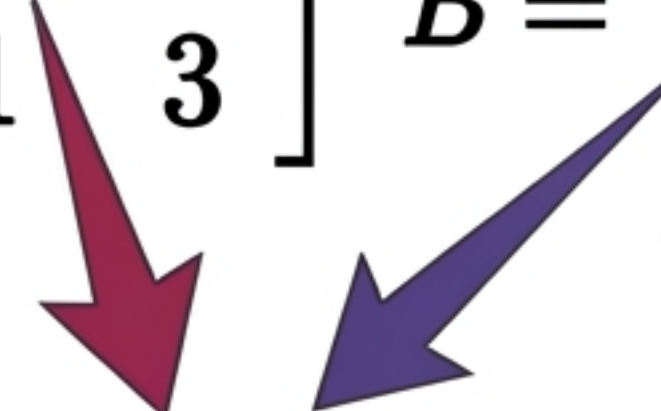
Condición y Definición

Regla de Existencia:
Columnas de A = Filas de B .

Si $A_{m \times n}$ y $B_{n \times p} \Rightarrow C_{m \times p}$.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n (a_{ik} \cdot b_{kj})$$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$


$$\begin{aligned} A \cdot B &= \begin{pmatrix} (1) \cdot (2) + (0) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1) & (1) \cdot (1) + (0) \cdot (0) + (-1) \cdot (2) \\ (2) \cdot (2) + (1) \cdot (-1) + (3) \cdot (1) & (2) \cdot (1) + (1) \cdot (0) + (3) \cdot (2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}_{(2 \times 2)} \end{aligned}$$

Propiedades y No Conmutatividad

Propiedades

- Asociativa:
 $A(BC) = (AB)C$
- Distributiva:
 $A(B + C) = AB + AC$
 $(A + B)C = AC + BC$
- Producto Neutro:
 $A \cdot I = I \cdot A = A$

La Regla de Oro: $AB \neq BA$

El orden de los factores sí altera el producto.

$$\text{Sean } A = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operaciones Elementales por Fila (OEF)

Herramientas para transformar matrices internamente

Herramienta: Permutación (F_{ij})

Intercambiar fila i con fila j .

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_{12} \updownarrow} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Herramienta: Ponderación ($F_i(r)$)

Multiplicar fila i por escalar $r \neq 0$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \xrightarrow{F_2(1/2)} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Herramienta: Suma de Múltiplo ($F_{ij}(k)$)

Reemplazar fila i por [fila $i + k \cdot$ fila j].

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[F_{21}(-2)]{(Fila\ 2 + (-2) \cdot Fila\ 1)} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicación: Matrices Equivalentes ($A \sim B$)

Secuencia para reducir una matriz a la Identidad.

Objetivo:

Transformar A en I_2 .

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Paso 1: } F_{12}]{} \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Paso 2: } F_1(1/2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{Paso 3: } F_{12}(-2)]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

1.d. Matriz Inversa (A^{-1}) y sus Propiedades

Definición

B es inversa de A (cuadrada) sí y sólo sí:

$$AB = BA = I_n$$

Si posee inversa es Regular/Invertible.

Si no, es Singular.

Propiedades Clave:

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

$$(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

Comprobación

$$\text{Dada } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Verificación: $A \cdot A^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 \\ -1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & -1 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2$$

Insight: La interacción de ambas anula sus efectos, devolviendo la Identidad.

Método de Gauss-Jordan para A^{-1}

$$[A \mid I_n] \xrightarrow{\text{--OEF}} [I_n \mid A^{-1}]$$

Ejemplo Práctico: Hallar inversa de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Inicio (Matriz Ampliada):

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$(F_{21}(1))$: Cero bajo pivote

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

$(F_2(1/3))$: Pivote a 1

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right]$$

$(F_{12}(-2))$: Cero sobre pivote

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \end{array} \right]$$

Resultado: $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$

Síntesis

Morfología (Tipos)	Acciones (Operatoria)	Manipulación (OEF)	Reversión (Inversa)
Cuadrada: $m = n$ Identidad / Nula: $I_n / 0$ Triangulares: Ceros arriba/abajo Transpuesta: $A \rightarrow A^t$ Simétrica: $A = A^t$	Suma: $A + B$ Escalar: $k \cdot A$ Producto: $A \cdot B$ → No Conmutativo: $AB \neq BA$	Permutar: F_{ij} Ponderar: $F_i(r)$ Suma Múltiplo: $F_{ij}(k)$	Condición: $A \cdot A^{-1} = I_n$ Método principal: Gauss-Jordan $[A \mid I] \xrightarrow{-\text{OEF}} [I \mid A^{-1}]$

El álgebra matricial es el lenguaje estructural del espacio matemático.