

ANÁLISIS DE CURVA

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

28 DE AGOSTO DE 2023

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .
- Si f' cambia de negativa a positiva en c , entonces f tiene un mínimo local en c .

Criterio de la primera derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, sea $c \in]a, b[$ un punto crítico.

- Si f' cambia de positiva a negativa en c , entonces f tiene un máximo local en c .
- Si f' cambia de negativa a positiva en c , entonces f tiene un mínimo local en c .
- Si f' no cambia de signo en c , entonces f no tiene un extremo local en c .

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c

Criterio de la segunda derivada

Teorema

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que f'' es continua en $]a, b[$. Sea $c \in [a, b]$

- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en c
- Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en c

Nota: Si $f''(c) = 0$ no es valor extremo.

Concavidad

Definición

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalo.

Concavidad

Definición

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalo.

- Decimos que f es **convexa** o cóncava hacia arriba en I si para todo $a, b, x \in I$, con $a < x < b$, el punto $(x, f(x))$ está debajo de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

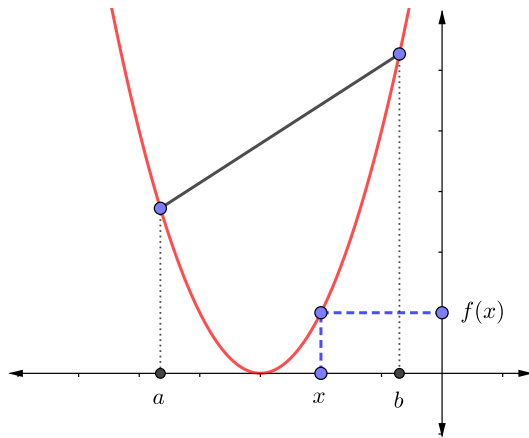
Concavidad

Definición

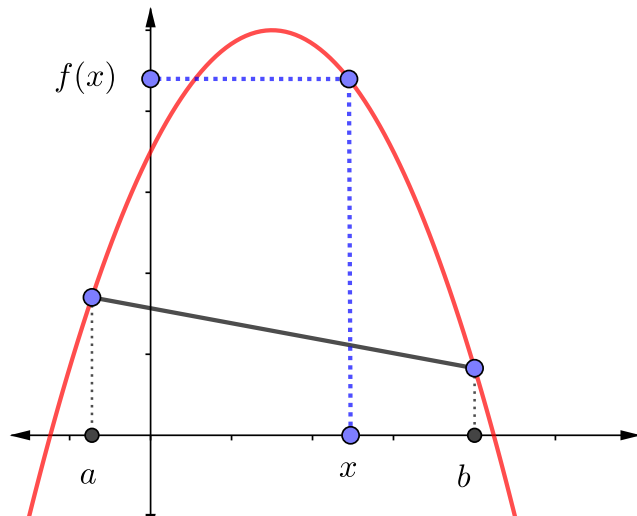
Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, I un intervalo.

- Decimos que f es **convexa** o cóncava hacia arriba en I si para todo $a, b, x \in I$, con $a < x < b$, el punto $(x, f(x))$ está debajo de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$
- Decimos que f es **cóncava** o cóncava hacia abajo en I si para todo $a, b, x \in I$, con $a < x < b$, el punto $(x, f(x))$ está sobre de la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$

Función convexa



Función cóncava



Teorema

Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivable en I

- Si $f''(x_0) > 0$ entonces la gráfica de f es convexa en $(x_0, f(x_0))$
- Si $f''(x_0) < 0$ entonces la gráfica de f es cóncava en $(x_0, f(x_0))$

Definición

Un punto $(x_0, f(x_0))$ de la gráfica de f se dice **punto de inflexión** si f'' cambia de signo en x_0 .

Ejemplo 1

$$f(x) = x^3.$$

Ejemplo 1

$$f(x) = x^3. \quad f'(x) = 3x^2, \quad f''(x) = 6x.$$

Ejemplo 1

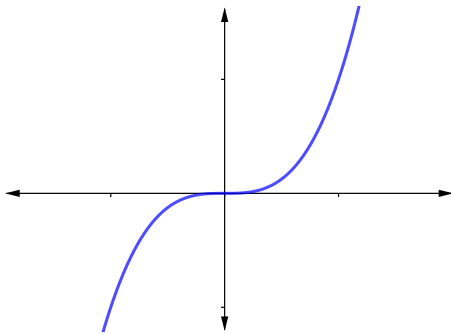
$f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. f es convexa en $]0, \infty[$, y es cóncava en $] - \infty, 0[$.

Ejemplo 1

$f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. f es convexa en $]0, \infty[$, y es cóncava en $] - \infty, 0[$.
(0, $f(0)$) =

Ejemplo 1

$f(x) = x^3$. $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$. f es convexa en $]0, \infty[$, y es cóncava en $] - \infty, 0[$.
 $(0, f(0)) = (0, 0)$ es punto de inflexión.



Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$f'(x) =$$

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$f'(x) = \frac{(2x-4)'(x^2) - (2x-4)(x^2)'}{x^4}$$

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)'(x^2) - (2x-4)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)'(x^2) - (2x-4)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - (2x-4) \cdot 2x}{x^4} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)'(x^2) - (2x-4)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - (2x-4) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2x - (2x-4) \cdot 2}{x^3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)'(x^2) - (2x-4)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - (2x-4) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2x - (2x-4) \cdot 2}{x^3} \\ &= \frac{2x - 4x + 8}{x^3} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Analizar zonas de crecimiento y concavidad de $f(x) = \frac{2x-4}{x^2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x-4)'(x^2) - (2x-4)(x^2)'}{(x^2)^2} \\ &= \frac{2x^2 - (2x-4) \cdot 2x}{x^4} \\ &= \frac{2x - (2x-4) \cdot 2}{x^3} \\ &= \frac{2x - 4x + 8}{x^3} \\ &= \frac{-2x + 8}{x^3} \end{aligned}$$

Analizamos signos de la derivada: Si $x > 4$, entonces

Analizamos signos de la derivada: Si $x > 4$, entonces $0 > -x + 4$, esto implica $0 > -2x + 8$.

Analizamos signos de la derivada: Si $x > 4$, entonces $0 > -x + 4$, esto implica $0 > -2x + 8$.
Análogamente, si $x < 4$, $-2x + 8 > 0$.

Analizamos signos de la derivada: Si $x > 4$, entonces $0 > -x + 4$, esto implica $0 > -2x + 8$. Análogamente, si $x < 4$, $-2x + 8 > 0$.

	$] - \infty, 0[$	$]0, 4]$	$[4, \infty[$
$-2x + 8$	+	+	−
x^3	−	+	+
$f'(x)$	−	+	−

Analizamos signos de la derivada: Si $x > 4$, entonces $0 > -x + 4$, esto implica $0 > -2x + 8$. Análogamente, si $x < 4$, $-2x + 8 > 0$.

	$] - \infty, 0[$	$]0, 4[$	$[4, \infty[$
$-2x + 8$	+	+	-
x^3	-	+	+
$f'(x)$	-	+	-

Por lo tanto f es decreciente en $] - \infty, 0[$ y en $]4, \infty[$. f es creciente en $]0, 4[$.

Analizamos signos de la derivada: Si $x > 4$, entonces $0 > -x + 4$, esto implica $0 > -2x + 8$. Análogamente, si $x < 4$, $-2x + 8 > 0$.

	$] - \infty, 0[$	$]0, 4[$	$[4, \infty[$
$-2x + 8$	+	+	-
x^3	-	+	+
$f'(x)$	-	+	-

Por lo tanto f es decreciente en $] - \infty, 0[$ y en $]4, \infty[$. f es creciente en $]0, 4[$. En $x = 4$ hay un punto crítico, este es un máximo local.

$$f''(x) = \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)'$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\ &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\ &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\ &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\ &= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\&= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\&= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\&= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \\&= \frac{4x - 24}{x^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\&= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\&= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\&= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \\&= \frac{4x - 24}{x^4} \\&= \frac{4(x - 6)}{x^4}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\
 &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\
 &= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\
 &= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \\
 &= \frac{4x - 24}{x^4} \\
 &= \frac{4(x - 6)}{x^4}
 \end{aligned}$$

Si $x > 6$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\
 &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\
 &= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\
 &= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \\
 &= \frac{4x - 24}{x^4} \\
 &= \frac{4(x - 6)}{x^4}
 \end{aligned}$$

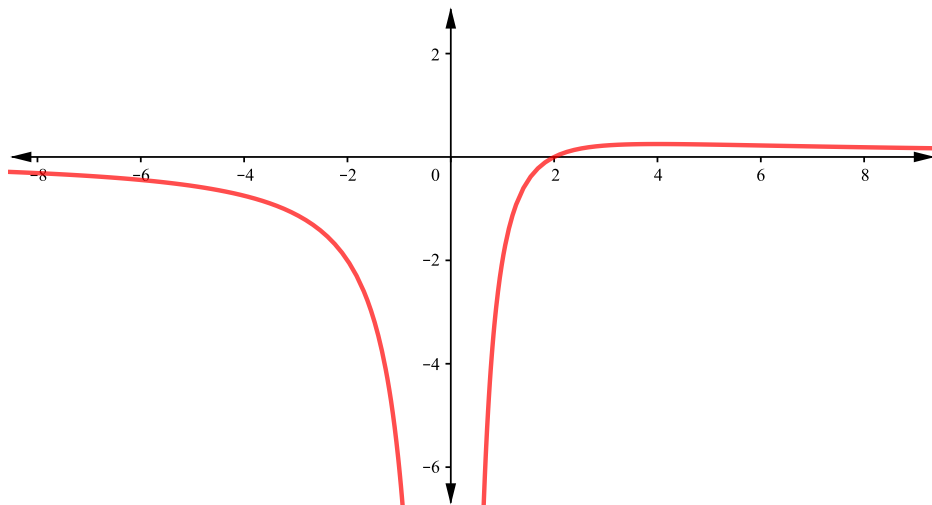
Si $x > 6$ la función es convexa.

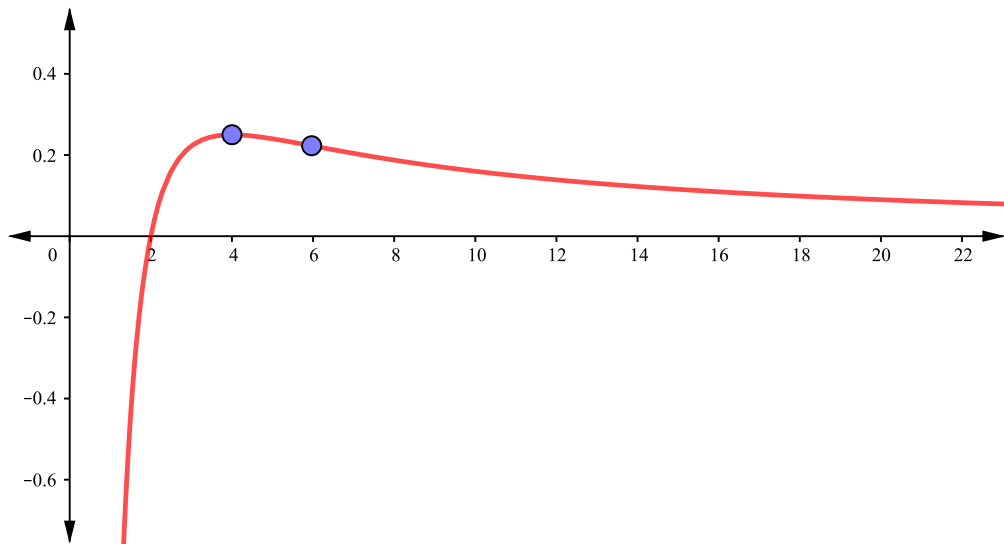
$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\
 &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\
 &= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\
 &= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \\
 &= \frac{4x - 24}{x^4} \\
 &= \frac{4(x - 6)}{x^4}
 \end{aligned}$$

Si $x > 6$ la función es convexa. Si $x < 6$, $x \neq 0$, la función es cóncava.

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-2x + 8}{x^3} \right)' \\
 &= \frac{(-2x + 8)'x^3 - (-2x + 8)(x^3)'}{(x^3)^2} \\
 &= \frac{-2x^3 + (2x - 8) \cdot 3x^2}{x^6} \\
 &= \frac{-2x + (6x - 24)}{x^4} \\
 &= \frac{4x - 24}{x^4} \\
 &= \frac{4(x - 6)}{x^4}
 \end{aligned}$$

Si $x > 6$ la función es convexa. Si $x < 6$, $x \neq 0$, la función es cóncava. En $x = 6$ hay un punto de inflexión.





Asíntotas

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La recta de ecuación $y = mx + n$ se llama **asíntota oblicua** de f si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

o bien si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

Asíntotas

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La recta de ecuación $y = mx + n$ se llama **asíntota oblicua** de f si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

o bien si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

- La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de f si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

Asíntotas

- Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. La recta de ecuación $y = mx + n$ se llama **asíntota oblicua** de f si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

o bien si

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + n)) = 0$$

- La recta $y = L$ se llama **asíntota horizontal** de f si

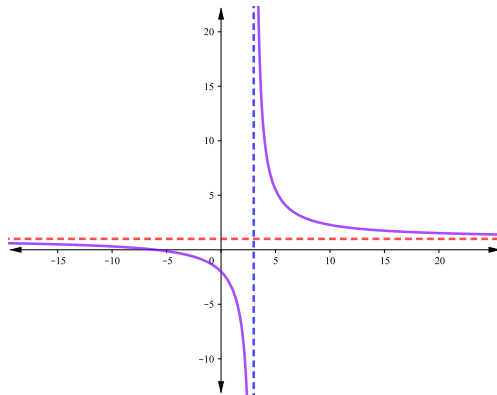
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

- La recta $x = b$ se llama **asíntota vertical** de f si

$$\lim_{x \rightarrow b^+} = \pm\infty \quad \vee \quad \lim_{x \rightarrow b^-} = \pm\infty$$

Ejemplo 3

$$f(x) = \frac{x+6}{x-3}$$



Para encontrar las asíntotas oblicuas, escribimos:

- $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$

Para encontrar las asíntotas oblicuas, escribimos:

- $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$
- $n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$

Leer proposición 5.42 de la página 376.

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} =$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} =$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) =$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 1 = m$$

Notar que ocurre lo mismo si $x \rightarrow -\infty$.

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

Notar que ocurre lo mismo si $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) =$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

Notar que ocurre lo mismo si $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right)$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

Notar que ocurre lo mismo si $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} =$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

Notar que ocurre lo mismo si $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = n$$

Ejemplo 4

Encontrar asíntotas de $f(x) = x + \frac{1}{x}$

Solución: Buscamos primero las asíntotas oblicuas.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = 1 = m$$

Notar que ocurre lo mismo si $x \rightarrow -\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x} - x\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 = n$$

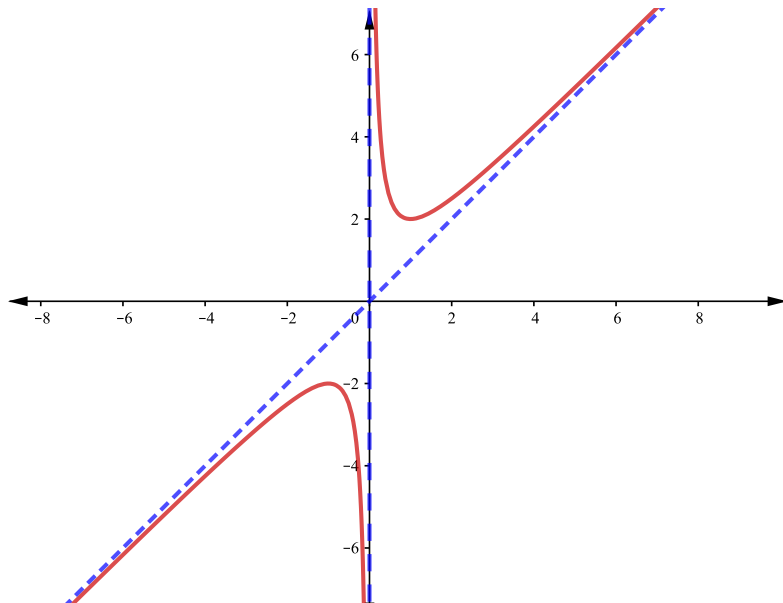
Por lo tanto la asíntota oblicua es $y = mx + n$, es decir, la recta $y = x$.

Escribamos $f(x) = x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

Por lo tanto $x = 0$ es asíntota vertical.



Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} =$$

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)}$$

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} \\ &= \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\
 &=
 \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Encontrar las asíntotas de $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x + 1}$

Solución: Oblicuas:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x(x + 1)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 + x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{4}{x^2}}{1 + \frac{1}{x}} \\
 &= 1 \\
 &= m
 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right)$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - x}{x + 1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - x}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}}\end{aligned}$$

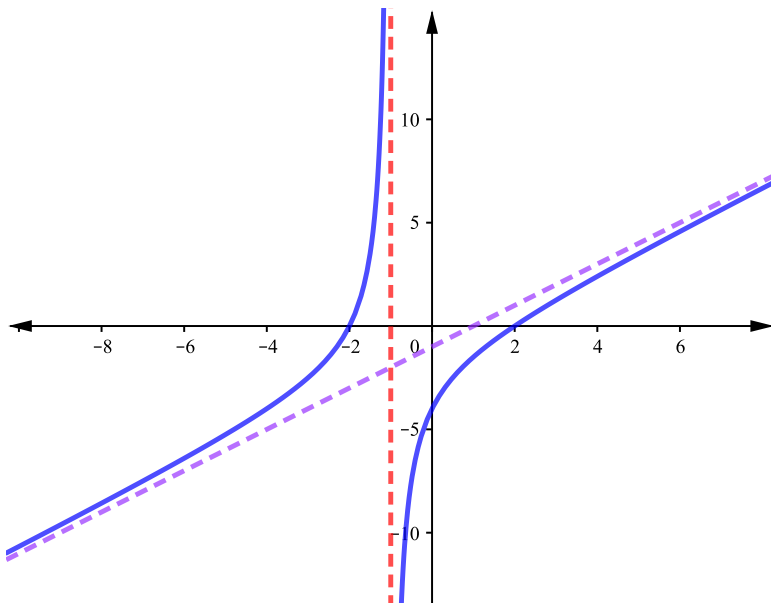
$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - x}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}} \\&= -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - x}{x + 1} \\&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}} \\&= -1 \\&= n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 4}{x + 1} - x \right) \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 4 - x(x + 1)}{x + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4 - x}{x + 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{4}{x} - 1}{1 + \frac{1}{x}} \\
&= -1 \\
&= n
\end{aligned}$$

Por lo tanto la asíntota oblicua es $y = x - 1$

Es claro que la recta $x = -1$ es asíntota vertical.



Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$. Hallar el gráfico de la función $y = f(x)$ determinando:

- Interceptos con los ejes
- Asíntotas
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Intervalos de concavidad y convexidad

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$. Hallar el gráfico de la función $y = f(x)$ determinando:

- Interceptos con los ejes
- Asíntotas
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Intervalos de concavidad y convexidad

Solución: Si $x = 0$, entonces $f(x) = \frac{0}{0-4} = 0$. Por otra parte si $f(x) = 0$ entonces $x^2 = 0$, por lo tanto la única intersección con los ejes es $(0, 0)$.

Ejemplo 6

Considere la función $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$. Hallar el gráfico de la función $y = f(x)$ determinando:

- Interceptos con los ejes
- Asíntotas
- Intervalos de crecimiento y decrecimiento
- Intervalos de concavidad y convexidad

Solución: Si $x = 0$, entonces $f(x) = \frac{0}{0-4} = 0$. Por otra parte si $f(x) = 0$ entonces $x^2 = 0$, por lo tanto la única intersección con los ejes es $(0, 0)$.

Es claro que la función tiene una indeterminación de la forma “ $\frac{C}{0}$ ” cuando x tiende a 2 o a -2 , por lo tanto, $x = 2$, $x = -2$ son asíntotas verticales.

Para encontrar asíntotas oblicuas hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Para encontrar asíntotas oblicuas hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - 4x} =$$

Para encontrar asíntotas oblicuas hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}}$$

Para encontrar asíntotas oblicuas hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0$$

Para encontrar asíntotas oblicuas hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x(x^2 - 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3 - 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1 - \frac{4}{x^2}} = 0$$

Esto dice que dicha asíntota es horizontal. Para encontrar el coeficiente de posición hacemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 - 4} = 1$$

Calculemos primera derivada:

Calculemos primera derivada:

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)'$$

Calculemos primera derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

Calculemos primera derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

Calculemos primera derivada:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' \\ &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} \\ &= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \end{aligned}$$

Calculemos primera derivada:

$$\begin{aligned}f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' \\&= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} \\&= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} \\&= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}\end{aligned}$$

Como el denominador es positivo, solo analizamos numerador para ver cambios de signo. Si $x < 0, x \neq -2$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente.

Calculemos primera derivada:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' \\
 &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}
 \end{aligned}$$

Como el denominador es positivo, solo analizamos numerador para ver cambios de signo. Si $x < 0, x \neq -2$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Si $x > 0, x \neq 2$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente.

Calculemos primera derivada:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(\frac{x^2}{x^2 - 4} \right)' \\
 &= \frac{2x(x^2 - 4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{2x^3 - 8x - 2x^3}{(x^2 - 4)^2} \\
 &= \frac{-8x}{(x^2 - 4)^2}
 \end{aligned}$$

Como el denominador es positivo, solo analizamos numerador para ver cambios de signo. Si $x < 0, x \neq -2$, entonces $f'(x) > 0$ y f es creciente. Si $x > 0, x \neq 2$, entonces $f'(x) < 0$ y f es decreciente.

En $x = 0$ hay un máximo local.

La segunda derivada es:

La segunda derivada es:

$$f''(x) = \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)'$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' \\ &= \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x(2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \end{aligned}$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' \\ &= \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x(2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\ &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (-(x^2 - 4) + x \cdot 2 \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \end{aligned}$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' \\ &= \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x(2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\ &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (-(x^2 - 4) + x \cdot 2 \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\ &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (4 - x^2 + 4x^2)}{(x^2 - 4)^4} \end{aligned}$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' \\
 &= \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x(2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (-(x^2 - 4) + x \cdot 2 \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (4 - x^2 + 4x^2)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}
 \end{aligned}$$

La segunda derivada es:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{-8x}{(x^2 - 4)^2} \right)' \\
 &= \frac{-8(x^2 - 4)^2 + 8x(2 \cdot (x^2 - 4) \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (-(x^2 - 4) + x \cdot 2 \cdot 2x)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{8(x^2 - 4) \cdot (4 - x^2 + 4x^2)}{(x^2 - 4)^4} \\
 &= \frac{8(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}
 \end{aligned}$$

El numerador de esta función es siempre positivo, luego, basta analizar el denominador.

	$] - \infty, -2[$	$] - 2, 2[$	$] 2, \infty[$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 4)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

	$] - \infty, -2[$	$] - 2, 2[$	$] 2, \infty[$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 4)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Si $x < -2 \vee x > 2$ entonces $(x^2 - 4) > 0$ y por tanto $f''(x) > 0$, lo que indica que f es convexa.

	$] - \infty, -2[$	$] - 2, 2[$	$] 2, \infty[$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 4)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Si $x < -2 \vee x > 2$ entonces $(x^2 - 4) > 0$ y por tanto $f''(x) > 0$, lo que indica que f es convexa.

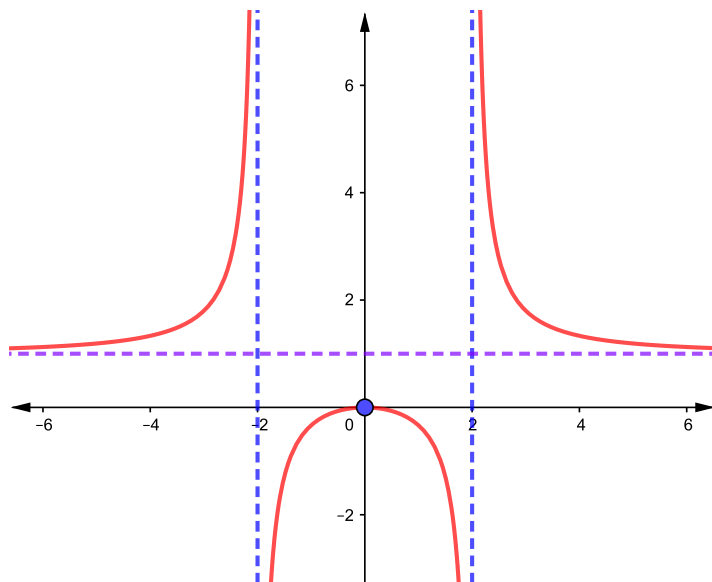
Si $-2 < x < 2$ entonces $(x^2 - 4) < 0$ y por tanto $f''(x) < 0$, luego f es cóncava.

	$] - \infty, -2[$	$] - 2, 2[$	$] 2, \infty[$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$(x^2 - 4)$	$+$	$-$	$+$
	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Si $x < -2 \vee x > 2$ entonces $(x^2 - 4) > 0$ y por tanto $f''(x) > 0$, lo que indica que f es convexa.

Si $-2 < x < 2$ entonces $(x^2 - 4) < 0$ y por tanto $f''(x) < 0$, luego f es cóncava.

f no tiene puntos de inflexión.



Ejercicios

- ❶ Dada la función $f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{10}{3}x^3 + 9x$ determine
- ❶ Dominio y raíces.
 - ❷ Máximos y mínimos.
 - ❸ Intervalos de crecimiento.
 - ❹ Puntos de inflexión.
 - ❺ Concavidad.
 - ❻ Gráfica aproximada.
- ❷ Determine dominio, zonas de crecimiento, puntos críticos, zonas de concavidad y asíntotas para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

- ❸ Leer ejemplos 477, 478 y 480, págs 377 en adelante (matemáticas para ingeniería).

Solución ejercicio 1

Dominio : $\mathbb{R}$

$$f'(x) = x^4 - 10x^2 + 9 = (x^2 - 9)(x^2 - 1).$$

Igualando a cero esta derivada se obtienen los puntos críticos:

$$x = -3, 3, -1, 1.$$

La segunda derivada de f es $f''(x) = 4x^3 - 20x$.

Evaluamos esta segunda derivada en los puntos críticos y obtenemos:

$$f''(-3) < 0 \text{ (máximo)}$$

$$f''(-1) > 0 \text{ (mínimo)}$$

$$f''(1) < 0 \text{ (máximo)}$$

$$f''(3) < 0 \text{ (mínimo)}$$

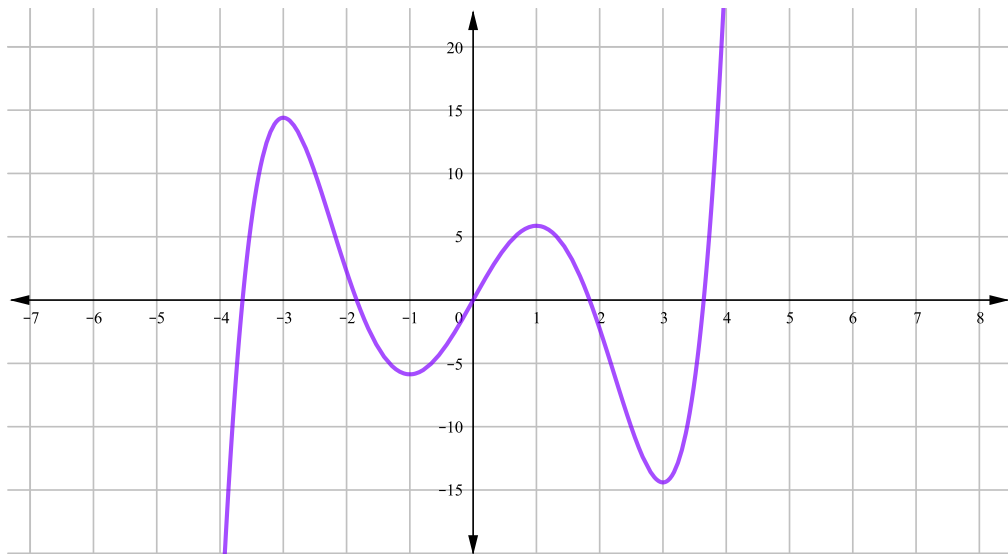
Para determinar los intervalos de crecimiento, analizamos el signo de f' :

factor/intervalos	$-\infty, -3$	$-3, -1$	$-1, 1$	$1, 3$	$3, \infty$
$(x - 3)$	-	-	-	-	+
$(x + 3)$	-	+	+	+	+
$(x - 1)$	-	-	-	+	+
$(x + 1)$	-	-	+	+	+
f	crec.	dec	crec	dec	crec

Para determinar los puntos de inflexión, se analiza el signo de $f''(x) = 4x(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$, obteniendo los puntos de inflexión $x = -\sqrt{5}, \sqrt{5}, 0$.

Los intervalos de concavidad se obtienen si analizamos el signo de f'' :

factor/ intervalos	$-\infty, -\sqrt{5}$	$-\sqrt{5}, 0$	$0, \sqrt{5}$	$\sqrt{5}, \infty$
$(x - \sqrt{5})$	-	-	-	+
x	-	-	+	+
$(x + \sqrt{5})$	-	+	+	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$	$\cap$



Solución ejercicio 2

Determine dominio, zonas de crecimiento, puntos críticos, zonas de concavidad y asíntotas para la siguiente función:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

Solución: El dominio de f es $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. Bajo esta restricción podemos escribir

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x-2}{x+1} \quad x \neq 1, x \neq -1$$

Tenemos

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(2x+1)(x+1) - (x^2+x-2) \cdot 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} \end{aligned}$$

Note que el discriminante de $x^2 + 2x + 3$ es $\Delta = -8 < 0$. Como el coeficiente líder de este polinomio es positivo, se concluye que $x^2 + 2x + 3 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por lo tanto $f'(x) > 0$ para todo $x \neq 1, x \neq -1$. Así, f es creciente en $] - \infty, -1[$ y en $] - 1, \infty[$.

f no tiene puntos críticos dado que es diferenciable en todo su dominio, y su derivada no se anula.

Ahora, $f''(x) = -\frac{4}{(x+1)^3}$. Por lo tanto, si $x \in] - \infty, -1[$ entonces $f''(x) > 0$ y por lo tanto f es convexa. Si $x \in] - 1, \infty[$ entonces $f''(x) < 0$ y f es cóncava.

La recta $x = -1$ es asíntota vertical, pues $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.
Como $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+x-2}{x^2+x} = 1$, entonces hay una única asíntota oblicua con pendiente $m = 1$. Para calcular el coeficiente de posición de dicha recta hacemos

$$n = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2}{x+1} = 0$$

Por lo tanto la recta $y = x$ es asíntota oblicua.

