

EJERCICIOS RESUELTOS.

1. La ecuación de una onda transversal que se propaga en una cuerda es:

$Y(x,t) = 2\cos[\pi(0,5x - 200t)]$, en la que “x” e “y” se miden en centímetros y “t” en segundos.

- a) Calcular la amplitud, longitud de onda, frecuencia, periodo y velocidad de propagación.
- b) Hacer un esquema de la forma de la cuerda para los siguientes valores de t: 0; 0,0025; y 0,005 [s].

(a) *Ec. general de la onda:* $y(x,t) = y_{m\acute{a}x}\text{sen}(kx - \omega t + \phi)$

$$y(x,t) = 2\cos(0,5\pi x - 200\pi t)$$

(a)

Amplitud: $y_{m\acute{a}x} = 2 \text{ cm}$

Longitud de onda:

$$\text{Número de ondas: } K = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{K}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{0,5\pi}$$

$$\lambda = 4 \text{ cm}$$

Frecuencia:

$$\text{Frecuencia angular: } \omega = 200\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$$

$$\text{Frecuencia lineal: } \omega = 2\pi f$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{200\pi}{2\pi} = 100 \text{ Hz}$$

Periodo:

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100} = 0,01 \text{ (s)}$$

Velocidad de propagación:

$$v = \lambda \cdot f$$

$$v = (4 \text{ cm})(100 \text{ Hz})$$

$$v = 400 \left(\frac{\text{cm}}{\text{s}} \right)$$

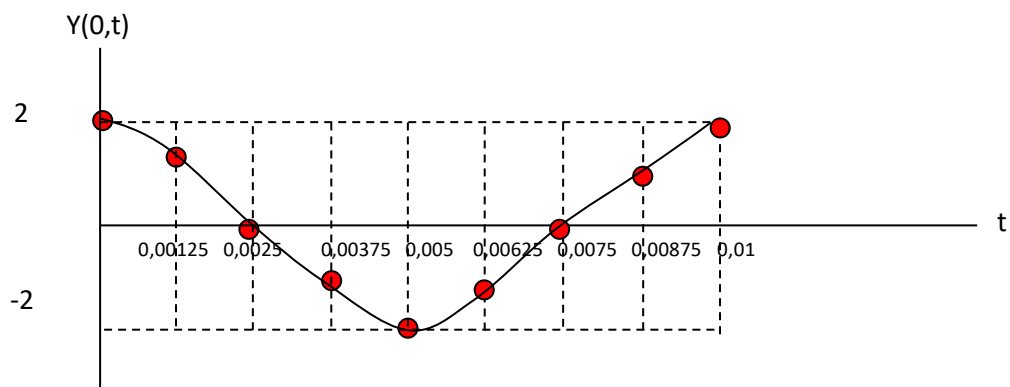
(b) Hacer un esquema de la forma de la cuerda para los siguientes valores de t : 0; 0,0025; y 0,005 [s].

$$y(x, t) = 2\cos(0,5\pi x - 200\pi t)$$

$y(0, t) \text{ (cm)}$	$t \text{ (s)}$
2	0
1,41	0,00125
0	0,0025
-1,41	0,00375
-2	0,005
-1,41	0,00625
0	0,0075
1,41	0,00875
2	0,01

$$y(0,0) = 2 \cos(0) = 2 \text{ (cm)}$$

$$y(0; 0,0025) = 2 \cos(-200\pi \cdot 0,0025) = 0$$



2. Un péndulo simple tiene un período de 2 [s], y una amplitud de 2° . Después de 10 oscilaciones completas su amplitud se ha reducido a $1,5^\circ$. Encuentre el coeficiente de amortiguamiento " γ ".

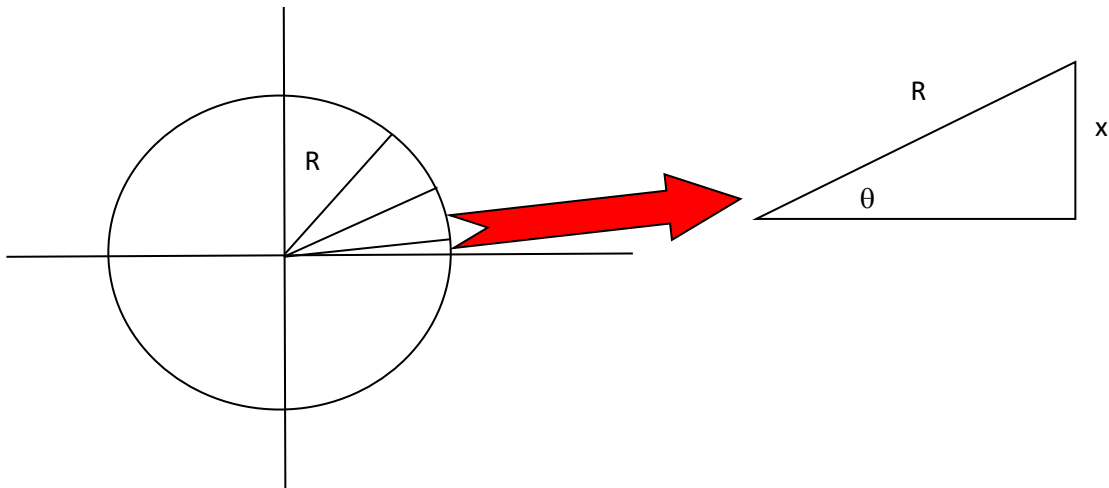
$$T = 2 \text{ seg}$$

$$\theta_{\text{máx}} = 2^\circ$$

$$10 \text{ oscilaciones} \dots \theta(10 \text{ oscilaciones}) = 1,5^\circ$$

$$\gamma = ?$$

$$A(t) = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$



$$\text{sen}\theta = \frac{x}{R}$$

$$x = R \text{sen}\theta$$

Para ángulos pequeños:

$$\text{sen}\theta \approx \theta$$

Luego:

$$x = R\theta$$

$$x(t) = R\theta(t)$$

$$A(t) = A_0 e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$

$$R\theta(t) = R\theta_{m\acute{a}x}e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$

$$\theta(t) = \theta_{m\acute{a}x}e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)t}$$

γ : coeficiente de amortiguaci3n.

$$\gamma = \frac{b}{2m}$$

10 oscilaciones: $t = 10T = 10(2) = 20$ seg

$$\theta(20) = \theta_{m\acute{a}x}e^{-\left(\frac{b}{2m}\right)20}$$

$$1,5 = 2e^{-\gamma 20}$$

$$\left(\frac{1,5}{2}\right) = e^{-20\gamma}$$

$$\ln\left(\frac{1,5}{2}\right) = -20\gamma$$

$$\gamma = 0,014 \left(\frac{1}{s}\right)$$

3. Un oscilador armónico amortiguado consta de un bloque de masa 2.0 kg, un resorte $k = 12.0 \text{ N/m}$. Inicialmente, oscila con una amplitud de 26.0 cm; a causa del amortiguamiento, la amplitud disminuye a tres cuartas partes de este valor inicial después de cuatro ciclos completos. ¿Cuánta energía se ha perdido durante esos 4 ciclos?

$$m = 2,0 \text{ kg}$$

$$k = 12,0 \text{ N/m}$$

$$A_0 = 26,0 \text{ cm} = 0,26 \text{ m} = A(0)$$

$$A(4T) = 3A_0/4$$

$$E_{\text{perdida}} = ?$$

$$E(t) = \frac{1}{2} k A(t)^2 = \frac{1}{2} k A_0^2 e^{\frac{-b}{M} t} = E_0 e^{\frac{-b}{M} t}$$

Para recordar, la Energía Mecánica en un Movimiento Armónico Simple, para un oscilador armónico simple, es:

$$E = \frac{kA^2}{2}$$

Para $t=0$:

$$E(0) = \frac{kA(0)^2}{2}$$

$$E(0) = \frac{(12)(0,26)^2}{2}$$

$$E(0) = 0,4 \text{ Joule}$$

Para $t=4T$:

$$E(4T) = \frac{kA(4T)^2}{2}$$

$$E(4T) = 6 \cdot \left(3 \cdot \frac{0,26}{4}\right)^2$$

$$E(4T) = 0,23 \text{ Joule}$$

La energía perdida será:

$$\Delta E = E_{final} - E_{inicial}$$

$$\Delta E = 0,23 - 0,4$$

$$\Delta E = -0,17 \text{ Joule}$$

El signo (-) de la diferencia de energía indica que hubo pérdida de energía, pues es un M.A.A.

4. En un oscilador amortiguado, la masa del sistema que oscila es 1620 g, la constante del resorte 81 N/m y el coeficiente de viscosidad 0.162 kg/s. ¿Qué tipo de movimiento amortiguado es? ¿Cuántos periodos de oscilación son necesarios para que la energía mecánica se reduzca a $\frac{1}{4}$ de su valor inicial?

$$m = 1620 \text{ g} = 1,62 \text{ kg}$$

$$k = 81 \text{ N/m}$$

$$\text{Coef. viscosidad} = 0,162 \text{ kg/s}$$

$$E(t) = E_0/4$$

$$t = ?$$

La fuerza disipativa:

$$f = -bv$$

Analizando unidades de medida:

$$[N] = [b][m/s]$$

$$[kg][m/s^2] = [b][m/s]$$

$$[b] = [kg][m/s^2]/[m/s]$$

$$[b] = [kg/s]$$

$$E(t) = E_0 e^{-\left(\frac{b}{m}\right)t}$$

$$\frac{E_0}{4} = E_0 e^{-\left(\frac{0,162}{1,62}\right)t}$$

$$\frac{1}{4} = e^{-0,1t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = \ln e^{-0,1t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0,1t \ln(e)$$

$$\ln(e) = 1$$

$$\ln\left(\frac{1}{4}\right) = -0,1t$$

$$t = 13,9 \text{ seg}$$

Para un oscilador amortiguado, su frecuencia natural es:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{k}{m}\right)}}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\left(\frac{81}{1,62}\right)}}$$

$$T = 0,9 \text{ seg}$$

$$1 T \dots\dots 0,9 \text{ seg}$$

$$t \dots\dots 13,9 \text{ seg}$$

$$t = 15,4 T$$

¿Qué tipo de movimiento amortiguado es?

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

Si:

$$\omega_0 = \gamma: \text{crítico}$$

$$\omega_0 > \gamma: \text{subamortiguado}$$

$$\omega_0 < \gamma: \text{sobreamortiguado}$$

5. Un sistema oscilatorio constituido por una masa y un resorte, tiene una energía mecánica de 1,18 [J], una amplitud de oscilación de 9,84 [cm] y una rapidez máxima de 1,22 [m/s]. Encuentre: la constante del resorte que da lugar a dicho movimiento, la masa del bloque y la frecuencia de oscilación.

$$EM = 1,18 \text{ Joule}$$

$$A = 9,84 \text{ cm} = 0,0984 \text{ m}$$

$$v_{\text{máx}} = 1,22 \text{ m/s}$$

$$1 \text{ Joule} = 1 \text{ N}\cdot\text{m}$$

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kgm/s}^2$$

$$K = ?$$

$$m = ?$$

$$\omega = ? \text{ (Frecuencia angular-Frecuencia natural de oscilación-Frecuencia de oscilación)}$$

Para la energía mecánica en un oscilador armónico simple, se tiene:

$$EM = KA^2/2$$

$$1,18 = K(0,0984)^2/2$$

$$K = 243,74 \text{ N/m}$$

$$v_{\text{máx}} = A\omega$$

$$1,22 = 0,0984\omega$$

$$\omega = 12,39 \text{ rad/s}$$

$$v = (K/m)^{1/2}(A^2 - x^2)^{1/2}$$

$$v = \omega(A^2 - x^2)^{1/2}$$

La velocidad máxima se genera cuando $x = 0$:

$$v_{\text{máx}} = w(A^2)^{1/2}$$

$$v_{\text{máx}} = wA$$

$$w = (K/m)^{1/2}/()$$

$$w^2 = K/m$$

$$m = K/w^2$$

$$m = 243,74/(12,39)^2$$

$$m = 1,58 \text{ kg}$$

6. Un cuerpo de 100 [kg] de masa cuelga de un largo resorte helicoidal. Cuando se tira de él 10 [cm] por debajo de la posición de equilibrio y se abandona a sí mismo, oscila con un periodo de 2 [s].

- a) ¿Cuál es su rapidez al pasar por la posición de equilibrio?
- b) ¿Cuál es el valor de la energía potencial en ese punto?
- c) ¿Qué valor tiene la energía cinética?

a) $m = 100 \text{ kg}$
 $A = 10 \text{ cm} = 0,1 \text{ m}$

$$T = 2 \text{ s}$$

$$v_{\text{máx}} = \pm \omega A$$

Pero: $\omega = 2\pi/T$

$$v_{\text{máx}} = \pm (2\pi/2)(0,1)$$

$$v_{\text{máx}} = \pm 0,1\pi \text{ m/s}$$

b) $EP = Kx^2/2$
En ese punto: $x = 0$ (Posición de equilibrio)

$$EP = 0$$

c) $EM = EC + EP$

En $x = 0$: $EP = 0$

$$EM = EC$$

$$EC = KA^2/2$$

↑ Pero: $\omega = (K/m)^{1/2}$

└ $K = \omega^2 m$

└ $K = (2\pi/T)^2 m$

$$EC = 4,93 \text{ Joule}$$

$$[K] = [m]/[T]^2$$

$$[K] = [kg]/[s]^2$$

$$[K] = N/m = (kgm/s^2)/m = kg/s^2$$

$$K = (2\pi/2 \text{ s})^2(100 \text{ kg})$$

$$K = \pi^2 \cdot 100 \text{ (kg/s}^2\text{)} = 986,96 \text{ kg/s}^2$$

$$EC = KA^2/2$$

$$EC = (986,96 \text{ kg/s}^2)(0,1 \text{ m})^2/2$$

$$EC = 4,93 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm}$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ (kgm/s}^2\text{)}(m)$$

$$1 \text{ J} = 1 \text{ kgm}^2/\text{s}^2$$

7. La función que describe cierto movimiento ondulatorio es:

$$y(x,t) = 0,05 \text{ sen}(16\pi(t-x/4))$$

Determine la amplitud, la frecuencia, el período, la longitud de onda y la velocidad de propagación de este movimiento.

Nota: x en metros y t en segundos.

Resp: $A = 0,05 \text{ [m]}$

$\omega = 16\pi \text{ [rad/s]}$

$v = 4 \text{ [m/s]}$

$$y(x,t) = 0,05 \text{ sen}(16\pi t - 4\pi x)$$

Ec. general: $y(x,t) = y_{\text{máx}} \text{ sen}(kx - \omega t + \varphi)$

$$y(x,t) = 0,05 \text{ sen}(-(4\pi x - 16\pi t))$$

Función par: $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$

Función impar: $\text{sen}(-\alpha) = -\text{sen} \alpha$

$$y(x,t) = -0,05 \text{ sen}(4\pi x - 16\pi t)$$

Amplitud: $y_{\text{máx}} = 0,05 \text{ m}$

Frecuencia:

Frecuencia angular: $\omega = 16\pi \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)$

Frecuencia lineal: $\omega = 2\pi f$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16\pi}{2\pi} = 8 \text{ Hz}$$

Periodo:

$$T = \frac{1}{f}$$

$$T = \frac{1}{8} = 0,125 \text{ (s)}$$

Longitud de onda (λ):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{4\pi}$$

$$\lambda = 0,5 \text{ (m)}$$

Velocidad de propagación:

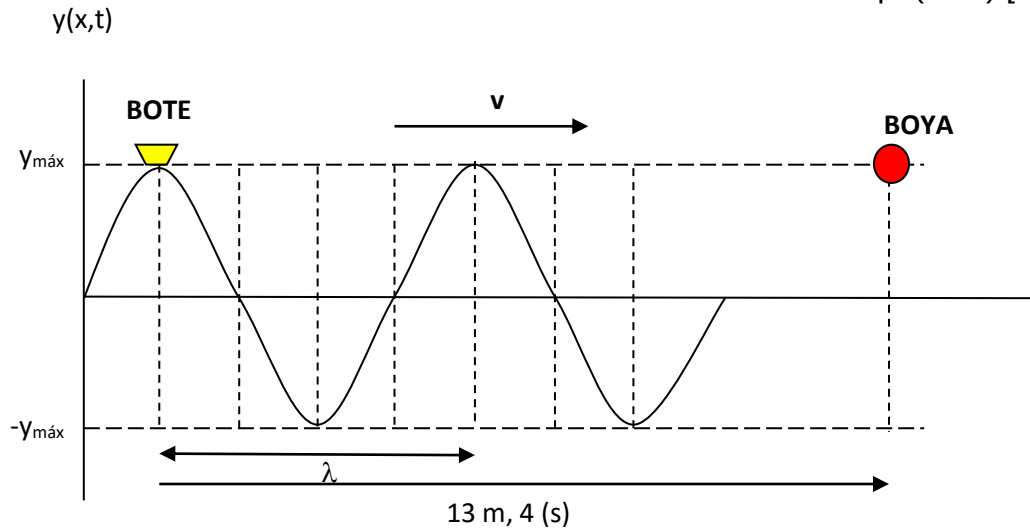
$$v = \lambda \cdot f$$

$$v = (0,5)(8)$$

$$v = 4 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

8. Un pescador en un bote anclado observa que las crestas de las olas lo pasan cada 2 [s] y que las crestas de las olas emplean 4 [s] para llegar a una boya a 13 [m] del bote. Calcular la longitud de onda de la ola.

Resp: (13/2) [m]



$$T = 2 \text{ (s)}$$

$$t = 4 \text{ (s)}$$

$$d = 13 \text{ (m)}$$

$$d = v \cdot t$$

$$13 = v \cdot 4$$

$$\text{Pero: } v = \lambda \cdot f$$

$$13 = \lambda \cdot f \cdot 4$$

$$\text{Se sabe: } f = \frac{1}{T}$$

$$13 = \lambda \left(\frac{1}{T} \right) (4)$$

$$13 = \lambda \left(\frac{1}{2} \right) (4)$$

$$\lambda = \frac{13}{2} \text{ (m)}$$