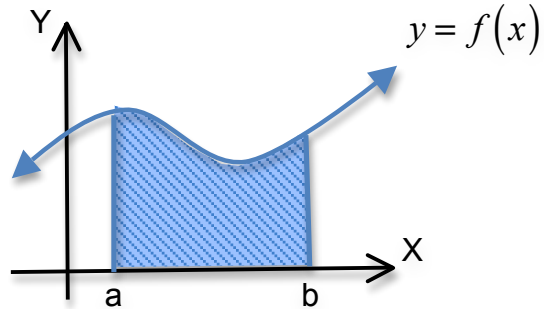


ÁREA EN COORDENADAS RECTANGULARES

Sea f continua y acotada; talque $f(x) \geq 0$, entonces el área bajo la curva $y = f(x)$, delimitada por las rectas $x = a$; $x = b$; $y = 0$ está dada por:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$



Observación:

En general si f es una función cualquiera e integrable, entonces:

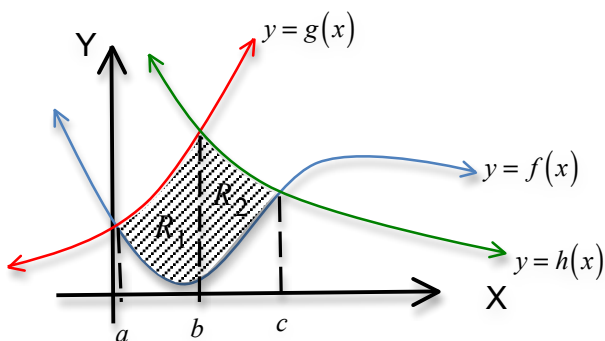
$$A = \int_a^b |f(x)| dx$$

$$1) f(x) \geq 0 \Rightarrow A = \int_a^b f(x) dx$$

$$2) f(x) < 0 \Rightarrow A = - \int_a^b f(x) dx$$

Observación:

El área de una figura achurada puede ser la suma de áreas.



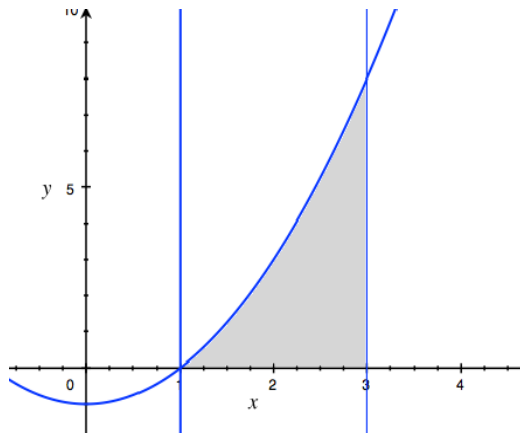
$$A_T = R_1 + R_2$$

$$A_T = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx + \int_b^c (h(x) - f(x)) dx$$

Ejemplo:

- 1) Grafique, achure y calcule, mediante integrales, el área de la región delimitada por las curvas:

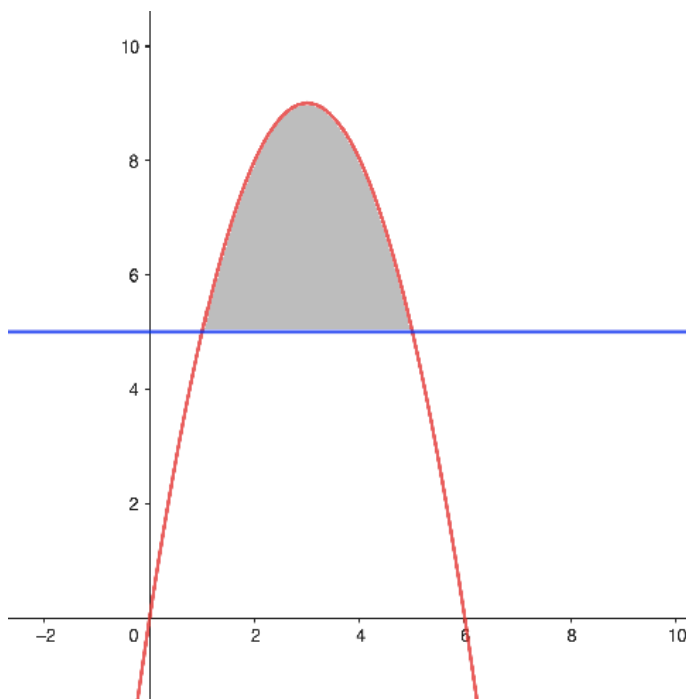
$$R = \{y = 0 ; x = 1 ; x = 3 ; y = x^2 - 1\}$$

SOLUCIÓN:

$$A = \int_1^3 [(x^2 - 1) - 0] dx \quad R$$

$$A = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_1^3 = (9 - 3) - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = \frac{20}{3} u^2$$

- 2) 2) Grafique, achure y calcule, mediante integrales, el área de la región delimitada por las curvas: $y = 6x - x^2$; $y = 5$



puntos de intersección :

$$\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = 5 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} 6x - x^2 = 5 \Rightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \\ x = 5 \vee x = 1 \end{array} \right. \Rightarrow (5, 5) ; (1, 5)$$

$$A = \int_1^5 [(6x - x^2) - 5] dx$$

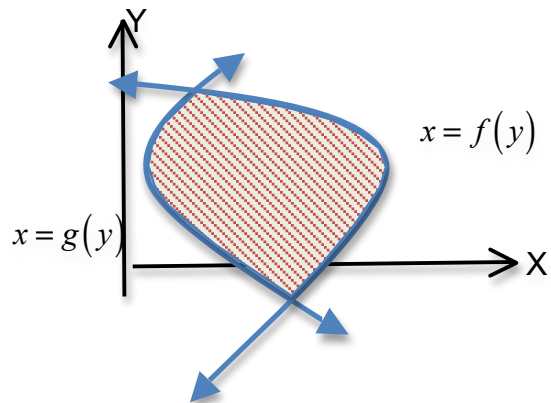
$$A = \left(3x^2 - \frac{x^3}{3} - 5x \right) \Big|_1^5 = \left(75 - \frac{125}{3} - 25 \right) - \left(3 - \frac{1}{3} - 5 \right) = \frac{32}{3} u^2$$

OBSERVACIÓN:

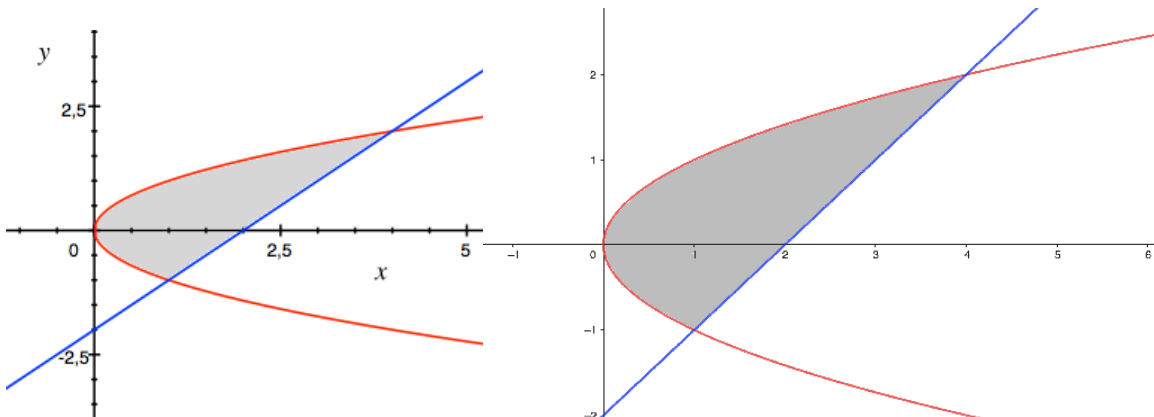
El área de la región limitada por las curvas $x = f(y)$; $x = g(y)$; $y = c$; $y = d$ donde

$f(y) \geq g(y), \forall y \in [c; d]$, está definida por:

$$A = \int_c^d (f(y) - g(y)) dy$$

**EJEMPLO:**

1) Dada la figura, delimitada por las curvas $y = x - 2$; $y^2 = x$, graficar, achurar la región y calcular el área.

SOLUCIÓN:

$$A = \int_{-1}^2 ((y+2) - y^2) dy = \int_{-1}^2 (y+2-y^2) dy$$

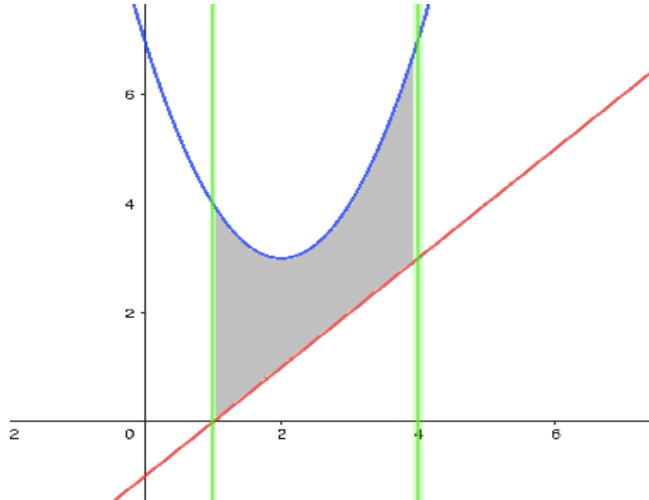
$$A = \left(\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right) \Bigg|_{-1}^2$$

$$A = \left(2 + 4 - \frac{8}{3} \right) - \left(\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{3} \right) = \frac{9}{2} u^2$$

EJERCICIOS

Grafique, achure y calcule, mediante integrales, el área de la región delimitada por las curvas:

a) : $y = (x-2)^2 + 3$; $y = x-1$ $x = 1$; $x = 4$.



$$A = \int_1^4 \left[\left((x-2)^2 + 3 \right) - (x-1) \right] dx$$

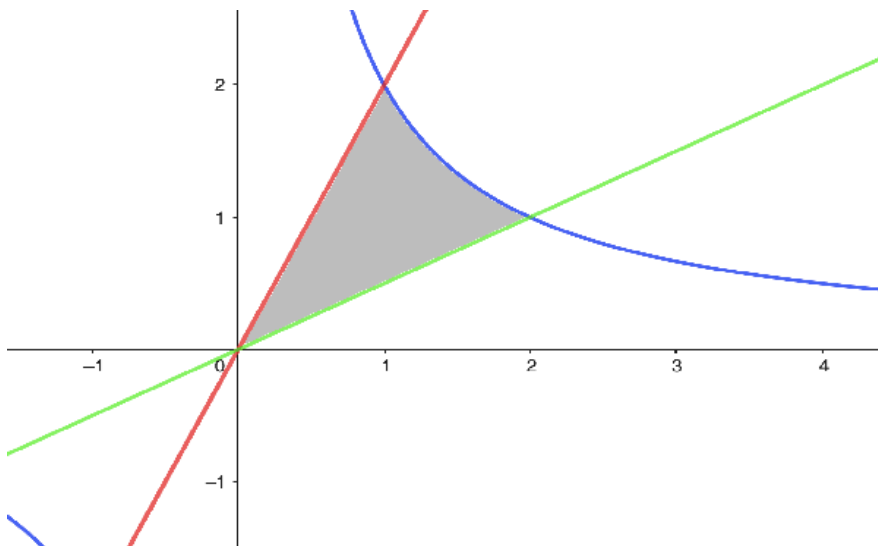
$$A = \int_1^4 \left[(x^2 - 4x + 4 + 3 - x + 1) \right] dx$$

$$A = \int_1^4 \left[(x^2 - 5x + 8) \right] dx$$

$$A = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 8x \right) \Big|_1^4 = \left(\frac{64}{3} - 40 + 32 \right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{5}{2} + 8 \right)$$

$$A = \frac{15}{2} u^2$$

b) $\begin{cases} y = \frac{2}{x} \\ y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \end{cases}$ (1er cuadrante)



puntos de intersección :

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = \frac{2}{x} \end{array} \right|$$

$$2x = \frac{2}{x}$$

$$2x^2 = 2$$

$$x = 1 \vee x = -1$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$2x = \frac{x}{2}$$

$$4x = x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} y = \frac{2}{x} \\ y = \frac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$\frac{2}{x} = \frac{x}{2}$$

$$4 = x^2$$

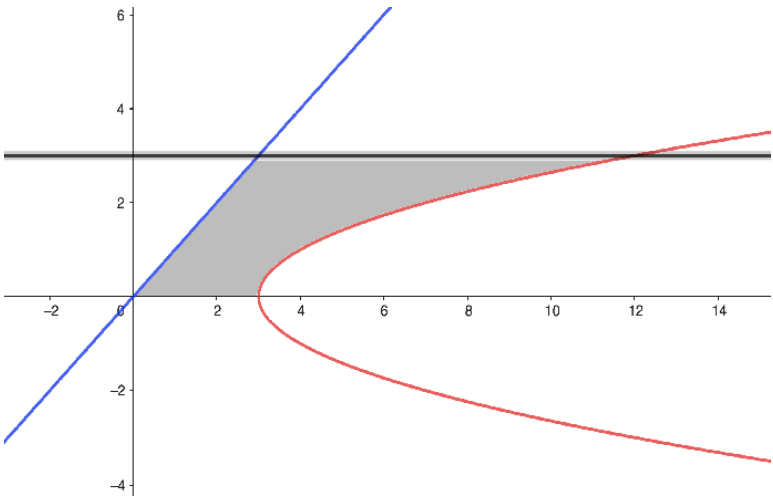
$$x = 2 \vee x = -2$$

$$A = \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2} \right) dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2} \right) dx$$

$$A = \left(\frac{3x^2}{4} \right) \Big|_0^1 + \left(2\ln(x) - \frac{x^2}{4} \right) \Big|_1^2 = \left(\frac{3}{4} - 0 \right) + \left((2\ln(2) - 1) - \left(2\ln(1) - \frac{1}{4} \right) \right)$$

$$A = 2\ln(2) \, u^2$$

- c) Dada la figura, delimitada por las curvas $y = x$; $y^2 + 3 = x$; $y = 0$; $y = 3$, graficar, achurar la región y calcular el área.



$$A = \int_0^3 \left(y^2 + 3 - y \right) dy$$

$$A = \left(\frac{y^3}{3} + 3y - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^3$$

$$A = \left(9 + 9 - \frac{9}{2} - 0 \right)$$

$$A = \frac{27}{2} \, u^2$$