

# Matemática para Ingeniería

Sara Arancibia Carvajal  
Jaime Mena Lorca



# Contents

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>I</b> | <b>Introducción al Cálculo</b>                                     | <b>7</b>  |
| <b>1</b> | <b>Los Números Reales</b>                                          | <b>9</b>  |
| 1.1      | Introducción . . . . .                                             | 9         |
| 1.2      | Axiomas de Cuerpo . . . . .                                        | 9         |
| 1.2.1    | Estructura de Grupo . . . . .                                      | 11        |
| 1.2.2    | Axiomas de $\mathbb{R}$ como Cuerpo . . . . .                      | 14        |
| 1.2.3    | Potencias Enteras . . . . .                                        | 21        |
| 1.2.4    | Conjunto restricción y conjunto solución de una ecuación . . . . . | 22        |
| 1.2.5    | Resolución de problemas de planteo . . . . .                       | 24        |
| 1.3      | Axiomas de Orden . . . . .                                         | 34        |
| 1.3.1    | Raíz $n$ -ésima . . . . .                                          | 39        |
| 1.3.2    | Sistemas de Ecuaciones no Lineales . . . . .                       | 45        |
| 1.3.3    | $\sqrt{2}$ es irracional . . . . .                                 | 51        |
| 1.3.4    | Inecuaciones . . . . .                                             | 57        |
| 1.3.5    | La ecuación de segundo grado . . . . .                             | 63        |
| 1.3.6    | Valor absoluto . . . . .                                           | 71        |
| 1.4      | Axioma del Supremo . . . . .                                       | 82        |
| 1.5      | Ejercicios Propuestos . . . . .                                    | 89        |
| 1.5.1    | Estructuras de Grupo y Cuerpo . . . . .                            | 89        |
| 1.5.2    | Problemas de Planteo . . . . .                                     | 90        |
| 1.5.3    | Ejercicios de Sistemas de Ecuaciones . . . . .                     | 92        |
| 1.5.4    | Ejercicios Acerca de los Axiomas de Orden . . . . .                | 92        |
| <b>2</b> | <b>Funciones</b>                                                   | <b>97</b> |
| 2.1      | Introducción . . . . .                                             | 97        |
| 2.2      | Dominio y Recorrido . . . . .                                      | 98        |
| 2.3      | Representación Gráfica . . . . .                                   | 104       |
| 2.3.1    | Raíces mediante gráficas . . . . .                                 | 117       |
| 2.4      | Aplicaciones de Funciones, Modelación . . . . .                    | 122       |
| 2.4.1    | Programación Lineal . . . . .                                      | 133       |
| 2.5      | Algebra de Funciones . . . . .                                     | 138       |
| 2.5.1    | Composición de funciones . . . . .                                 | 141       |
| 2.5.2    | Funciones Crecientes y Decrecientes . . . . .                      | 145       |
| 2.6      | Las funciones Exponenciales y Logarítmicas . . . . .               | 157       |
| 2.7      | Ejercicios Propuestos . . . . .                                    | 174       |
| 2.7.1    | Ejercicios de Dominio y Recorrido . . . . .                        | 174       |
| 2.7.2    | Ejercicios de Gráfica . . . . .                                    | 175       |
| 2.7.3    | Ejercicios de Modelación Matemática . . . . .                      | 176       |
| 2.7.4    | Ejercicios de Compuesta de funciones . . . . .                     | 179       |
| 2.7.5    | Ejercicios de Logaritmos . . . . .                                 | 180       |

|           |                                                         |            |
|-----------|---------------------------------------------------------|------------|
| <b>II</b> | <b>Cálculo Diferencial</b>                              | <b>183</b> |
| <b>3</b>  | <b>Sucesión</b>                                         | <b>185</b> |
| 3.1       | Conceptos Básicos y Ejemplos . . . . .                  | 185        |
| 3.2       | Sucesiones . . . . .                                    | 187        |
| 3.3       | Límite de una Sucesión . . . . .                        | 191        |
| 3.4       | Cálculo de límites . . . . .                            | 197        |
| 3.5       | Ejercicios Propuestos . . . . .                         | 214        |
| <b>4</b>  | <b>Límites de Funciones</b>                             | <b>217</b> |
| 4.1       | Límites de Funciones . . . . .                          | 217        |
| 4.1.1     | Punto de Acumulación . . . . .                          | 217        |
| 4.1.2     | Definición de límite de funciones . . . . .             | 218        |
| 4.1.3     | Demostración de Límite $\varepsilon - \delta$ . . . . . | 219        |
| 4.1.4     | Teoremas Básicos sobre Límites . . . . .                | 225        |
| 4.2       | Límites Laterales . . . . .                             | 227        |
| 4.2.1     | Algebra de Límites . . . . .                            | 230        |
| 4.2.2     | Límite de funciones - sucesiones . . . . .              | 237        |
| 4.2.3     | Teorema de Sustitución . . . . .                        | 241        |
| 4.3       | Continuidad . . . . .                                   | 249        |
| 4.3.1     | Equivalencias de Continuidad . . . . .                  | 251        |
| 4.3.2     | Comentarios . . . . .                                   | 254        |
| 4.3.3     | Funciones continuas sobre compacto . . . . .            | 256        |
| 4.4       | Recta tangente a la Curva . . . . .                     | 266        |
| <b>5</b>  | <b>Derivada</b>                                         | <b>275</b> |
| 5.1       | Derivada . . . . .                                      | 275        |
| 5.1.1     | Ejemplos de funciones derivables . . . . .              | 276        |
| 5.1.2     | Algebra de Derivadas . . . . .                          | 282        |
| 5.1.3     | Regla de la Cadena . . . . .                            | 286        |
| 5.1.4     | Derivada de una función Inversa . . . . .               | 301        |
| 5.2       | Derivada de Orden Superior . . . . .                    | 303        |
| 5.3       | Funciones definidas implícitamente . . . . .            | 306        |
| 5.4       | Regla de L'Hopital . . . . .                            | 319        |
| 5.5       | Aplicaciones de la Derivada . . . . .                   | 326        |
| 5.5.1     | Aplicaciones Geométricas . . . . .                      | 326        |
| 5.5.2     | Aplicaciones Físicas . . . . .                          | 327        |
| 5.5.3     | Razón de Cambio, tasa de variación . . . . .            | 329        |
| 5.6       | Máximo y Mínimo . . . . .                               | 342        |
| 5.6.1     | Test de la Primera Derivada . . . . .                   | 349        |
| 5.6.2     | Teorema del valor medio y Rolle . . . . .               | 350        |
| 5.7       | Concavidad . . . . .                                    | 360        |
| 5.7.1     | Test de la Segunda Derivada: . . . . .                  | 367        |
| 5.7.2     | Límite Infinito . . . . .                               | 369        |
| 5.7.3     | Asíntotas . . . . .                                     | 371        |
| 5.7.4     | Otras asíntotas . . . . .                               | 376        |
| <b>A</b>  | <b>Relaciones</b>                                       | <b>385</b> |
| A.1       | Relaciones Básicas . . . . .                            | 387        |

|                                                                  |            |
|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>B Geometría Analítica</b>                                     | <b>389</b> |
| B.1 El plano bidimensional . . . . .                             | 389        |
| B.1.1 Coordenadas Cartesianas o Rectangulares . . . . .          | 389        |
| B.1.2 Coordenadas Polares . . . . .                              | 389        |
| B.2 Transformación de Coordenadas . . . . .                      | 390        |
| B.2.1 Traslaciones en coordenadas cartesianas . . . . .          | 390        |
| B.2.2 Rotaciones en coordenadas cartesianas . . . . .            | 390        |
| B.2.3 Relación entre coordenadas polares y cartesianas . . . . . | 391        |
| B.3 Recta . . . . .                                              | 392        |
| B.3.1 Distancia . . . . .                                        | 393        |
| B.4 Cónicas . . . . .                                            | 394        |
| B.4.1 Circunferencia . . . . .                                   | 394        |
| B.4.2 Parábola . . . . .                                         | 395        |
| B.4.3 Elipse . . . . .                                           | 396        |
| B.4.4 Hipérbola . . . . .                                        | 398        |
| B.4.5 Ecuaciones Cuadráticas y Cónicas . . . . .                 | 399        |
| <b>C Funciones Reales de Dos Variables</b>                       | <b>401</b> |
| C.1 Gráfica de funciones reales de dos variables . . . . .       | 405        |
| C.2 Álgebra de funciones . . . . .                               | 407        |
| <b>D Problemas Misceláneos Parte I</b>                           | <b>409</b> |
| D.1 Respuestas a los Ejercicios Propuestos . . . . .             | 413        |
| <b>E Ejercicios Propuestos</b>                                   | <b>423</b> |



## Part I

# Introducción al Cálculo





# Chapter 1

## Los Números Reales

### 1.1 Introducción

El conjunto de los **Números Reales**,  $\mathbb{R}$ , puede ser caracterizado de varias formas. Aquí daremos la **caracterización axiomática**, a diferencia de las versiones constructivas tales como la que usa **Cortaduras de Dedekind** o la construcción mediante **Sucesiones de Cauchy**.

La obtención de  $\mathbb{R}$  en forma constructiva es bastante más complicada que la que daremos a continuación. La única diferencia consiste en que son necesarios otros axiomas para construir conjuntos de números con los cuales se construirán a su vez los números reales.

El conjunto de los números reales,  $\mathbb{R}$  es un conjunto en el que se cumplen los siguientes axiomas:

1. Axiomas de Cuerpo.
2. Axiomas de Orden.
3. Axioma del Supremo o de Completitud.

Lo anterior se resume diciendo que  $\mathbb{R}$  es un **Cuerpo Ordenado Completo**.

### 1.2 Axiomas de Cuerpo

Primero estudiaremos los axiomas de cuerpo, que se refieren a las propiedades algebraicas (de “operatoria”) de los números reales.

Comencemos recordando algunas propiedades que satisfacen algunos conjuntos bajo “operaciones”: clausura, asociatividad, existencia de elemento neutro, existencia de elemento inverso y conmutatividad.

Consideremos el conjunto

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

llamado el conjunto de los **Números Naturales**.

Observemos que

$$1 + 2 = 3 \in \mathbb{N} \quad 4 + 5 = 9 \in \mathbb{N}$$

En general se tiene que si  $a, b \in \mathbb{N}$  la suma  $a + b$  también pertenece a  $\mathbb{N}$ . En otras palabras en  $\mathbb{N}$  provisto de la suma (+) se cumple la propiedad de **clausura** o **cerradura**.

En cambio si consideramos el subconjunto  $A$  de  $\mathbb{N}$ ;

$$A = \{a \in \mathbb{N} : a \text{ es impar} \}$$

vemos que no se cumple la clausura bajo la suma.

En efecto  $1 \in A$  y  $3 \in A$  pero  $1 + 3 = 4 \notin A$ . Es decir, al sumar dos elementos del conjunto  $A$  no siempre se obtiene como resultado un elemento del conjunto  $A$ .

Es claro que  $\mathbb{N}$  también verifica las propiedades asociativa y conmutativa, es decir, para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$ ;

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= a + (b + c) & \text{y} \\ a + b &= b + a\end{aligned}$$

Sin embargo, no existe un elemento en  $\mathbb{N}$  que sea neutro para esta operación. Dicho en forma más precisa, no existe un elemento  $e \in \mathbb{N}$  tal que al sumarlo con cualquier elemento  $a \in \mathbb{N}$  se obtenga el mismo número  $a$  en  $\mathbb{N}$ .

Por otra parte, si consideramos  $\mathbb{N}$  bajo la operación producto (o multiplicación) se tiene que se cumplen las siguientes propiedades:

i) Si  $a, b \in \mathbb{N}$ , entonces  $ab \in \mathbb{N}$

ii) Para todo  $a, b, c \in \mathbb{N}$  se verifica

$$(ab)c = a(bc)$$

iii) Existe  $1 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $a \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$$

iv) Para todo  $a, b \in \mathbb{N}$

$$ab = ba$$

Así, en  $\mathbb{N}$  con la multiplicación ( $\cdot$ ), se verifica las propiedades de clausura (i), asociatividad (ii), existencia de neutro (iii) y conmutatividad. Pero, dado  $a \in \mathbb{N}$  no existe un elemento  $a' \in \mathbb{N}$  tal que al multiplicarlo con  $a$  se obtenga el elemento neutro  $e = 1$ , es decir, no se verifica la propiedad de existencia de inverso.

?¿Qué conjunto cumplirá con todas las propiedades mencionadas?

Consideremos el conjunto de los **Números Enteros**

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- \cup \{0\}$$

donde

$$\mathbb{N}^- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}.$$

En  $\mathbb{Z}$  con la suma (+) se verifica:

i) Clausura:

Para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$ , se tiene que  $a + b \in \mathbb{Z}$

ii) Asociatividad:

Para todo  $a, b, c \in \mathbb{Z}$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

iii) Existencia de neutro:

Existe  $e = 0 \in \mathbb{Z}$ , tal que para todo  $a \in \mathbb{Z}$

$$0 + a = a + 0 = a$$

iv) Existencia de inverso:

Para todo  $a \in \mathbb{Z}$ , existe  $(-a) \in \mathbb{Z}$  tal que

$$a + (-a) = (-a) + a = 0$$

v) Conmutatividad:

Para todo  $a, b \in \mathbb{Z}$

$$a + b = b + a$$

En cambio, si consideramos  $\mathbb{Z}$  bajo la operación producto  $(\cdot)$  se verifican (i), (ii), (iii) (en este caso 1 hace el papel de neutro) y (v). Sin embargo no se verifica la propiedad de inverso, (iv), puesto que: Dado  $a \in \mathbb{Z}$  no siempre existe  $a' \in \mathbb{Z}$  tal que

$$aa' = e = 1$$

Diremos que  $\mathbb{Z}$  bajo la operación de suma  $(+)$  es un *grupo* y anotaremos  $(\mathbb{Z}, +)$  es grupo; en cambio,  $(\mathbb{Z}, \cdot)$  no es grupo.

**Definición 1.1** Diremos que  $*$  es una operación ("binaria") en  $G$  si para todo  $x, y$  en  $G$  existe un único  $x * y$  en  $G$ .

**Nota:** El hecho que  $x * y$  está en  $G$  y no en otro conjunto se acostumbra a decir que cumple la propiedad de clausura.

### 1.2.1 Estructura de Grupo

**Definición 1.2** Sea  $G$  un conjunto no vacío y  $*$  una operación en  $G$ . Diremos que  $G$  es un grupo bajo la operación  $*$  si las siguientes tres afirmaciones son ciertas

i) *Asociatividad:*

Para todo  $x, y, z$  en  $G$ , se cumple

$$(x * y) * z = x * (y * z)$$

En símbolos

$$(\forall x, y, z \in G)((x * y) * z = x * (y * z))$$

ii) *Existencia de elemento neutro:*

Existe  $e$ , elemento neutro en  $G$ , tal que para todo  $x$  en  $G$ , se tiene

$$x * e = e * x = x$$

En símbolos

$$(\exists e \in G)(\forall x \in G)(x * e = e * x = x)$$

iii) *Existencia de elementos inversos:*

Para todo  $x$  en  $G$ , existe  $x'$  en  $G$  tal que

$$x * x' = x' * x = e$$

En símbolos<sup>1</sup>

$$(\forall x \in G)(\exists x' \in G)(x * x' = x' * x = e)$$

Esto se denota resumidamente;  $(G, *)$  es grupo.

Si además se verifica;

iv) *Conmutatividad:*

Para todo  $x, y$  en  $G$ , se cumple

$$x * y = y * x$$

En símbolos

$$(\forall x, y \in G)(x * y = y * x)$$

entonces  $(G, *)$  es un grupo Abelianiano o simplemente  $G$  es un grupo Abelianiano, subentendiendo que hay una operación  $(*)$ .

---

<sup>1</sup>Notemos la importancia del orden de los cuantificadores  $\forall, \exists$  (compare con ii).

**Ejemplo 1** Sea

$$M_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}$$

el conjunto de matrices cuadradas de orden 2 con coeficientes en  $\mathbb{Z}$  y  $(+)$  la operación definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix},$$

entonces  $M_2(\mathbb{Z})$  es un grupo.

**Solución:** Verifiquemos que  $M_2(\mathbb{Z})$  cumple con las propiedades de grupo

i) Asociatividad:

Sean  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$  pertenecientes a  $M_2(\mathbb{Z})$ . Se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} &= \left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}, \text{ por definición de } + \\ &= \begin{pmatrix} (a+a')+a'' & (b+b')+b'' \\ (c+c')+c'' & (d+d')+d'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a+(a'+a'') & b+(b'+b'') \\ c+(c'+c'') & d+(d'+d'') \end{pmatrix}, \text{ asociatividad en } \mathbb{Z} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'+a'' & b'+b'' \\ c'+c'' & d'+d'' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \left( \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

ii) Existencia del neutro:

Existe  $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$  tal que para todo  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$  se tiene

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

iii) Existencia de elementos inversos:

Para todo  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$  existe  $\begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z})$  tal que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Observación:** Muchas veces se pretende demostrar que un conjunto es grupo mostrando que 2 ó 3 elementos particulares, tomados al azar, satisfacen las propiedades de clausura, asociatividad, existencia de elemento neutro y existencia de elemento inverso. Tal acción **no** demuestra que un conjunto es grupo; tampoco será una demostración válida si se toma “un montón” de elementos del conjunto. La única forma de demostrar esto es tomándolos **todos**, verificando que **todos** en conjunto cumplen las propiedades de clausura, asociatividad, existencia de elemento neutro y existencia de elementos inversos (Note los cuantificadores usados en las propiedades).

En el caso que se quiera probar que un conjunto **no** es grupo, basta demostrar que existe al menos alguna propiedad que no se cumpla. Según la regla indica la negación de la proposición:

*Todos los elementos de  $G$  cumplen todas las propiedades*

es:

*Existe al menos un elemento de  $G$  que no cumple alguna propiedad*

Por eso es que cuando se quiere probar que un conjunto  $G$  es un grupo se toman unos elementos de  $G$  **genéricos** que representan a cualesquiera de los elementos de  $G$ .

**Ejemplo 2** Sea

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{Z} \right\}$$

con la suma  $(+)$  definida en el ejemplo 1. Entonces  $(B, +)$  no es un grupo, puesto que no se verifica la propiedad de clausura. En efecto;

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in B \quad y \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in B$$

pero

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \notin B$$

ya que la entrada superior derecha de la matriz resultante no es 1, condición necesaria para estar en el conjunto  $B$ .

**Ejemplo 3** Sea  $C = \{(x, y) : x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{N}\}$  y sea  $*$  la operación definida por

$$(x_1, y_1) * (x_2, y_2) = (x_1 - x_2, y_1 + y_2)$$

Entonces  $(C, *)$  no es grupo. En efecto;  $(1, 2), (3, 5), (-1, 4) \in C$

$$\begin{aligned} ((1, 2) * (3, 5)) * (-1, 4) &= (1 - 3, 2 + 5) * (-1, 4) \\ &= (-1, 11) \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} (1, 2) * ((3, 5) * (-1, 4)) &= (1, 2) * (3 - (-1), 5 + 4) \\ &= (-3, 11) \end{aligned}$$

Como  $(-1, 11) \neq (-3, 11)$ , entonces no se cumple la propiedad asociativa.

**Ejemplo 4** Sea

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\},$$

llamado el conjunto de los **Números Racionales**.

Considere las operaciones suma y producto definidas por:

$$\begin{aligned} \frac{a}{b} + \frac{c}{d} &= \frac{ad + bc}{bd} \\ \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} &= \frac{ac}{bd} \end{aligned}$$

Note que  $\frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$  y  $\frac{ac}{bd} \in \mathbb{Q}$ , puesto que,  $ad + bc \in \mathbb{Z}$ ,  $ac \in \mathbb{Z}$  y  $bd \in \mathbb{Z} - \{0\}$ .  $(\mathbb{Q}, +)$  es grupo y  $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$  es grupo. Se deja como ejercicio la verificación de las respectivas propiedades.

**Ejemplo 5** : Sean  $G = \{(x, y) : x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Z}\}$  y  $*$  la operación definida por:

$$(x, y) * (x', y') = (xx', y + y')$$

Determinemos si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- a) El elemento neutro de  $G$  es  $(0, 0)$ .
- b) Existe un elemento neutro para  $G$ .
- c) El inverso de  $(1, 4)$  es  $(0, -4)$ .
- d)  $(G, *)$  es un grupo.
- e)  $G$  cumple la conmutatividad.

**Solución:**

- a) Falso, existe  $(2, 3) \in G$ , tal que

$$(2, 3) * (0, 0) = (0, 3) \neq (2, 3)$$

- b) Verdadero, porque existe el elemento  $(1, 0) \in G$  tal que para todo  $(x, y) \in G$ ;

$$(x, y) * (1, 0) = (1, 0) * (x, y) = (x, y)$$

- c) Falso;

$$(1, 4) * (0, -4) = (0, 0) \neq (1, 0)$$

- d) Falso, porque existe  $(0, 0) \in G$  tal que para todo  $(x, y) \in G$ ;

$$(0, 0) * (x, y) = (0, y) \neq (1, 0)$$

es decir,  $(0, 0)$  no tiene inverso.

- e) Verdadero, pues para todo  $(x, y), (x', y') \in G$ ;

$$\begin{aligned} (x, y) * (x', y') &= (xx', y + y') \\ &= (x'x, y' + y) \\ &= (x', y') * (x, y) \end{aligned}$$

luego

$$(x, y) * (x', y') = (x', y') * (x, y)$$

### 1.2.2 Axiomas de $\mathbb{R}$ como Cuerpo

Admitiremos la existencia de un conjunto  $\mathbb{R}$  cuyos elementos se llamarán **números reales**. En el conjunto  $\mathbb{R}$  se tienen las operaciones fundamentales:

La suma o adición:  $a + b$

El producto o multiplicación:  $a \cdot b$

Considérense los siguientes axiomas

- i)  $0 \in \mathbb{R}$ ,  $1 \in \mathbb{R}$ ,  $0 \neq 1$
- ii)  $(\mathbb{R}, +)$  es grupo abeliano
- iii)  $(\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$  es grupo abeliano
- iv) Distributividad:

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a(b + c) = ab + ac$$

Se dice que el conjunto  $\mathbb{R}$  provisto de todos los axiomas dados anteriormente es un **Cuerpo** y se escribe;  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  es un cuerpo.

Los elementos neutros de  $\mathbb{R}$  son el 0 y el 1 (para la adición y multiplicación respectivamente) pero nunca hemos puesto en duda que estos son los **únicos** con esta propiedad.

En efecto, por ejemplo 1 es el neutro multiplicativo, según establece la proposición siguiente.

**Proposición 1.3** *En los números reales tenemos*

- i) *El neutro aditivo es único*
- ii) *El neutro multiplicativo es único*
- iii) *El inverso aditivo de un número real es único*
- iv) *El inverso multiplicativo de un número real no nulo es único*

Sin duda, para la mayoría de nosotros esta será la primera demostración de *unicidad* y siendo asíes bueno hacer notar que muchas veces deberemos probar que algún ente matemático es único. Lo usual en estos casos es usar el **método del absurdo** que consiste en suponer (en estos problemas) que hay dos elementos (es decir, que no es único) que cumplen la propiedad que los define (por ejemplo ser neutro) y bajo este supuesto llegar a una frase matemática que sea **falsa**.

**Demostración:** (i) Supongamos que  $0, 0' \in \mathbb{R}$  son dos neutros aditivos distintos ( $0 \neq 0'$ ), es decir, 0 y  $0'$  cumplen

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad a = 0 + a = a + 0 \quad (1.1)$$

$$\forall b \in \mathbb{R} \quad b + 0' = 0' + b = b \quad (1.2)$$

Como  $0' \in \mathbb{R}$ , en particular se puede tomar  $a = 0'$  en 1.1, asítenemos que

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 \quad (1.3)$$

Análogamente considerando  $b = 0$  en 1.2 se tiene

$$0 + 0' = 0' + 0 = 0 \quad (1.4)$$

Conectando las cadenas 1.3 y 1.4 se tiene que

$$0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$$

es decir,

$$0' = 0$$

lo que hace una contradicción con  $0 \neq 0'$

Se dejan como ejercicio para el lector las demostraciones de las partes (ii), (iii) y (iv) de la proposición.

**Observación:** Es importante aclarar que el método del absurdo es muy útil para demostrar proposiciones del tipo

$$p \Rightarrow q \quad (1.5)$$

El método consiste en suponer que se cumple la negación de 1.5

$$\sim (p \Rightarrow q),$$

es decir, suponer que se verifica

$$p \wedge \sim q \quad (1.6)$$

y a partir de ella obtener una contradicción, la que nos permite afirmar que 1.6 es falso, y por lo tanto que la proposición 1.5 es verdadera.

Como ejemplo, probemos una propiedad que nos será útil más adelante.

### Ejemplo 6

$$\text{Si } p^2 \text{ es par, entonces } p \text{ es par.} \quad (1.7)$$

Observe que la proposición en 1.7 es del tipo  $r \Rightarrow s$  donde<sup>2</sup>  $r =: p^2$  **es par** y la proposición  $s$  es  $s =: p$  **es par**.

---

<sup>2</sup> Usaremos el símbolo " $=:$ " para indicar que la proposición a la izquierda de él está definida por la expresión a su derecha. Aquí " $r =: p^2$  es par" significa que la proposición  $r$  "se define" como la proposición  $p^2$  es par.

**Demostración:** Supongamos lo contrario, es decir,  $p^2$  es par y  $p$  no es par. Como  $p$  no es par  $p$  debe ser impar; luego existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que

$$p = 2k + 1$$

pero

$$\begin{aligned} p^2 &= (2k + 1)(2k + 1) \\ &= (2k + 1)2k + (2k + 1) \cdot 1 \\ &= 4k^2 + 2k + 2k + 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

luego  $p^2 = 2k' + 1$  con  $k' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$  de donde  $p^2$  es impar; lo que contradice el supuesto que  $p^2$  es par.

En consecuencia

Si  $p^2$  es par, entonces  $p$  es par

### Ejemplo 7

□

#### Notación:

$a^{-1}$  indica el inverso multiplicativo del número real no nulo  $a$ .

Con los axiomas de cuerpo demostraremos algunas propiedades básicas de  $\mathbb{R}$ .

**Proposición 1.4** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

i)  $-(a + b) = (-a) + (-b)$

ii)  $-(-a) = a$

iii)  $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ ,  $a \neq 0$ ,  $b \neq 0$

iv)  $(a^{-1})^{-1} = a$ ,  $a \neq 0$

v)  $b \cdot 0 = 0$

vi)  $-(ab) = (-a)b = a(-b)$

vii)  $(-a)(-b) = ab$

**Demostración:** i) Como  $a$  y  $b$  son números reales,  $a + b$  también es un número real. Así, por axioma, este último tiene su inverso aditivo que es  $-(a + b)$ , por lo tanto

$$(a + b) + (-(a + b)) = 0$$

Por otra parte, por conmutatividad, asociatividad, axioma del inverso y axioma del neutro tenemos que

$$\begin{aligned} (a + b) + (-a) + (-b) &= (a + (-a)) + (b + (-b)) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(a + b) + (-a) + (-b) = 0$$

esta última igualdad nos dice que también  $(-a) + (-b)$  es inverso de  $(a + b)$ . De esta forma, por unicidad del inverso aditivo, se tiene que

$$-(a + b) = (-a) + (-b)$$

ii) Por axioma del inverso aditivo existe  $(-a) \in \mathbb{R}$  y  $-(-a) \in \mathbb{R}$  y notemos que

$$(-a) + a = a + (-a) = 0$$



y

$$(-(-a)) + (-a) = (-a) + (-(-a)) = 0$$

igualdades que nos dicen que tanto  $a$  como  $-(-a)$  son inversos aditivos de  $(-a)$ ; en consecuencia, por unicidad del inverso aditivo

$$a = -(-a)$$

Análogamente se demuestran (iii) y (iv) cambiando suma por multiplicación y naturalmente cambiando la notación de inverso aditivo a inverso multiplicativo.

v) Puesto que por axioma del neutro aditivo

$$0 = 0 + 0$$

entonces tenemos por distributividad

$$b \cdot 0 = b \cdot (0 + 0) = b \cdot 0 + b \cdot 0$$

luego

$$b \cdot 0 = b \cdot 0 + b \cdot 0$$

Sumando a ambos miembros de la ecuación ?? el inverso aditivo del número real  $b \cdot 0$ , asociando debidamente, y por la propiedad del neutro e inverso aditivo se tiene que

$$\begin{aligned} b \cdot 0 + (-(b \cdot 0)) &= b \cdot 0 + b \cdot 0 + (-(b \cdot 0)) \\ 0 &= b \cdot 0 + (b \cdot 0 + (-(b \cdot 0))) \\ 0 &= b \cdot 0 + 0 \\ 0 &= b \cdot 0 \end{aligned}$$

luego

$$b \cdot 0 = 0$$

vi) La demostración consiste en probar que  $-(ab)$  y  $(-a)b$  son inversos aditivos del mismo número: Claramente podemos ver que  $-(ab)$  es el inverso de  $(ab)$  luego

$$ab + (-(ab)) = 0$$

Por otro lado por la propiedad de distributividad, axioma del inverso aditivo y por ?? tenemos que

$$\begin{aligned} ab + (-a)b &= (a + (-a))b \\ &= 0 \cdot b \\ &= 0 \end{aligned}$$

luego

$$ab + (-a)b = 0$$

igualdad que nos dice que  $(-a)b$  también es inverso de  $ab$ , así, por unicidad del inverso de  $ab$  se tiene que

$$-(ab) = (-a)b$$

Además, por conmutatividad, ?? se tiene que

$$\begin{aligned} -(ab) &= -(ba) \\ &= (-b)a \\ &= a(-b) \end{aligned}$$

por lo tanto

$$-(ab) = a(-b)$$

que es la otra igualdad que queríamos probar.

vii) Consideremos

$$\begin{aligned} (-a)(-b) &= -(a(-b)) && \text{usando vi)} \\ &= -(-(ab)) && \text{usando vi)} \\ &= ab && \text{usando ii)} \end{aligned}$$

luego

$$(-a)(-b) = ab$$

lo que prueba finalmente la proposición.  $\square$

### Corolario 1.5

i)  $(-1)(-1) = 1$

ii)  $-(b) = -(1b) = (-1)b$

**Demostración:** Tomando  $a = 1$  y  $b = 1$  en vii) se tiene que

$$(-1)(-1) = 1$$

y tomando  $a = 1$  en vi) se tiene

$$-(b) = -(1b) = (-1)b$$

$\square$

### Notaciones:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces escribiremos

$$\begin{aligned} a + (-b) &= : a - b \\ a^{-1} &= \frac{1}{a}, \quad a \neq 0 \\ ab^{-1} &= \frac{a}{b}, \quad b \neq 0 \end{aligned} \tag{1.8}$$

**Ejemplo 8** Cuando anotamos

$$\frac{1}{x^2 - 4}$$

estamos hablando del inverso multiplicativo de  $x^2 - 4$ . De esta forma,  $\frac{1}{x^2 - 4}$  sería un número real si y sólo si  $x^2 - 4 \neq 0$ ; es decir, si  $x \neq 2$  y  $x \neq -2$ , así la igualdad

$$\frac{1}{x^2 - 4} = (x^2 - 4)^{-1}$$

está definida en  $\mathbb{R}$  si y sólo si  $x \in \mathbb{R} - \{-2, 2\}$  (en otro caso ambas expresiones carecen de sentido).

**Observación:** Si  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ , entonces;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$$

en efecto, usando la proposición 1.4 y la notación anterior;

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = a^{-1}(b^{-1})^{-1} = a^{-1}b = ba^{-1} = \frac{b}{a}$$

Muchas entre las observaciones anteriores y las que vendrán, son familiares al lector, más aún, ya las ha utilizado; pero lo que debemos notar es que son proposiciones que se pueden demostrar y que todas provienen de los axiomas de cuerpo que cumple  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 9** Sean  $a, c \in \mathbb{R}$ ,  $b, d \in \mathbb{R} - \{0\}$

*Demostraremos que se tiene las siguientes igualdades*

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (1.9)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \quad (1.10)$$

*Usando la notación, proposición 1.4 y los axiomas de  $\mathbb{R}$  se tiene que*

$$\begin{aligned} \frac{ad+bc}{bd} &= (ad+bc)(bd)^{-1} && \text{notación} \\ &= ad(bd)^{-1} + bc(bd)^{-1} && \text{distributividad} \\ &= adb^{-1}d^{-1} + bcb^{-1}d^{-1} && 1.4iii) \\ &= a(dd^{-1})b^{-1} + (bb^{-1})cd^{-1} && \text{conmutatividad y asociatividad} \\ &= a1b^{-1} + 1cd^{-1} && \text{propiedad inversos} \\ &= ab^{-1} + cd^{-1} && \text{propiedad neutro} \\ &= \frac{a}{b} + \frac{c}{d} && \text{notación} \end{aligned}$$

*Además:*

$$\left(\frac{a}{b}\right) \left(\frac{c}{d}\right) = (ab^{-1})(cd^{-1}) = acb^{-1}d^{-1} = ac(bd)^{-1} = \frac{ac}{bd}$$

Las propiedades anteriores tienen la ventaja de que nos permiten trabajar con expresiones más simplificadas

## Subconjuntos Notables

Algunos subconjuntos notables de  $\mathbb{R}$  que mencionamos al principio del capítulo son

El conjunto de los **números Naturales**.

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

El conjunto de los **números Enteros**.

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

El conjunto de los **números Racionales**.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z} - \{0\} \right\}$$

Otros conjuntos notables son

$$\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \mathbb{Z}_0^+$$

$$\mathbb{Z}^- = \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$$

este último llamado el conjunto de los **números Irracionales**.

Naturalmente se tiene la siguiente cadena de desigualdades

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 = \mathbb{Z}_0^+ \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

y además<sup>3</sup>

$$\mathbb{Q} \dot{\cup} \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Notemos que los siguientes números reales

$$1, 324, \quad 0, \overline{3}, \quad \frac{1, 2}{0, 36}$$

---

<sup>3</sup> $\dot{\cup}$  indica unión disjunta.

son números racionales, pues ellos se pueden expresar de la forma

$$\frac{a}{b}, \quad \text{para algún } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} - \{0\}$$

Por ejemplo

$$1,324 = \frac{1324}{1000}, \quad 0,\overline{3} = \frac{3}{9} \quad \frac{1,2}{0,36} = \frac{\frac{12}{10}}{\frac{36}{100}} = \frac{120}{36}$$

y simplificando cada una obtenemos expresiones racionales más simples

$$1,324 = \frac{331}{250}, \quad 0,\overline{3} = \frac{1}{3}, \quad \frac{1,2}{0,36} = \frac{10}{3}$$

Algunos ejemplos de números irracionales son

$$\pi, \quad \sqrt{2}, \quad e$$

donde  $\pi$  “se aproxima” al racional 3,14 y  $e$  se aproxima al racional 2,71. Estas aproximaciones son usadas para hacer algunos cálculos menores más simples, pero ellos tienen infinitos decimales y no son periódicos. Probaremos más adelante que  $\sqrt{2}$  es un número irracional.

Recordemos que el radio de una circunferencia está contenido  $2\pi$  veces en su circunferencia.

Ahora veamos algunos ejemplos que muestran algunas de las propiedades algebraicas que cumplen los subconjuntos de  $\mathbb{R}$  anteriormente mencionados.

**Ejemplo 10** *Determinemos si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones*

1. El conjunto de los números irracionales cumple con el axioma de **clausura** para la suma o el producto definidos en  $\mathbb{R}$
2.  $(\mathbb{I}, +)$  es un grupo
3.  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  es un cuerpo
4.  $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$  es un cuerpo

*Solución:*

1. Falso. Los números  $a = \sqrt{2}$  y  $b = -\sqrt{2}$  son irracionales pero

$$a + b = 0$$

que es un número racional ( $0 = \frac{0}{1}$ , por ejemplo); por lo tanto no cumple con la propiedad de clausura para la suma. Por otra parte si tomamos ahora  $a = b = \sqrt{2}$ , entonces  $ab = \sqrt{2}\sqrt{2} = 2$  que es un número racional; por lo tanto no se cumple la propiedad de clausura para el producto definido en  $\mathbb{R}$ .

2. Falso. Por lo anterior es claro que  $(\mathbb{I}, +)$  no es grupo
3. Falso. Si  $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$  fuera cuerpo, entonces  $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot)$  sería grupo; pero  $\mathbb{Z}$  no cumple la propiedad de inverso multiplicativo.
4. Verdadero.  $(\mathbb{Q}, +)$  es grupo,  $(\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot)$  es grupo y se cumple la propiedad distributiva en  $\mathbb{Q}$ .

### 1.2.3 Potencias Enteras

**Definición 1.6** Sea  $a \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Se define la potencia real de base  $a$  y exponente  $n$  por:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{n \text{ veces}}$$

Una definición más precisa de potencia es la siguiente

Sea  $a \in \mathbb{R}$ . Se define por recurrencia;

i)  $a^0 = 1, a \neq 0$

ii)  $a^{n+1} = a^n \cdot a, \forall n \in \mathbb{N}_0$

Sea  $n \in \mathbb{Z}^-$ ,  $a \neq 0$ . Se define la potencia real de base  $a$  y exponente  $n$  por:

$$a^n = \frac{1}{a^{-n}} = \frac{1}{\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdots a}_{-n \text{ veces}}} \quad (1.11)$$

#### Ejemplo 11

$$2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8, \quad 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{8}$$

**Teorema 1.7** Sea  $a, b \in \mathbb{R} - \{0\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ , entonces

i)  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$

ii)  $a^n b^n = (ab)^n$

iii)  $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

iv)  $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

v)  $(a^n)^m = a^{nm}$

Todas estas propiedades se prueban usando **inducción**, técnica de demostración que consiste en este caso en: primero ver que la igualdad se cumple para  $n = 0$ ; posteriormente, se supone que se cumple la igualdad para un natural (genérico)  $k$  y utilizando esta información se muestra que la igualdad es válida para el natural siguiente  $k + 1$ . Una demostración tal nos garantiza que las igualdades son sólo válidas en  $\mathbb{N}_0$  pero usando la definición se puede obtener la propiedad en  $\mathbb{Z}$ .

### Productos Notables

Usando las propiedades de potencias y los axiomas de  $\mathbb{R}$  se tienen los siguientes productos notables:

$$\begin{aligned} 1) \quad a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ 2) \quad (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ 3) \quad a^3 + b^3 &= (a + b)(a^2 - ab + b^2) \\ 4) \quad a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ 5) \quad (a + b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ 6) \quad (a - b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 \\ 7) \quad a^m - b^m &= (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \cdots + \\ &\quad ab^{m-2} + b^{m-1}) \quad \forall m \in \mathbb{Z}^+ \end{aligned}$$

**Ejemplo 12** Sean  $a, b$  en  $\mathbb{R}$ , tales que la expresión siguiente esté definida en  $\mathbb{R}$ :

$$I = \frac{a^{-1} + b^{-1} - c(ab)^{-1}}{\frac{a^2 + b^2 - c^2}{a^2 b^2} + 2a^{-1}b^{-1}} \left( \frac{1}{\frac{1}{a+b+c}} \right)$$

Simplifique  $I$ .

**Solución:** Procediendo en etapas, tenemos

$$\begin{aligned} I &= \frac{a^2 b^2 (a^{-1} + b^{-1} - c(ab)^{-1})}{a^2 + b^2 - c^2 + 2a^{-1}b^{-1}a^2 b^2} (a + b + c) \\ &= \frac{(ab^2 + a^2 b - cab)(a + b + c)}{a^2 + b^2 - c^2 + 2ab} \\ &= \frac{ab(b + a - c)(a + b + c)}{(a + b)^2 - c^2} \\ &= \frac{ab(b + a - c)(a + b + c)}{(a + b - c)(a + b + c)} \\ &= ab \end{aligned}$$

Determine para qué valores de  $x \in \mathbb{R}$  la expresión está **definida** en  $\mathbb{R}$ , y simplifique.

$$E = \frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2 - 1}}$$

**Solución:** La expresión está definida en  $\mathbb{R}$  si

$$\frac{(x-1)^3}{x^2 - 1} \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \neq 0$$

es decir,

$$(x-1) \neq 0 \quad \wedge \quad x^2 - 1 \neq 0$$

Por lo tanto  $E \in \mathbb{R}$  si  $x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

Tenemos

$$\begin{aligned} E &= \frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2 - 1}} \quad x \neq 1, \quad x \neq -1 \\ &= \frac{x^2 - 2x + 1}{(x-1)^3} (x^2 - 1) \\ &= \frac{1}{(x-1)} (x-1)(x+1) \\ &= x + 1 \end{aligned}$$

Note que  $x + 1$  tiene sentido<sup>4</sup> para todo  $x \in \mathbb{R}$ , no así  $E$  ya que al menos para 1 y  $-1$  no tiene sentido.

#### 1.2.4 Conjunto restricción y conjunto solución de una ecuación

Llamaremos **conjunto restricción**<sup>5</sup> de una expresión que involucra a los términos  $P(x)$  y  $Q(x)$ <sup>6</sup> (por ejemplo,  $P(x) = Q(x)$ ) al conjunto  $\mathcal{R}$  de los  $x$  en  $\mathbb{R}$  para los cuales cada término de la expresión está definida en  $\mathbb{R}$ .

Llamaremos **conjunto solución** de la ecuación  $P(x) = Q(x)$  al subconjunto  $S$  de los  $x$  en  $\mathcal{R}$  que satisfacen la ecuación, es decir,

$$S = \{x \in \mathbb{R} \cap \mathcal{R} : P(x) = Q(x)\}$$

<sup>4</sup>Que  $x + 1$  tenga “sentido” para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$  significa que  $x + 1$  está definido en todo  $x \in \mathbb{R}$ , es decir,  $\forall x \in \mathbb{R}, x + 1 \in \mathbb{R}$ .

<sup>5</sup>Suele llamársele **dominio** de una expresión.

<sup>6</sup> $P(x)$  y  $Q(x)$  son expresiones tales que al menos una de ellas involucra la variable  $x$ .

También escribiremos

$$S = \{x \in \mathbb{R} : P(x) = Q(x)\}$$

subentendiendo que  $x$  debe estar en  $\mathcal{R}$ .

Observemos que el conjunto solución siempre debe estar incluido en el conjunto restricción  $S \subset \mathcal{R}$ .

Por ejemplo, el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} = x\}$  es el conjunto de los reales tales que cumplen la ecuación  $\frac{1}{x} = x$ , es decir,

$$\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{x} = x\} = \{-1, 1\}$$

Resolver una ecuación significa encontrar su conjunto solución.

Resolvamos la ecuación

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}} = 3$$

**Solución:** Por el ejemplo 1.2.3 es claro que el conjunto restricción es  $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ , Además simplificando la expresión izquierda de la igualdad, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 2x + 1}{\left(\frac{(x-1)^3}{x^2-1}\right)} &= 3 \\ \Leftrightarrow x + 1 &= 3 \\ \Leftrightarrow x &= 2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es:

$$\begin{aligned} S &= \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 2x + 1}{\frac{(x-1)^3}{x^2-1}} = 3\right\} \\ &= \{2\} \cap \mathcal{R}_1 \\ &= \{2\} \cap (\mathbb{R} - \{-1, 1\}) \\ &= \{2\} \end{aligned}$$

**Proposición 1.8** Sean  $a, b$  en  $\mathbb{R}$ .

i) La ecuación

$$x + a = b$$

tiene por única solución el real  $b - a$ .

ii) Si  $a \neq 0$  la ecuación

$$ax = b$$

tiene como única solución el real  $\frac{b}{a}$ .

La demostración se dejará como ejercicio para el lector; debe usarse las propiedades de inverso aditivo y multiplicativo respectivamente.

**Ejercicio 13** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

1.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x+3}{x+3} = 1\right\} = \mathbb{R}$
2.  $\left\{x \in \mathbb{R} : \frac{(x+3)(x+4)}{x+3} = 1\right\} = \phi$
3.  $(\forall a, b \in \mathbb{R})(ab = 1 \Rightarrow (a = 1 \vee b = 1))$
4.  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

**Solución:**

1. Falso. El conjunto restricción de la ecuación

$$\frac{x+3}{x+3} = 1$$

es  $\mathcal{R} = \mathbb{R} - \{-3\}$ .

Luego, simplificando la expresión

$$\frac{x+3}{x+3} = 1$$

obtenemos que  $1 = 1$  lo cual es verdadero. Por lo tanto el conjunto solución de la ecuación es

$$S = \left\{ x \in \mathcal{R} : \frac{x+3}{x+3} = 1 \right\} = \mathbb{R} \cap \mathcal{R} = \mathbb{R} - \{-3\}$$

2. Verdadero. El conjunto restricción de la ecuación

$$\frac{(x+3)(x+4)}{x+3} = 1$$

es  $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} - \{-3\}$ . Sin embargo al simplificar la expresión

$$\frac{(x+3)(x+4)}{x+3} = 1$$

obtenemos la ecuación

$$x+4 = 1$$

de donde tenemos que  $x = -3$ . Luego el conjunto solución de la ecuación es

$$\begin{aligned} S = \left\{ x \in \mathcal{R}_1 : \frac{x+3}{x+3} = 1 \right\} &= \{-3\} \cap \mathcal{R}_1 \\ &= \{-3\} \cap (\mathbb{R} - \{-3\}) \\ &= \phi \end{aligned}$$

3. Falso. Consideremos  $a = 2/3$ ,  $b = 3/2$  en  $\mathbb{R}$

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} = 1 \text{ pero } \frac{2}{3} \neq 1 \text{ y } \frac{3}{2} \neq 1$$

4. Falso. Sean  $x = -2$ ,  $y = 2$

$$(-2)^2 = 2^2 \text{ pero } -2 \neq 2$$

### 1.2.5 Resolución de problemas de planteo

La importancia de la proposición 1.8 está en la resolución de problemas. Por ejemplo, en los siguientes problemas debemos llevar el enunciado a un planteamiento matemático que luego se reduce a la resolución de una ecuación en una variable (o a la resolución de un sistema de ecuaciones).

**Ejercicio 14** Una bomba que trabaja sola, llena un estanque en 7 horas, otra lo haría en 8 horas. ¿En cuánto tiempo se llena el estanque si trabajan ambas bombas a la vez?

**Solución:** Sea  $x$  el número de horas que tarda el estanque en llenarse (si trabajan ambas bombas a la vez) y sea  $V$  el volumen total del estanque.

Si una bomba llena el estanque en 7 horas (entonces en una hora llenará  $\frac{1}{7}$  del estanque), luego en  $x$  horas llenará  $\frac{x}{7}$  del estanque, es decir, llenará  $\frac{xV}{7}$  (unidades de volumen). La otra bomba llena el estanque



en 8 horas, entonces en  $x$  horas llenará  $\frac{x}{8}$  del estanque, es decir,  $\frac{xV}{8}$  (unidades de volumen). Como en  $x$  horas, las dos bombas juntas llenan al estanque entonces se tiene

$$\frac{xV}{7} + \frac{xV}{8} = V$$

lo que equivale a

$$\frac{x}{7} + \frac{x}{8} = 1$$

de donde  $15x = 56$ . Luego, trabajando las dos bombas a la vez, el estanque se llena en  $56/15$  horas.

**Ejercicio 15** Cuatro estudiantes deciden vivir solos en un departamento y repartir en partes iguales el arriendo mensual. Sin embargo, encuentran que si aumenta en dos el número de estudiantes, su cuota mensual se reduce en \$ 5.000. ¿Cuál es el costo del arriendo?

**Solución:** Sea  $x$  el costo del arriendo. Si hay cuatro estudiantes entonces la cuota mensual de cada uno es de  $\frac{x}{4}$ . Si aumentan en dos, entonces la cuota mensual será de  $\frac{x}{6}$ . Dadas las hipótesis del problema se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} - 5.000 &= \frac{x}{6} \\ \Rightarrow 3x - 12 \cdot 5.000 &= 2x \\ \Rightarrow x &= 60.000 \end{aligned}$$

Luego el costo del arriendo es de \$ 60.000.

Para resolver problemas como los anteriores se requiere: reconocer los datos importantes (y despre- ciar información innecesaria); identificar la o las incógnitas e **introducir una o más variables para representarlas**; plantear y resolver las ecuaciones que relacionan los datos, teniendo en cuenta las restric- ciones necesarias involucradas en el problema. En algunos casos es necesario aplicar conceptos tales como porcentaje, razón y proporción, velocidad (= distancia/tiempo), etc.

**Observación:** Recordemos que;

1.  $p$  es el  $q$  por ciento (se escribe  $q\%$ ) de  $x$ , si y sólo si;

$$p = \frac{q}{100} \cdot x$$

2. La **razón** de dos números  $a : b$  (se lee  $a$  es a  $b$ ) es el cuociente

$$\frac{a}{b}$$

(La expresión  $a : b$  desea destacar el aspecto de comparación entre  $a$  y  $b$ ).

Una **proporción** es una igualdad entre dos razones, por ejemplo;

$$2 : 3 = 6 : 9$$

que se lee **2 es a 3 como 6 es a 9**

3. Se dice que  $a$  es **directamente proporcional** a  $b$  si y sólo si existe una constante  $q$  tal que

$$a = qb$$

Se dice que  $a$  es **inversamente proporcional** a  $b$  si existe una constante  $q$  tal que

$$a = q\frac{1}{b}$$

En ambos casos  $q$  se llama factor de proporcionalidad y generalmente se tiene  $q > 0$ .

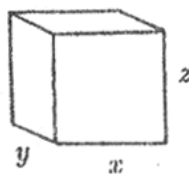
4. Daremos el volumen y área de algunos cuerpos geométricos que utilizaremos

Daremos el volumen y área de algunos cuerpos geométricos que utilizaremos

- (a) Paralelepípedo de aristas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\text{Volumen: } V = xyz$$

$$\text{Área: } A = 2xy + 2xz + 2yz$$



- (b) Cilindro de radio  $r$  y altura  $h$ .

$$\text{Volumen: } V = \pi r^2 h$$

$$\text{Área: } A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

- (c) Cono recto de radio basal  $r$  y altura  $h$ .

$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Área: } A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$



1. (a) Paralelepípedo de aristas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

$$\text{Volumen: } V = xyz$$

$$\text{Área: } A = 2xy + 2xz + 2yz$$

- (b) Cilindro de radio  $r$  y altura  $h$ .

$$\text{Volumen: } V = \pi r^2 h$$

$$\text{Área: } A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$$

- (c) Cono recto de radio basal  $r$  y altura  $h$ .

$$\text{Volumen: } V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\text{Área: } A = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$$

- (d) Esfera de radio  $r$ .

$$\text{Volumen: } V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\text{Área: } A = 4\pi r^2$$

**Ejercicio 16** Si el radio del cilindro disminuye en un 10% mientras que su altura aumenta en un 12% en qué tanto por ciento varían

a) El volumen del cilindro

b) El área lateral del cilindro

**Solución:** Sea  $r$  : radio inicial del cilindro,  $h$  : altura inicial del cilindro

a) Si el radio disminuye en un 10% entonces el nuevo radio  $r_n$  será

$$r_n = r - (0,1)r = 0,9r$$

Si la altura aumenta en un 12% entonces la nueva altura  $h_n$  será

$$h_n = h + 0,12h = 1,12h$$

luego el nuevo volumen será  $V_n$

$$V_n = \pi r_n^2 h_n = \pi(0,9r)^2(1,12h) = 0,9072\pi r^2 h = \pi r^2 h - 0,0928\pi r^2 h$$

esto es, el volumen disminuye en  $0,0928\pi r^2 h$  unidades; es decir, disminuye en 9,28%

b) El área del cilindro será

$$A_n = 2\pi r_n h_n = 2\pi(0,9r)(1,12h) = 1,008 \cdot 2\pi r h = 2\pi r h + 0,008 \cdot 2\pi r h$$

luego el área lateral aumenta en 0,8%.

**Ejercicio 17** En una prueba de matemáticas, el 12% de los estudiantes de una clase no resolvió un problema, el 32% lo resolvió con algunos errores y los 14 estudiantes restantes obtuvieron la solución correcta. ¿Cuántos estudiantes había en la clase?

**Solución:** Sea  $x$  el número de estudiantes, entonces

$$\frac{12}{100}x \text{ no resolvieron el problema}$$

$$\frac{32}{100}x \text{ resolvieron con algunos errores el problema}$$

$$14 : \text{ resolvieron el problema correctamente}$$

Luego tenemos la siguiente ecuación

$$\frac{12}{100}x + \frac{32}{100}x + 14 = x$$

de donde

$$56x = 1400,$$

es decir,

$$x = \frac{1400}{56} = 25$$

luego había 25 estudiantes en la clase.

**Ejercicio 18** Una tienda de antigüedades compró dos muebles en \$ 225.000 y después los vendió y obtuvo un beneficio del 40%. ¿Cuánto pagó por cada mueble si el primero dejó un beneficio del 25% y el segundo un beneficio del 50%?

**Solución:** Sea  $x$  pesos (en miles) lo que le ha costado el primer mueble entonces el segundo lo compró en

$$(225 - x) \text{ mil pesos}$$

El primero dio un beneficio del 25%, luego se vendió en

$$(x + 0,25x) \text{ mil pesos,}$$

es decir,  $1,25x$  mil pesos.

El segundo dio un beneficio del 50%, luego se vendió en

$$1,50(225 - x) \text{ mil pesos}$$

Por hipótesis, la tienda compró los dos muebles en 225 mil pesos y obtuvo un beneficio total del 40%, luego los dos muebles se vendieron en

$$1,40 \cdot 225 = 315 \text{ mil pesos.}$$

Así, obtenemos la ecuación

$$1,25x + 1,50(225 - x) = 315$$

de donde

$$0,25x = 22,5$$

luego

$$x = 90$$

El primer mueble se vendió en \$ 90.000 y el segundo en \$ 135.000.

**Observación:** El tanto por ciento de beneficio se calcula en relación con el precio de costo (tomado como 100%).

**Ejercicio 19** *Los diámetros de dos cilindros son entre sí como 3 : 4 y sus alturas como 5 : 6. ¿Qué tanto por ciento del volumen del mayor de ellos es el volumen del menor?*

**Solución:** Sean  $d_1, d_2$  los diámetros de los cilindros y  $h_1, h_2$  sus respectivas alturas. Por hipótesis del problema tenemos las siguientes relaciones;

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{h_1}{h_2} = \frac{5}{6} \quad (1.12)$$

Además la fórmula del volumen de un cilindro es

$$V = \pi r^2 h$$

donde  $r$  es el radio del cilindro y  $h$  la altura; además

$$d = 2r$$

donde  $d$  es el diámetro del cilindro.

Con todo lo anterior tenemos que

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 h$$

y para cada cilindro

$$V_1 = \frac{\pi}{4} d_1^2 h_1 \quad V_2 = \frac{\pi}{4} d_2^2 h_2$$

Pero de 1.12 tenemos

$$d_1 = \frac{3}{4} d_2 \quad \text{y} \quad h_1 = \frac{5}{6} h_2$$

luego

$$V_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{9}{16} d_2^2 \frac{5}{6} h_2 = \frac{45}{96} \cdot \frac{\pi}{4} d_2^2 h_2 = \frac{45}{96} V_2$$

así,

$$V_1 = \frac{45}{96} V_2$$

Luego  $V_1$  es el 46,875% de  $V_2$ .

Una propiedad que nos será muy útil en la resolución de ecuaciones es la siguiente.

**Proposición 1.9** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$

$$ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0 \quad (1.13)$$

**Demostración:**  $(\Rightarrow)^7$  Supongamos  $a \neq 0$ ; entonces existe  $a^{-1} \in \mathbb{R}$  tal que

$$\begin{aligned} ab = 0 &\Rightarrow a^{-1}ab = a^{-1}0 \\ &\Rightarrow 1 \cdot b = 0 \\ &\Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Es claro que si  $a = 0 \vee b = 0$  entonces  $ab = 0$ ; luego

$$(\forall a, b \in \mathbb{R})(ab = 0 \iff a = 0 \vee b = 0)$$

□

Observemos que la propiedad anterior no es válida en cualquier conjunto con operaciones de suma y multiplicación. Por ejemplo, consideremos el conjunto de matrices

$$M_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

---

<sup>7</sup>Por equivalencia lógica esta implicancia en 1.13 se puede escribir  $(p \Rightarrow q \vee s)$ , que es equivalente  $(p \wedge \sim q \Rightarrow s)$  y esto último es lo que usaremos en esta parte de la demostración.

bajo la operación de producto definida por

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$$

Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es claro que

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

pero  $A \neq 0$  y  $B \neq 0$ . Lo que sí se cumple es que

$$A = 0 \vee B = 0 \Rightarrow AB = 0$$

La propiedad 1.13 nos permite resolver algunas ecuaciones. Por ejemplo resolvamos en  $\mathbb{R}$  la siguiente ecuación

$$(x+1)(x-1) = 0$$

Es claro que

$$(x+1)(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1=0) \vee (x+1=0)$$

de donde el conjunto solución  $S$  es

$$S = \{x \in \mathbb{R} : (x+1)(x-1) = 0\} = \{-1, 1\}$$

Análogamente se puede resolver el siguiente problema

**Ejemplo 20** La solución de la ecuación

$$x^2 = 25$$

es  $\{-5, 5\}$

**Solución:**

En efecto;

$$\begin{aligned} x^2 = 25 &\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-5)(x+5) = 0 \\ &\Leftrightarrow x-5=0 \vee x+5=0 \\ &\Leftrightarrow x=5 \vee x=-5 \end{aligned}$$

**Ejercicio 21** Dos personas salen simultáneamente de dos ciudades  $A$  y  $B$  y van una en dirección de la otra. La primera persona camina 2 km/hr más de prisa que la segunda y llega a  $B$  una hora antes que la segunda llegue a  $A$ . Si  $A$  y  $B$  distan 24 km ¿Cuántos kilómetros recorre cada una de las personas en una hora? (Ayuda: **velocidad=distancia/tiempo**).

**Solución:** Sea  $v$  km/hr la velocidad de la primera persona  $P_A$ , entonces la velocidad de la segunda persona  $P_B$  será de  $(v-2)$  km/hr

La persona  $P_A$  tardará  $t_1 = \frac{24}{v}$  horas y  $P_B$  tardará  $t_2 = \frac{24}{v-2}$  horas

Como  $P_B$  llega una hora más tarde que  $P_A$ , entonces;

$$\begin{aligned} t_2 = t_1 + 1 &\Rightarrow \frac{24}{v-2} - \frac{24}{v} = 1 \\ &\Rightarrow 24v - 24(v-2) = (v-2)v \\ &\Rightarrow v^2 - 2v - 48 = 0 \\ &\Rightarrow (v-8)(v+6) = 0 \\ &\Rightarrow v = 8 \vee v = -6 \end{aligned}$$

Pero  $v > 0$ , así,  $v = 8$  km/hr. Luego la distancia que recorre  $P_A$  en una hora es de

$$d_1 = v \cdot 1 = 8 \text{ km}$$

y  $P_B$  recorre

$$d_2 = (v - 2) \cdot 1 = 6 \text{ km}$$

**Ejercicio 22** *Un tren rápido fue obligado a detenerse 16 minutos en un disco rojo. Para recuperar este tiempo, viajó en un tramo de 80 kilómetros 10km/hr más rápido que lo normal. ¿Cuál es la velocidad normal del tren?*

**Solución:** Sea  $v$  km/hr la velocidad prevista por el tren (donde  $v > 0$ ). La velocidad real fue de

$$(v + 10) \text{ km/hr}$$

El tiempo previsto era de

$$t_1 = \frac{80}{v} \text{ hr}$$

pero realmente fue

$$t_2 = \frac{80}{v + 10} \text{ hr}$$

Por hipótesis tenemos que

$$t_1 - t_2 = \frac{16}{60},$$

es decir,

$$\frac{80}{v} - \frac{80}{v+10} = \frac{16}{60}$$

$$\Leftrightarrow (v + 10)80 - 80v = \frac{4}{15}v(v + 10)$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 10v - 3.000 = 0$$

$$\Leftrightarrow (v - 50)(v + 60) = 0$$

$$\Leftrightarrow v = 50 \vee v = -60$$

pero  $v > 0$  luego

$$v = 50$$

y la velocidad normal del tren fue de 50 km/hr.

En los ejemplos anteriores hemos resuelto ecuaciones en una variable. Con frecuencia, es necesario resolver dos o más ecuaciones simultáneamente en dos o más variables, es decir, sistemas de ecuaciones.

**Ejemplo 23** *Resolvamos el siguiente sistema de ecuaciones*

$$\begin{array}{rcl} x - 3y & = & -2 \\ 5x + y & = & 2 \end{array}$$

**Solución:** Multiplicando por 3 la segunda ecuación y sumándosela a la primera se obtiene la ecuación

$$16x = 4$$

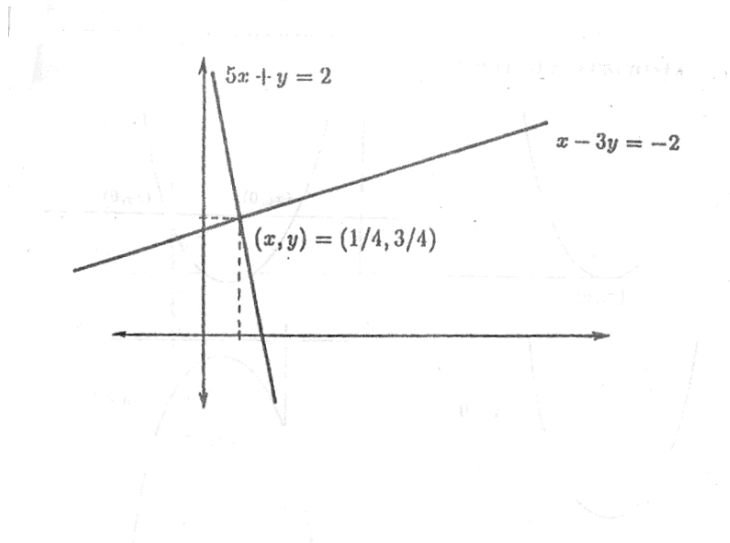
de donde  $x = \frac{1}{4}$ . Sustituyendo este valor en cualquiera de las dos ecuaciones se obtiene  $y = \frac{3}{4}$ .

Luego la solución del sistema es

$$x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{3}{4}$$

o el punto  $(x, y) = (1/4, 3/4)$

La interpretación geométrica de esta solución es el punto de intersección de las rectas cuyas ecuaciones son  $x - 3y = -2$  y  $5x + y = 2$  como se muestra en la siguiente figura



**Ejercicio 24** Un cierto número de estudiantes deben acomodarse en una residencial. Si se ubicaran dos estudiantes por habitación entonces quedarían 2 estudiantes sin pieza. Si se ubicaran 3 estudiantes por habitación entonces sobrarían 2 piezas. ¿ Cuántas habitaciones disponibles hay en la residencial y cuántos estudiantes deben acomodarse en ella?

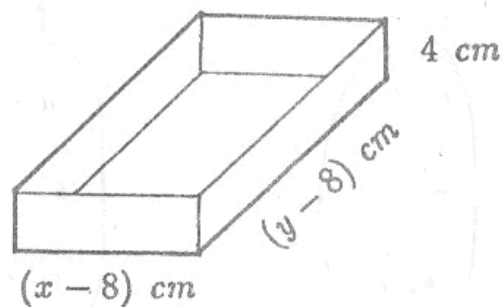
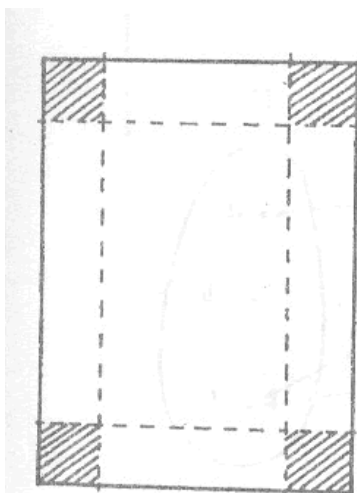
**Solución:** Sean  $x$  : número de estudiantes  $y$  : número de habitaciones, entonces podemos representar el problema mediante las ecuaciones

$$\begin{array}{rcl} x - 2y & = & 2 \\ x - 3(y - 2) & = & 0 \end{array}$$

despejando  $x$  de la primera ecuación y reemplazándole en la segunda,

$$y = 8 \quad x = 18$$

Por lo tanto hay 8 habitaciones y 18 estudiantes.



**Ejercicio 25** Una chapa rectangular de estaño de perímetro 96 cm se usa para hacer una caja sin tapa. Para ello se recorta un cuadrado de 4 cm de lado en cada esquina y se unen los bordes, (ver figura anterior). ¿Cuáles son las dimensiones de la chapa si el volumen de la caja es de 768? cm<sup>3</sup>.

**Solución:** Sean  $x =$ : longitud de la chapa en centímetros y  $y =$ : ancho de la chapa en centímetros, entonces la caja tiene las dimensiones siguientes (ver figura verfigura anterior):

$$\begin{array}{ll} \text{longitud} & : (x - 8) \text{ cm} \\ \text{ancho} & : (y - 8) \text{ cm} \\ \text{altura} & : 4 \text{ cm} \end{array}$$

Por hipótesis, volumen y perímetro son;

$$\left| \begin{array}{rcl} 4(x - 8)(y - 8) & = & 768 \\ 2x + 2y & = & 96 \end{array} \right|$$

lo que equivale a

$$\left| \begin{array}{rcl} (x - 8)(y - 8) & = & 192 \\ x + y & = & 48 \end{array} \right|$$

Despejando  $y$  en la segunda ecuación y reemplazando en la primera obtenemos

$$x^2 - 48x + 512 = 0$$

es decir

$$(x - 32)(x - 16) = 0$$

de donde

$$x = 32 \quad \vee \quad x = 16$$

note que si  $x = 32$ , entonces  $y = 16$  y si  $x = 16$ , entonces  $y = 32$ .

Como  $x$  es la longitud; las dimensiones de la chapa son 32 cm  $\times$  16 cm.

**Ejercicio 26** Un obrero hace un cierto número de piezas idénticas en un tiempo determinado. Si hubiera hecho 10 piezas más cada día, habría terminado el trabajo completo en  $4\frac{1}{2}$  días antes de lo previsto, y si hubiese hecho 5 piezas menos cada día habría tardado 3 días más de lo previsto. ¿Cuántas piezas hizo y en cuánto tiempo?

**Solución:** Supongamos que el obrero hace  $x$  piezas en  $y$  días. Entonces produce  $\frac{x}{y}$  piezas por día, por hipótesis, si hubiera realizado  $\frac{x}{y} + 10$  piezas, habría completado el trabajo en  $y - 4\frac{1}{2}$  días. Luego como  $4\frac{1}{2} = \frac{9}{2}$  tenemos

$$\left( \frac{x}{y} + 10 \right) \left( y - \frac{9}{2} \right) = x$$

La otra condición de la ecuación es

$$\left( \frac{x}{y} - 5 \right) (y + 3) = x.$$

Así, obtenemos el siguiente sistema

$$\left| \begin{array}{rcl} 10y - \frac{9}{2} \frac{x}{y} & = & 45 \\ -5y + 3 \frac{x}{y} & = & 15 \end{array} \right|$$

de donde

$$\frac{x}{y} = 50$$

luego,  $y = 27$   $x = 1.350$ .



**Ejercicio 27** Dos obreros tienen que hacer un trabajo consistente en mecanizar un lote de piezas idénticas. Después que el primero ha trabajado durante 7 horas y el segundo durante 4 horas, han completado  $\frac{5}{9}$  del total del trabajo. Si siguieran trabajando los dos a la vez durante 4 horas más, les quedaría por hacer  $\frac{1}{18}$  del trabajo. ¿ Cuánto tardaría cada uno en hacer el trabajo completo?

**Solución:** Supongamos que el primer operario, trabajando solo, es capaz de completar el trabajo en  $x$  horas, y el segundo en  $y$  horas. Entonces en una hora el primero hace  $\frac{1}{x}$  del trabajo completo y el segundo  $\frac{1}{y}$ . Por hipótesis

$$7\frac{1}{x} + 4\frac{1}{y} = \frac{5}{9}$$

Como después trabajan juntos otras 4 horas, harán  $\frac{4}{x} + \frac{4}{y}$  del trabajo, que es igual a

$$1 - \left(\frac{5}{9} + \frac{1}{18}\right) = \frac{7}{18}$$

por lo tanto tenemos la ecuación

$$\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = \frac{7}{18}$$

Restándola de la primera, obtenemos

$$\frac{3}{x} = \frac{3}{18}$$

de donde  $x = 18$ . Entonces

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{24} \text{ e } y = 24$$

Luego el primero tarda 18 horas y el segundo 24 horas en hacer el trabajo completo.

**Ejercicio 28** Se ha de transportar 690 toneladas de mercancías desde un muelle a una estación de ferrocarril mediante 5 camiones de 3 toneladas y 10 camiones de una tonelada y media. En pocas horas, los camiones han transportado  $25/46$  de las mercancías. Para completar el transporte a tiempo, se ha de llevar las mercancías restantes en un lapso 2 horas menor que el ya transcurrido. Se completó el transporte gracias a que los conductores de los camiones comenzaron a hacer un viaje por hora más que antes. Determine cuántas horas tardaron en transportar todas las mercancías y también el número de viajes por hora que se hacía al principio sabiendo que los camiones de una y media tonelada hacen un viaje más por hora que los camiones de 3 toneladas <sup>8</sup>.

**Solución:** Supongamos que la primera parte de las mercancías, que asciende a

$$\frac{25}{46} 690 = 375 \text{ toneladas}$$

se transporta en  $x$  horas haciendo cada camión de 3 toneladas  $y$  viajes por hora. Entonces cada camión de una y media tonelada hará  $y + 1$  viajes por hora. Por hipótesis, la parte restante de mercancías (es decir,  $690 - 375 = 315$  toneladas) se transportó en  $x - 2$  horas, haciendo los camiones de 3 toneladas  $y + 1$  viajes por hora y los camiones de una y media toneladas  $(y + 1) + 1 = y + 2$  viajes por hora. Obtenemos así el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{array}{rcl} 5 \cdot 3xy + 10 \cdot \frac{3}{2}x(y + 1) & = & 375 \\ 5 \cdot 3(x - 2)(y + 1) + 10 \cdot \frac{3}{2}(x - 2)(y + 2) & = & 315 \end{array} \right\}$$

Simplificando tenemos

$$\left. \begin{array}{rcl} 2xy + x & = & 25 \\ 2xy + 3x - 4y & = & 27 \end{array} \right\}$$

<sup>8</sup>Se debe suponer que todos los camiones iban completamente cargados en cada viaje.

de donde

$$2x - 4y = 2$$

luego  $2y = x - 1$ . Sustituyendo en la primera ecuación obtenemos  $x^2 = 25$ , es decir<sup>9</sup>,  $x = 5$ . La primera parte de las mercancías se transportó en 5 horas y la segunda parte en  $5 - 2 = 3$  horas.

**Nota:**

Todas las mercancías se transportaron en 8 horas; al principio, los camiones de tres toneladas hacían 2 viajes por hora y los de una y media toneladas, 3 viajes por hora.

**Ejercicio 29** Una industria tiene un encargo de 810 artículos y otra de 900 artículos en el mismo periodo de tiempo. La primera ha completado el pedido 3 días antes del plazo previsto y la segunda 6 días antes.

? Cuántos artículos produce al día cada industria, sabiendo que la segunda produce por día 4 artículos más que la primera?

**Solución:** Sea  $x$  la producción de artículos diaria de la primera industria, entonces la segunda produce  $x + 4$  artículos por día. La primera ha completado su pedido en  $\frac{810}{x}$  días, luego el tiempo dado para cumplir el pedido ha sido  $\frac{810}{x} + 3$  días. Análogamente tenemos que  $\frac{900}{x+4} + 6$  es el tiempo asignado a la segunda industria, pero el tiempo asignado a ambas las industrias es el mismo, luego

$$\frac{810}{x} + 3 = \frac{900}{x+4} + 6$$

de donde  $x = 20$ . Es decir, la primera industria produce 20 artículos y la segunda 24 artículos por día.

**Ejercicio 30** Hallar un número de dos cifras sabiendo que el número de unidades excede en cuatro al número de la decenas y que el producto del número deseado por la suma de sus dígitos es igual a 576.

**Observación:** Si un número  $a$  tiene  $n$  dígitos  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ , ordenados de izquierda a derecha entonces

$$a = a_{n-1}10^{n-1} + \dots + a_110 + a_0$$

**Solución:** Sea  $x$  el dígito de la unidades,  $y$  el dígito de la decenas entonces por hipótesis se tiene la ecuación

$$x = y + 4 \tag{1.14}$$

además el número deseado es  $10y + x$  luego

$$(10y + x)(x + y) = 576 \tag{1.15}$$

Por 1.14 y 1.15

$$\begin{aligned} (11y + 4)(2y + 4) &= 576 \\ \iff 11(y - 4)(y + \frac{70}{11}) &= 0 \\ \iff y = 4 \vee y = -\frac{70}{11} \end{aligned}$$

pero  $y > 0$ , luego  $y = 4$ . Por lo tanto el número buscado es 48.

### 1.3 Axiomas de Orden

A continuación daremos un conjunto de axiomas que forma parte de la caracterización de los números reales. Estos axiomas nos permiten ordenar los números reales (y aún poder graficar este orden en una recta).

Admitimos la existencia de un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que denotamos por  $\mathbb{R}^+$ , cuyos elementos se llaman **números reales positivos** y que se caracterizan por los axiomas:

---

<sup>9</sup>De  $x^2 = 25$  se obtiene  $x = 5$  o  $x = -5$  pero  $x$  indica horas luego  $x$  debe ser positivo.

**Axioma i)** *Clausura de la suma*

*Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $a + b \in \mathbb{R}^+$*

**Axioma ii)** *Clausura del producto*

*Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $ab \in \mathbb{R}^+$*

**Axioma iii)** *Tricotomía*

*Para cada número real sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera*

$$a \in \mathbb{R}^+, \quad a = 0, \quad -a \in \mathbb{R}^+$$

En base a los axiomas anteriores demostraremos las siguientes propiedades:

**Proposición 1.10** *El conjunto de los números reales cumple*

- i)  $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$
- ii)  $a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^{-1} \in \mathbb{R}^+$
- iii)  $a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^+$
- iv)  $b - a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+$
- v)  $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow bc - ac \in \mathbb{R}^+$
- vi)  $b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ac - bc \in \mathbb{R}^+$

**Demostración:**

- i) Si  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  entonces por Axioma iii)

$$a \in \mathbb{R}^+ \quad \vee \quad -a \in \mathbb{R}^+$$

Si  $a \in \mathbb{R}^+$  entonces por Axioma ii)  $a \cdot a \in \mathbb{R}^+$ , es decir,

$$a \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a^2 \in \mathbb{R}^+$$

Si  $-a \in \mathbb{R}^+$  entonces por Axioma ii)  $(-a) \cdot (-a) \in \mathbb{R}^+$  pero por proposición 1.4 vii,  $(-a)^2 = a^2$ , luego  $a^2 \in \mathbb{R}^+$ . Notemos que en particular si  $a = 1$ , entonces  $1^2 = 1 \in \mathbb{R}^+$

- ii) Demostraremos esta propiedad por el método del absurdo.

Sea  $a \in \mathbb{R}^+$ . Supongamos que  $a^{-1} \notin \mathbb{R}^+$ , entonces por Axioma iii)

$$a^{-1} = 0 \quad \vee \quad -(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$$

Supongamos que  $a^{-1} = 0$  entonces  $a \cdot a^{-1} = 0$  pero por propiedad de inverso  $a \cdot a^{-1} = 1$ ; esto es una contradicción y por lo tanto  $a^{-1} \neq 0$ .

Supongamos que  $-(a^{-1}) \in \mathbb{R}^+$ . Como  $a \in \mathbb{R}^+$  tenemos que por Axioma ii) que  $-(a^{-1}) \cdot a = -1 \in \mathbb{R}^+$  que es también una contradicción pues  $1 \in \mathbb{R}^+$ . Como en ambos casos obtenemos una contradicción, no se puede dar ninguna de las dos posibilidades, por lo tanto,  $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ ; así, se tiene que el inverso multiplicativo de un número positivo es también un número positivo.

- iii)

$$\begin{array}{ll}
 a - b \in \mathbb{R}^+ \wedge b - c \in \mathbb{R}^+ & \\
 \Rightarrow (a - b) + (b - c) \in \mathbb{R}^+ & \text{por Axioma i)} \\
 \Rightarrow a + (-b + b) - c \in \mathbb{R}^+ & \text{asociatividad} \\
 \Rightarrow a + 0 - c \in \mathbb{R}^+ & \text{inverso aditivo} \\
 \Rightarrow a - c \in \mathbb{R}^+ & \text{neutro aditivo}
 \end{array}$$

iv)

$$\begin{aligned}
& b - a \in \mathbb{R}^+ \\
\Leftrightarrow & b - a + 0 \in \mathbb{R}^+ && \text{neutro aditivo} \\
\Leftrightarrow & b - a + c - c \in \mathbb{R}^+ && \text{inverso aditivo} \\
\Leftrightarrow & (b + c) + (-a - c) \in \mathbb{R}^+ && \text{asociatividad conmutatividad} \\
\Leftrightarrow & (b + c) - (a + c) \in \mathbb{R}^+ && \text{distributividad}
\end{aligned}$$

v)

$$\begin{aligned}
& b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge c \in \mathbb{R}^+ \\
\Rightarrow & (b - a)c \in \mathbb{R}^+ && \text{por Axioma ii)} \\
\Rightarrow & bc - ac \in \mathbb{R}^+ && \text{distributividad}
\end{aligned}$$

vi)

$$\begin{aligned}
& b - a \in \mathbb{R}^+ \wedge -c \in \mathbb{R}^+ \\
\Rightarrow & (b - a)(-c) \in \mathbb{R}^+ && \text{por Axioma ii)} \\
\Rightarrow & (-bc) - (-ac) \in \mathbb{R}^+ && \text{distributividad} \\
\Rightarrow & ac - bc \in \mathbb{R}^+
\end{aligned}$$

Se define el conjunto de los **números reales negativos** como

$$\mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : -a \in \mathbb{R}^+\}$$

Notemos que  $\mathbb{R}^- \neq \emptyset$  pues  $-1 \in \mathbb{R}^-$  dado que  $1 \in \mathbb{R}^+$ . Análogamente se define el conjunto de los **números reales no negativos** como

$$\mathbb{R}_0^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

**Nota:** Por Axioma iii) se tiene la siguiente igualdad donde los conjuntos son disjuntos dos a dos

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{R}^-$$

**Definición 1.11** Diremos que *a es mayor que b* ó *b es menor que a* si y sólo si

$$a - b \in \mathbb{R}^+ \tag{1.16}$$

y escribiremos esto indistintamente como

$$a > b \quad \text{o como} \quad b < a.$$

Diremos que *a es mayor o igual que b* si *a es mayor que b* o *a es igual a b*, es decir

$$a > b \vee a = b$$

Escribiremos esto indistintamente como

$$a \geq b \quad \text{o} \quad b \leq a.$$

Así, se tiene

$$a \geq b \Leftrightarrow a > b \vee a = b$$

Análogamente, diremos que *a es menor o igual que b* si *a es menor que b* o *a es igual que b*. Escribiremos indistintamente en este caso

$$a \leq b \quad \text{o} \quad b \geq a$$

o equivalentemente

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \vee a = b$$

Con la notación anterior tenemos que:

$$a \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow a > 0$$

$$a \in \mathbb{R}^- \Leftrightarrow a < 0$$

y las propiedades demostradas anteriormente se pueden escribir de la siguiente forma

**Corolario 1.12** Sean  $a, b, c \in \mathbb{R}$

i)  $a \in \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow a^2 > 0.$

ii)  $a > 0 \Rightarrow a^{-1} > 0$

iii)  $a > b \wedge b > c \Rightarrow a > c$

iv)  $b > a \Leftrightarrow b + c > a + c$

v)  $b > a \wedge c > 0 \Rightarrow bc > ac$

vi)  $b > a \wedge c < 0 \Rightarrow bc < ac$

**Notación:**

$$a \leq b \leq c \Leftrightarrow a \leq b \wedge b \leq c$$

**Los Intervalos de  $\mathbb{R}$ :**

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . con<sup>10</sup>  $a \leq b$  Se definen

$$\begin{aligned} [a, b[ &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ ]a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \\ ]a, b[ &= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\} \\ [a, b] &= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\} \\ ]-\infty, a] &= \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\} \\ ]-\infty, a[ &= \{x \in \mathbb{R} : x < a\} \\ [a, \infty[ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\} \\ ]a, \infty[ &= \{x \in \mathbb{R} : x > a\} \end{aligned}$$

**Nota:** La definición dada no admite intervalos del tipo  $[a, b[$  con  $a > b$  (en tal caso se trataría de un conjunto vacío).

**Ejemplo 31**

$$\begin{aligned} [-\infty, 0[ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0\} \\ ]1, \infty[ &= \{x \in \mathbb{R} : x > 1\} \\ ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[ &= \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \vee x > 1\} \\ ]0, 1[ &= \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \\ [-1, 1] &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\} \\ [-1, 0[ &= \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 0\} \\ [-2, 1[ &= \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 1\} \end{aligned}$$

---

<sup>10</sup> Algunos de estos intervalos pueden ser el conjunto vacío.

Uno de los teoremas más importantes que se deduce del axioma de tricotomía, es el siguiente;

**Teorema 1.13** <sup>11</sup> Para todo  $a, b \in \mathbb{R}$ , se verifica una y sólo una de las proposiciones

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b$$

**Demostración:** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces por Ax iii) sólo una de las siguientes proposiciones es verdadera para el número real  $a - b$ ;

$$a - b \in \mathbb{R}^+, \quad a - b = 0, \quad -(a - b) \in \mathbb{R}^+$$

Luego, usando la notación 1.16 y traduciendo cada proposición de la frase anterior se obtiene que

$$a > b, \quad a = b, \quad a < b,$$

siendo sólo una de ellas verdadera. □

**Observación:** La relación entre  $a$  y  $b$ ,  $a \leq b$  se acostumbra a decir que es una **relación de orden total** ya que ella cumple: para  $a, b, c \in \mathbb{R}$

i) Reflexividad

$$a \leq a$$

ii) Antisimetría

$$a \leq b \wedge b \leq a \Rightarrow a = b$$

iii) Transitividad

$$a \leq b \wedge b \leq c \Rightarrow a \leq c$$

vi) Tricotomía

$$a \leq b \vee b \leq a$$

El hecho que en  $\mathbb{R}$  se satisfagan los axiomas de cuerpo y los axiomas de orden se expresa diciendo que " $\mathbb{R}$  es un **Cuerpo Ordenado**".

Por los axiomas de cuerpo sabemos que existen  $0 \in \mathbb{R}$  y  $1 \in \mathbb{R}$  tal que  $1 \neq 0$ . Ahora con los axiomas de orden hemos demostrado que;

$$1 \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad -1 \in \mathbb{R}^-,$$

es decir,

$$1 > 0 \quad \text{y} \quad -1 < 0$$

Así podemos **ordenar** todos los números reales, cosa que haremos a continuación por etapas:

Como ejemplos iniciales tenemos

$$\begin{aligned} 1 > 0 &\Rightarrow 1 + 1 > 1 + 0 &\Rightarrow 2 > 1 \\ -1 < 0 &\Rightarrow (-1) + (-1) < -1 + 0 &\Rightarrow -2 < -1 \end{aligned}$$

y de esta forma tenemos

$$-2 < -1 < 0 < 1 < 2, \text{ etc.}$$

Para ordenar los racionales usaremos la siguiente propiedad:

Sean  $a = \frac{p}{q}$  y  $b = \frac{m}{n}$  con  $p, m \in \mathbb{Z}$  y  $q, n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces por corolario 1.12 v), se tiene:

$$a < b \Leftrightarrow \frac{p}{q} < \frac{m}{n} \Leftrightarrow pn < qm$$

---

<sup>11</sup>En algunos textos se presenta el teorema 1.13 como axioma de tricotomía (Axioma iii) y corolario 1 iv) y v) como Axioma i) y Axioma ii) respectivamente.

Por ejemplo, ordenemos de menor a mayor los siguientes números racionales

$$a = 1,31 \quad b = \frac{13}{12} \quad c = \frac{25}{0,12} \quad d = -1,4 \quad e = -\frac{12}{8}$$

Expresándolos como fracciones racionales y reduciendo tenemos;

$$a = \frac{131}{100} \quad b = \frac{13}{12} \quad c = \frac{125}{6} \quad d = -\frac{7}{5} \quad e = -\frac{3}{2}.$$

Entre los negativos tenemos

$$-\frac{3}{2} < -\frac{7}{5} \quad \text{pues} \quad -3 \cdot 5 < 2 \cdot -7.$$

Entre los positivos

$$\frac{13}{12} < \frac{131}{100} \quad \text{pues} \quad 13 \cdot 100 < 12 \cdot 131$$

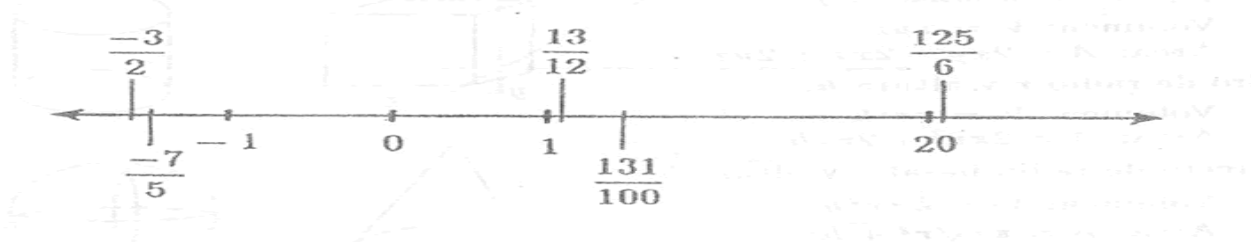
y

$$\frac{131}{100} < \frac{125}{6} \quad \text{pues} \quad 131 \cdot 6 < 125 \cdot 100,$$

en consecuencia

$$-\frac{3}{2} < -\frac{7}{5} < \frac{13}{12} < \frac{131}{100} < \frac{125}{6}$$

Puestos en una recta se visualiza su ubicación relativa, como puede ver en la recta figura que sigue:



A continuación observaremos que entre dos racionales siempre hay al menos un racional.

**Proposición 1.14** *Entre dos racionales existe al menos un racional.*

**Demostración:** Sean  $p, q \in \mathbb{Q}$  y  $p < q$ , por demostrar que existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que

$$p < r < q$$

Usando el corolario 1.12 iv) tenemos

$$\begin{aligned} p < q &\Rightarrow p + p < p + q \\ &\Rightarrow 2p < p + q \\ &\Rightarrow p < \frac{p+q}{2} \end{aligned}$$

Además sumando ahora  $q$  a ambos lados obtenemos

$$\begin{aligned} p < q &\Rightarrow p + q < q + q \\ &\Rightarrow p + q < 2q \\ &\Rightarrow \frac{p+q}{2} < q \end{aligned}$$

Por lo tanto existe  $r = \frac{p+q}{2} \in \mathbb{Q}$  tal que  $p < r < q$ . □

### 1.3.1 Raíz n-ésima

A continuación daremos una proposición que garantiza la **no existencia** de un número real con la propiedad indicada más abajo.

**Proposición 1.15** *Sean  $n$  número natural par y  $a < 0$ , entonces no existe un número real  $b$  tal que cumpla la igualdad*

$$a = b^n$$

**Demostración:** Supongamos que existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que

$$a = b^n$$

pero  $n$  es par, por lo tanto  $n = 2k$  para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$  luego

$$a = b^{2k} = (b^k)^2$$

Ahora bien. Si  $b = 0$  entonces  $a = 0$ . Si  $b \neq 0$ , entonces  $(b^k)^2 > 0$ , es decir  $a > 0$ . En ambos casos existe contradicción pues  $a < 0$ . En consecuencia no existe  $b \in \mathbb{R}$  tal que  $a = b^n$ .  $\square$

Por el contrario, un resultado importante que se obtiene para  $a > 0$  es el siguiente:

**Proposición 1.16** *Dado un número real positivo  $a$  y un número natural  $n$  siempre existe un único número real positivo  $b$  tal que*

$$a = b^n$$

Lo anterior se escribe más formalmente como:

$$(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists! b \in \mathbb{R}^+)(b^n = a)$$

Este número **real positivo** se llama **raíz  $n$ -ésima** de  $a$  y se denota por

$$b =: \sqrt[n]{a} \quad \text{o} \quad b =: a^{\frac{1}{n}}$$

Además, si  $m \in \mathbb{Z}$  se define

$$a^{\frac{m}{n}} =: \sqrt[n]{a^m} \quad \text{para } a \geq 0 \text{ con } n \in \mathbb{N}$$

Solamente para  $a \geq 0$  se puede asegurar que:

$$a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}} = (a^{\frac{1}{n}})^m = (\sqrt[n]{a})^m$$

Ahora si  $n$  es un número impar, esta definición se puede extender a bases negativas, además

$$\sqrt[n]{-a} =: -\sqrt[n]{a} \tag{1.17}$$

con  $a > 0$

### Example 1

**Ejemplo 32** 1. *Example 2* (a)  $\sqrt{4} = 2$  pues  $4 = 2^2$ . Note que  $2^2 = (-2)^2 = 4$ . Sin embargo  $\sqrt{4} = 2$  y  $\sqrt{4} \neq -2$ , (es decir, no se tiene  $\sqrt{4} = \pm 2$ )

(b)  $\sqrt[3]{-27} = -3$  pues  $\sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3$

(c)  $\sqrt{1-x} \in \mathbb{R}$  si  $1-x \geq 0$  es decir si  $x \leq 1$ .

Sin embargo  $\sqrt[3]{1-x} \in \mathbb{R}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .

**Ejemplo 33** *Determinemos para qué valores de  $a$  la expresión*

$$\frac{\sqrt{a-7} + \sqrt{7-a}}{a-7}$$

*representa un número real.*

**Solución:** La expresión representa un número real si;

$$a-7 \geq 0 \quad \wedge \quad 7-a \geq 0 \quad \wedge \quad a-7 \neq 0$$

luego

$$a \geq 7 \quad \wedge \quad a \leq 7 \quad \wedge \quad a \neq 7$$

es decir,

$$a \in [7, \infty[ \cap ]-\infty, 7] \cap (\mathbb{R} - \{7\}) = \emptyset$$

entonces para ningún real  $a$  la expresión de arriba representa un real.



**Ejercicio 34** Determine el conjunto restricción y el conjunto solución de la ecuación

$$3 - x = \sqrt{x - 1}$$

**Solución:** La expresión  $3 - x$  está definida para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$  y  $\sqrt{x - 1}$  está definida en  $\mathbb{R}$  sólo para  $x \geq 1$ , luego el conjunto restricción es  $\mathcal{R} = [1, \infty[$ .

Como  $\sqrt{x - 1} \geq 0$  entonces para que existan  $x$  en  $\mathbb{R}$  que cumplan con la igualdad debemos exigir que  $3 - x \geq 0$ , es decir,  $x \leq 3$ , pero como  $x \in [1, \infty[$  entonces para

$$x \in ] - \infty, 3] \cap [1, \infty[ = [1, 3]$$

podemos elevar al cuadrado.

$$\begin{aligned} (3 - x)^2 &= (\sqrt{x - 1})^2 \\ \Leftrightarrow 9 - 6x + x^2 &= x - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 7x + 10 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 5)(x - 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 5 \vee x = 2 \end{aligned}$$

pero  $x \in [1, 3]$ , luego el conjunto solución es  $S = \{2, 5\} \cap [1, 3] = \{2\}$

Notemos que si elevamos al cuadrado sin hacer la restricción  $3 - x \geq 0$ , hubiéramos obtenido también  $x = 5$  como solución de ??, y al reemplazar este número en la ecuación, obtendríamos

$$\begin{aligned} 3 - 5 &= \sqrt{5 - 1} \\ -2 &= \sqrt{4} \end{aligned}$$

lo que es una contradicción.

Por eso no olvidemos que para la resolución de una ecuación mediante la elevación a algún exponente par debemos hacer las restricciones necesarias para asegurar que ambos miembros de la igualdad tengan el mismo signo.

**Ejercicio 35** Determinar el conjunto restricción y el conjunto solución de la ecuación

$$\sqrt{5x + 1} = \sqrt{2x - 2} + 2$$

**Solución:** La expresión  $\sqrt{5x + 1}$  está definida en  $\mathbb{R}$  si  $5x + 1 \geq 0$  y  $\sqrt{2x - 2} + 2$  está definida en  $\mathbb{R}$  si  $2x - 2 \geq 0$  luego el conjunto restricción de la ecuación es

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : 5x + 1 \geq 0 \wedge 2x - 2 \geq 0\} = [1, \infty[$$

Ahora resolvamos la ecuación

$$\sqrt{5x + 1} = \sqrt{2x - 2} + 2$$

Considerando  $x$  en el conjunto restricción elevemos al cuadrado (pues ambos miembros de la igualdad son positivos)

$$(\sqrt{5x + 1})^2 = (\sqrt{2x - 2} + 2)^2 = 4\sqrt{2x - 2} + 4$$

lo que equivale a

$$3x - 1 = 4\sqrt{2x - 2}$$

como  $x \geq 1$  entonces  $3x - 1 > 0$  y entonces podemos elevar al cuadrado nuevamente obteniendo;

$$\begin{aligned} (3x - 1)^2 &= 16(2x - 2) \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 6x + 1 &= 32x - 32 \\ \Leftrightarrow 9x^2 - 38x + 33 &= 0 \\ \Leftrightarrow 9(x - 3)(x - \frac{11}{9}) &= 0 \\ \Leftrightarrow x = 3 \vee x = \frac{11}{9} \end{aligned}$$

luego  $S = \{3, \frac{11}{9}\} \cap [1, \infty[ = \{3, \frac{11}{9}\}$

**Ejercicio 36** Determinar la veracidad o falsedad de la siguiente proposición:

Si  $x$  satisface la ecuación  $\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x-2} + 2$  entonces el valor numérico de

$$\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{2x-2}} \text{ es } 2 \text{ ó bien } 3$$

**Solución:** Por el ejemplo anterior, sabemos que los reales que satisfacen la ecuación son  $x = 3$  y  $x = \frac{11}{9}$ .

Por otra parte, si  $x = 3$  entonces

$$\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot 3 + 1}}{\sqrt{2 \cdot 3 - 2}} = \frac{4}{2} = 2$$

Si  $x = \frac{11}{9}$  entonces

$$\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{2x-2}} = \frac{\sqrt{5 \cdot \frac{11}{9} + 1}}{\sqrt{2 \cdot \frac{11}{9} - 2}} = \frac{8/3}{2/3} = 4$$

en consecuencia la afirmación es falsa pues el valor numérico de

$$\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{2x-2}} \text{ es } 2 \text{ ó bien } 4$$

**Observación:** Para aquellas expresiones que tienen significado en  $\mathbb{R}$ , las propiedades de potencias también se cumplen para exponentes racionales.

Así por ejemplo: Si  $a, b \in \mathbb{R}^+$   $n \in \mathbb{Z}$ ,  $m \in \mathbb{Z} - \{0\}$  entonces

$$(ab)^{\frac{n}{m}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{n}{m}}$$

Es importante hacer notar que

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$$

no se cumple<sup>12</sup> en general para  $a, b \in \mathbb{R}$ .  $\sqrt{ab}$  tiene significado en  $\mathbb{R}$  para

$$ab \geq 0,$$

es decir,

$$(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)$$

en cambio

$$\sqrt{a}\sqrt{b}$$

tiene significado en  $\mathbb{R}$  sólo si  $a \geq 0$  y  $b \geq 0$

Así, para resolver una inecuación del tipo

$$\sqrt{x(x-1)} \geq 1,$$

debemos tener cuidado de no cometer el siguiente error:

$$\sqrt{x(x-1)} \geq 1 \iff \sqrt{x}\sqrt{x-1} \geq 1$$

**Ejercicio 37** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

$$1. \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x(x-1)} \geq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x}\sqrt{x-1} \geq 1\}$$

$$2. \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{\frac{x}{1-x}} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x} \leq \sqrt{1-x}\}$$

$$3. (\forall x \in \mathbb{R}^+)(-\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1)$$

---

<sup>12</sup>Detecte el error  $1 = \sqrt{1} = \sqrt{(-1)(-1)} = (\sqrt{-1})^2 = -1$ .

**Solución:**

1. Falso. Existe  $x = -1 \in \mathbb{R}$  tal que  $\sqrt{-1(-1-1)} = \sqrt{2} \geq 1$   
 luego  $-1 \in \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x(x-1)} \geq 1\}$   
 pero  $-1 \notin \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x}\sqrt{x-1} \geq 1\}$  pues  $-1 \notin \mathcal{R}$  donde  $\mathcal{R} = [1, \infty[$  es el conjunto restricción del conjunto  $\{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x}\sqrt{x-1} \geq 1\}$

2. Verdadero. Resolvamos

$$\sqrt{\frac{x}{1-x}} \leq 1 \quad (1.18)$$

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : \frac{x}{1-x} \geq 0 \wedge 1-x \neq 0\} = [0, 1[$$

Considerando  $x \in \mathcal{R}$  y elevando al cuadrado obtenemos la inecuación equivalente

$$\frac{x}{1-x} \leq 1$$

Como  $1-x > 0$  para  $x \in \mathcal{R} = [0, 1[$  entonces

$$\frac{x}{1-x} \leq 1 \iff x \leq 1-x$$

de donde

$$x \leq \frac{1}{2}$$

Así,

$$x \in ]-\infty, 1/2] \cap [0, 1[ = [0, 1/2]$$

Por lo tanto, el conjunto solución de la inecuación 1.18 es  $S = [0, 1/2]$

Ahora resolvamos

$$\sqrt{x} \leq \sqrt{1-x} \quad (1.19)$$

Las expresiones  $\sqrt{x}$  y  $\sqrt{1-x}$  están definidas en  $\mathbb{R}$  si y sólo si

$$x \geq 0 \wedge 1-x \geq 0$$

luego

$$\mathcal{R} = [0, 1]$$

y como las inecuaciones 1.18 y 1.19 son equivalentes en  $[0, 1[$  entonces sus conjuntos soluciones son iguales.

3. Falso. Existe  $x = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\frac{1}{\sqrt{x}} = 2 \not\leq 1$ .

**Observación:** No confundir lo que significan las siguientes expresiones:

- i) La expresión

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1)$$

es una proposición que afirma que para todo  $x$  en los reales positivos se cumple que  $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ , lo cual hemos visto que es falso.

- ii) En cambio la expresión

$$\{x \in \mathbb{R}^+ : \frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1\}$$

indica el conjunto de los reales positivos que cumple con la inecuación  $\frac{1}{\sqrt{x}} \leq 1$ , es decir, el conjunto  $[1, \infty[$ .

Notemos que la igualdad

$$\sqrt{a^2} = a$$

no se cumple para todo  $a \in \mathbb{R}$ ; puesto que  $a^2$  es positivo y la raíz par de un número positivo es un número positivo. Por ejemplo, si  $a = -2$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$$

Sea  $a \geq 0$  por ??;

$$\sqrt{a^2} = a^{\frac{2}{2}} = a$$

Sea  $a < 0$ ; como  $-a > 0$  y por ?? se tiene que:

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{(-a)^2} = (-a)^{\frac{2}{2}} = -a$$

En consecuencia

$$\begin{aligned} \sqrt{a^2} &= a & \forall a \in \mathbb{R}_0^+ \\ \sqrt{a^2} &= -a & \forall a \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

Lo que escribiremos

$$\sqrt{a^2} = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases} \quad (1.20)$$

**Ejercicio 38** En base a lo anterior determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1.  $(\forall a \in \mathbb{R})(\sqrt[4]{a^6} = \sqrt{a^3})$ .
2. Sea  $a \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = a\} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$ .
3.  $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\} = \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{4}\}$ .
4. Sean  $x, y \in \mathbb{R}$  tal que  $x^2 + y^2 - 2xy = 4$  entonces  $x - y = 2$ .

**Solución:**

1. Falso. Sólo para  $a \geq 0$ , se tiene que:  $\sqrt[4]{a^6} = a^{\frac{6}{4}} = a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$ . Para  $a < 0$ ,  $\sqrt{a^3} \notin \mathbb{R}$  y  $\sqrt[4]{a^6} \in \mathbb{R}$ , y la igualdad no se da para todo  $a \in \mathbb{R}$
2. Verdadero.

$$\begin{aligned} x^2 = a &\Leftrightarrow x^2 - a = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0 \\ &\Leftrightarrow x - \sqrt{a} = 0 \vee x + \sqrt{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{a} \vee x = -\sqrt{a} \end{aligned}$$

Luego

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = a\} = \{-\sqrt{a}, \sqrt{a}\}$$

Note que no es lo mismo resolver la ecuación  $x^2 = a$  que resolver la ecuación  $x = \sqrt{a}$ .

3. Falso. Por lo anterior es claro que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = 4\} = \{-2, 2\} \neq \{x \in \mathbb{R} : x = \sqrt{4}\} = \{2\}$$

4. Falso.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2xy &= 4 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 &= 4 \\ \Leftrightarrow (x - y)^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow ((x - y) - 2)((x - y) + 2) &= 0 \\ \Leftrightarrow x - y = 2 \vee x - y &= -2 \end{aligned}$$

En particular, se consideramos  $x = 2, y = 4$  entonces

$$x^2 + y^2 - 2xy = 4$$

pero

$$x - y = -2 \neq 2$$

En general si  $a \in \mathbb{R}^+$

$$(x - y)^2 = a$$

entonces

$$x - y = \sqrt{a} \vee x - y = -\sqrt{a}$$

Veremos a continuación lo útil que son estas propiedades para la resolución de sistemas de ecuaciones

### 1.3.2 Sistemas de Ecuaciones no Lineales

Resolver un sistema de ecuaciones en  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  es encontrar las  $n$ -upla  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  que satisfacen cada una de las ecuaciones simultáneamente.

Lo esencial en la resolución de sistemas no lineales como los siguientes, es determinar una factorización de la forma  $ab = 0$  y analizar los casos  $a = 0$  y  $b = 0$ .

**Ejemplo 39** *Resolvamos*

$$\left. \begin{array}{rcl} x^2 + y^2 & = & 2(xy + 2) \\ x + y & = & 6 \end{array} \right|$$

**Solución:** Transformando el sistema dado en la forma equivalente

$$\left. \begin{array}{rcl} (1) & (x - y)^2 & = 4 \\ (2) & x + y & = 6 \end{array} \right|$$

Se obtiene de (1) los siguientes casos por analizar

$$x - y = 2 \quad \vee \quad x - y = -2$$

i) Si  $x - y = 2$ , entonces se tiene

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y & = & 2 \\ x + y & = & 6 \end{array} \right|$$

de donde  $x = 4$  y  $y = 2$

ii) Si  $x - y = -2$  se tiene

$$\left. \begin{array}{rcl} x - y & = & -2 \\ x + y & = & 6 \end{array} \right|$$

de donde  $x = 2$  y  $y = 4$

Por lo tanto existen dos soluciones

$$(x, y) = (4, 2), \quad (x, y) = (2, 4)$$

**Ejercicio 40** *Resolver*

$$\left. \begin{array}{rcl} (1) & 2(x^2 + y^2) & = 5xy \\ (2) & 4(x - y) & = xy \end{array} \right|$$

**Solución:** Se tiene:

$$(1) \iff x^2 + y^2 = \frac{5}{2}xy$$

$$\iff x^2 - 2xy + y^2 = \frac{5}{2}xy - 2xy$$

$$\iff (x - y)^2 = \frac{1}{2}xy \tag{1.21}$$

además de (2) se tiene

$$2(x - y) = \frac{1}{2}xy \quad (1.22)$$

luego de (1.21) y (1.22)

$$\begin{aligned} & (x - y)^2 = 2(x - y) \\ \iff & (x - y)^2 - 2(x - y) = 0 \\ \iff & (x - y)((x - y) - 2) = 0 \\ \iff & x - y = 0 \quad \vee \quad x - y = 2 \end{aligned}$$

Esto nos obliga a analizar dos casos:

- i) Si  $x - y = 0$  entonces en (2) se tiene  $xy = 0$ , de donde  $x^2 = 0$  y por lo tanto  $x = y = 0$ .
- ii) Si  $x - y = 2$  entonces en (2) se tiene  $xy = 8$ , de donde  $x(x - 2) = 8$ , es decir,

$$(x - 4)(x + 2) = 0$$

luego

$$x = 4 \quad \vee \quad x = -2$$

- iii) Si  $x = 4$  entonces  $y = -2$ ; si  $x = -2$  entonces  $y = -4$ .

En consecuencia existen 3 soluciones para el sistema

$$(x, y) = (0, 0), \quad (x, y) = (4, 2), \quad (x, y) = (-2, -4)$$

En los siguientes ejemplos veremos la resolución de sistemas de dos o más variables que con frecuencia aparecen en problemas relacionados con la determinación de máximos y mínimos (método de los multiplicadores de Lagrange), que será estudiado posteriormente en un curso de cálculo en varias variables.

**Ejercicio 41** Determine los puntos  $(x, y, \lambda)$  que satisfacen las ecuaciones en  $\mathbb{R}$

$$\begin{array}{lcl} (1) & 2x - 1 & = 2\lambda x \\ (2) & 4y & = 2\lambda y \\ (3) & x^2 + y^2 - 1 & = 0 \end{array} \quad (1.23)$$

**Solución:**

De la ecuación (2) tenemos que

$$2y(2 - \lambda) = 0$$

luego

$$y = 0 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

- i) En primer lugar supongamos que  $y = 0$ , entonces sustituyendo en (3) tenemos

$$x^2 = 1$$

de donde

$$x = 1 \quad \vee \quad x = -1$$

De la ecuación (1) obtenemos:

- si  $x = 1$ , entonces  $\lambda = \frac{1}{2}$ ;
- si  $x = -1$ , entonces  $\lambda = \frac{3}{2}$ .

Por lo tanto los puntos

$$\begin{aligned} P_1(x, y, \lambda) &= (1, 0, \frac{1}{2}) \\ P_2(x, y, \lambda) &= (-1, 0, \frac{3}{2}) \end{aligned}$$

satisfacen el sistema 1.23

- ii) Ahora supongamos que  $\lambda = 2$ . Sustituyendo en (1) obtenemos que

$$x = -\frac{1}{2}.$$

Luego de (3) se tiene que

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - 1 = 0$$

de donde

$$y^2 - \frac{3}{4} = 0$$

es decir,

$$\left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \left(y + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

por lo tanto

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \vee \quad y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

En consecuencia, tenemos que:

$$\begin{aligned} P_3(x, y, \lambda) &= \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) \\ P_4(x, y, \lambda) &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) \end{aligned}$$

satisfacen 1.23

Luego el conjunto solución del sistema 1.23 es:

$$S = \left\{ \left(1, 0, \frac{1}{2}\right), \left(-1, 0, \frac{3}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right) \right\}$$

**Ejercicio 42** Resuelva el sistema

$$\begin{array}{lcl} (1) & 4x & = \lambda x \\ (2) & 9y & = \lambda y \\ (3) & z & = \lambda z \\ (4) & \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 & = 1 \end{array} \quad (1.24)$$

**Solución:** De la ecuación (1) tenemos;

$$x(4 - \lambda) = 0$$

de donde

$$x = 0 \quad \vee \quad \lambda = 4 \quad (1.25)$$

i) Supongamos primero que  $x = 0$ . Entonces en (4) resulta

$$\frac{y^2}{9} + z^2 = 1 \quad (1.26)$$

pero por (2) tenemos

$$y(9 - \lambda) = 0$$

es decir

$$y = 0 \quad \vee \quad \lambda = 9$$

ii) Si  $y = 0$ , entonces, sustituyendo en 1.26, se tiene

$$z^2 = 1$$

lo que implica que

$$z = 1 \quad \vee \quad z = -1$$

Luego, de la ecuación (3),

$$z(1 - \lambda) = 0$$

de donde se tiene que

$$z = 0 \quad \vee \quad \lambda = 1$$

pero  $z \neq 0$ , luego  $\lambda = 1$

En consecuencia los puntos  $P_1$  y  $P_2$ , son soluciones del sistema, donde

$$\begin{aligned} P_1(x, y, z, \lambda) &= (0, 0, 1, 1) \\ P_2(x, y, z, \lambda) &= (0, 0, -1, 1) \end{aligned}$$

i2) Si  $\lambda = 9$ , entonces de (3) se tiene que

$$z = 0$$

y sustituyendo en 1.26 se tiene que

$$\frac{y^2}{9} = 1,$$

lo que implica que

$$y = 3 \quad \vee \quad y = -3$$

Por lo tanto los puntos

$$\begin{aligned} P_3(x, y, z, \lambda) &= (0, 3, 0, 9) \\ P_4(x, y, z, \lambda) &= (0, -3, 0, 9) \end{aligned}$$

también son soluciones del sistema 1.24.

ii) Finalmente consideremos  $\lambda = 4$  de 1.25, entonces de (2) y (3) se tiene que

$$y = 0 \quad \wedge \quad z = 0$$

luego en (4);

$$\frac{x^2}{4} = 1$$

de donde

$$x = 2 \quad \vee \quad x = -2$$

luego los puntos

$$\begin{aligned} P_5(x, y, z, \lambda) &= (2, 0, 0, 4) \\ P_6(x, y, z, \lambda) &= (-2, 0, 0, 4) \end{aligned}$$

son también soluciones del sistema 1.24

Así, ya que se consideraron todos los casos, el conjunto solución del sistema es

$$S = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$$

**Ejercicio 43** Resuelva el sistema;

$$\begin{array}{lcl} (1) & y + 2z + \lambda yz & = 0 \\ (2) & x + 2z + \lambda xz & = 0 \\ (3) & 2x + 2y + \lambda xy & = 0 \\ (4) & xyz - V & = 0 \end{array} \quad (1.27)$$

Donde  $V$  es una constante positiva conocida.

**Solución:** Restando la ecuación (2) de la ecuación (1) obtenemos

$$y - x + \lambda z(y - x) = 0$$

factorizando por  $(y - x)$  tenemos

$$(y - x)(1 + \lambda z) = 0$$



de donde

$$(1 + \lambda z) = 0 \quad \vee \quad y = x \quad (1.28)$$

i) Supongamos que  $1 + \lambda z = 0$ , entonces

$$\lambda = -\frac{1}{z} \quad \text{ya que} \quad z \neq 0 \quad (1.29)$$

Sustituyendo 1.29 en (2) tenemos

$$x + 2z + \left(-\frac{1}{z}\right)xz = 0$$

de donde  $z = 0$ , lo que contradice 1.29. Luego la igualdad  $1 + \lambda z = 0$  no se puede dar y por lo tanto por 1.28 se tiene el siguiente caso.

ii) Supongamos ahora

$$x = y \quad (1.30)$$

Sustituyendo 1.30 en (3) tenemos

$$4x + \lambda x^2 = 0$$

es decir

$$x(4 + \lambda x) = 0$$

lo que implica que

$$x = 0 \quad \vee \quad 4 + \lambda x = 0$$

Sustituyendo  $x = 0$  en (4) tenemos  $V = 0$  lo que no se puede dar pues  $V > 0$ . Luego sólo nos queda el caso

$$4 + \lambda x = 0$$

y como  $x \neq 0$ , obtenemos

$$\lambda = \frac{-4}{x} \quad (1.31)$$

Sustituyendo 1.31 en (2) tenemos

$$x + 2z + \left(\frac{-4}{x}\right)xz = 0$$

de donde

$$x = 2z$$

Finalmente, sustituyendo  $x = y$  y  $x = 2z$  en (4) tenemos

$$\frac{x^3}{2} = V$$

por lo tanto

$$x = y = \sqrt[3]{2V} \quad \wedge \quad z = \frac{\sqrt[3]{2V}}{2} \quad \wedge \quad \lambda = \frac{-4}{\sqrt[3]{2V}}$$

luego el conjunto solución del sistema 1.27 es

$$S = \left\{ \left( \sqrt[3]{2V}, \sqrt[3]{2V}, \frac{\sqrt[3]{2V}}{2}, \frac{-4}{\sqrt[3]{2V}} \right) \right\}$$

**Ejercicio 44** Resuelva el sistema

$$\begin{array}{lcl} (1) & 8yz & = 32x\lambda \\ (2) & 8xz & = 8y\lambda \\ (3) & 8xy & = 18z\lambda \\ (4) & 16x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 144 & = 0 \end{array} \quad (1.32)$$

Bajo la restricción:  $x > 0, y > 0, z > 0$

**Solución:** <sup>13</sup> Multiplicando la ecuación (1) por  $x$ , la (2) por  $y$ , la (3) por  $z$  y sumándolas obtenemos;

$$24xyz = 32x^2\lambda + 8y^2\lambda + 18z^2\lambda$$

que es equivalente a

$$24xyz = 2\lambda(16x^2 + 4y^2 + 9z^2)$$

Como  $16x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 144$ , entonces

$$24xyz = 2\lambda \cdot 144,$$

es decir,

$$xyz = 12\lambda \tag{1.33}$$

Multiplicando la ecuación (1) por  $x$  obtenemos

$$8xyz = 32x^2\lambda \tag{1.34}$$

Sustituyendo 1.33 en 1.34 se tiene

$$8(12\lambda) = 32x^2\lambda,$$

es decir,

$$32\lambda(3 - x^2) = 0$$

lo que implica

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad x = \sqrt{3} \quad \vee \quad x = -\sqrt{3}$$

i) Si  $\lambda = 0$ , entonces

$$x = 0 \quad \vee \quad y = 0 \quad \vee \quad z = 0$$

lo que no se puede dar por la restricción. Por la misma razón no se puede dar que  $x = -\sqrt{3}$ . Así, la única posibilidad es que

$$x = \sqrt{3}$$

Ahora, multiplicando la ecuación (2) por  $y$  tenemos

$$8xyz = 8y^2\lambda$$

pero  $xyz = 12\lambda$  luego

$$12\lambda = y^2\lambda$$

lo que implica

$$\lambda(12 - y^2) = 0$$

Como  $\lambda \neq 0$ , entonces  $12 - y^2 = 0$ , es decir,

$$y = \sqrt{12}$$

Finalmente, multiplicando por  $z$  la ecuación (3), se tiene

$$8xyz = 18z^2\lambda$$

de donde resulta

$$z = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Por otra parte, como  $xyz = 12\lambda$ , entonces

$$\lambda = \frac{xyz}{12} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{12} \cdot \frac{4\sqrt{3}}{3}}{12 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{12}}{12} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

---

<sup>13</sup>Como hemos notado, existen varias formas de resolver los sistemas de ecuaciones. No existe una técnica aplicable siempre; lo importante es no cometer el típico error de dejar algún caso sin analizar.

En consecuencia la solución del sistema 1.32 es

$$x = \sqrt{3}, \quad y = 2\sqrt{3}, \quad z = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad \lambda = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

**Nota:** Es importante recordar que con frecuencia se racionaliza antes de entregar un resultado (como en el ejercicio anterior)

Por ejemplo el resultado  $z = \frac{4}{\sqrt{3}}$  se cambia por su equivalente

$$z = \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}.$$

### 1.3.3 $\sqrt{2}$ es irracional

A continuación probemos que  $\sqrt{2}$  no es racional (o bien: en general, si  $p$  es un número primo, entonces  $\sqrt{p}$  es irracional).

Supongamos lo contrario, es decir, supongamos que  $\sqrt{2}$  es racional, esto es,

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$

con  $p \in \mathbb{Z}$ ,  $q \in \mathbb{Z} - \{0\}$ . Siempre es posible escoger  $p$  y  $q$  tal que la fracción  $\frac{p}{q}$  esté simplificada al máximo, en tal caso

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow p^2 = 2q^2$$

luego  $p^2$  es un número par y por 1.7,  $p$  debe ser par, es decir,  $p = 2k$ , para algún  $k \in \mathbb{Z}^+$ . Por lo tanto

$$p^2 = 4k^2$$

y como  $p^2 = 2q^2$ , se tiene que  $2q^2 = 4k^2$ , así  $q^2 = 2k^2$ . Esta última igualdad nos dice que  $q^2$  es un número par y por 1.7  $q$  también es par.

Por lo anterior se tiene que  $q$  y  $p$  son pares, lo que contradice el hecho que  $\frac{p}{q}$  estaba simplificada al máximo, de esta forma  $\sqrt{2}$  no puede ser un número racional. Así hemos obtenido el importante resultado:

$$\sqrt{2} \text{ es irracional} \tag{1.35}$$

Asimismo,  $-\sqrt{2}$  no es racional. En efecto, si  $-\sqrt{2}$  fuera racional, entonces dado que  $(\mathbb{Q}, +)$  es grupo su inverso aditivo  $\sqrt{2}$  debe ser racional lo que contradice 1.35.

Con argumentos similares se puede probar que para todo número entero  $p$  se tiene que  $p\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$

En forma similar a 1.35 podemos demostrar que  $\sqrt[4]{6}$  es irracional.

¿Cómo podemos determinar cuál de los irracionales  $\sqrt{2}$  o  $\sqrt[4]{6}$  es menor?

Una herramienta de gran utilidad para ordenar reales es la siguiente proposición

#### Proposición 1.17

i) Sean  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$

$$a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd$$

ii) Sean  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n$$

**Demostración:**

i) Recordemos que

$$\begin{aligned} a < b \wedge c > 0 &\Rightarrow ac < bc \\ c < d \wedge b > 0 &\Rightarrow bc < bd \end{aligned}$$

luego

$$ac < bc \wedge bc < bd \Rightarrow ac < bd$$

por lo tanto

$$(\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}^+)(a < b \wedge c < d \Rightarrow ac < bd)$$

ii) Para probar esta proposición demostraremos en primer lugar que

$$a < b \Rightarrow a^n < b^n$$

y luego probaremos la implicación en el otro sentido.

De (i) es claro que

$$a < b \Rightarrow a < b \wedge a < b \Rightarrow a^2 < b^2.$$

Inductivamente se puede probar que  $a < b \Rightarrow a^n < b^n$ .

Ahora supongamos que

$$a^n < b^n \tag{1.36}$$

con  $a, b \in \mathbb{R}^+$  demostremos que  $a < b$

Sea

$$L = (a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

entonces

$$a^n - b^n = (a - b)L$$

como  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , es claro que  $L \in \mathbb{R}^+$ , luego  $L^{-1} \in \mathbb{R}^+$ . Por otra parte considerando 1.36  $a^n - b^n < 0$ , es decir

$$(a - b)L < 0$$

pero  $L^{-1} > 0$ , luego  $(a - b)LL^{-1} < 0$ , de donde

$$a - b < 0$$

así,

$$a^n < b^n \Rightarrow a < b \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

□

Ahora usemos la equivalencia recién probada para los números  $\sqrt{2}$  y  $\sqrt[4]{6}$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \sqrt{2} < \sqrt[4]{6} &\Leftrightarrow (\sqrt{2})^4 < (\sqrt[4]{6})^4 \\ &\Leftrightarrow 2^{\frac{4}{2}} < 6^{\frac{4}{4}} \\ &\Leftrightarrow 4 < 6 \end{aligned}$$

Como la desigualdad  $4 < 6$  es verdadera se tiene que

$$\sqrt{2} < \sqrt[4]{6}$$

también es verdadera.

**Corolario 1.18** Para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$a < b \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

**Demostración:** Como  $a \in \mathbb{R}^+$  y  $b \in \mathbb{R}^+$  entonces  $a = (\sqrt[n]{a})^n$  y  $b = (\sqrt[n]{b})^n$  donde  $\sqrt[n]{a} \in \mathbb{R}^+$  y  $\sqrt[n]{b} \in \mathbb{R}^+$ , luego por la proposición 1.17 se tiene

$$a < b \iff (\sqrt[n]{a})^n < (\sqrt[n]{b})^n \iff \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$$

□

**Ejercicio 45** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1.  $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a < b \Rightarrow a^2 < b^2)$
2.  $(\forall a, b \in \mathbb{R})(a^2 < b^2 \Rightarrow a < b)$
3.  $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall a, b \in \mathbb{R})(a^n < b^n \Rightarrow a < b)$
4.  $(\forall a \in \mathbb{R})(a \leq a^2)$
5.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\frac{1}{a} < 1)$
6.  $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)(a < b \Rightarrow a^2 < b^2)$
7.  $(\forall a, b \in \mathbb{R} - \{0\})(a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$
8.  $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)(a < b \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b})$
9.  $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)(\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a})$
10.  $(\forall a, b \in \mathbb{R}^+)(\frac{1}{ab} < \frac{1}{a})$

**Solución:**

1. Falso. Existen  $a = -2$ ,  $b = 1$  tales que  $a < b$  pero  $a^2 \not< b^2$ .
2. Falso. Existen  $a = 2$ ,  $b = -3$  tales que  $a^2 < b^2$  pero  $a \not< b$ .
3. Falso. Existen  $n = 4$ ,  $a = 2$  y  $b = -3$  tales que  $2^4 < (-3)^4$  pero  $2 \not< -3$
4. Falso. Existe  $a = \frac{1}{2} \in \mathbb{R}$  tal que  $a \not\leq a^2$
5. Falso. Existe  $a = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}^+$  tal que  $\frac{1}{a} \not< 1$
6. Verdadero. Este es un caso particular de la proposición 1.17 ii), pero repetiremos la demostración para  $n = 2$ .

**Demostración:** Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+$  tales que  $a < b$ . Como  $a < b$ , entonces  $a - b < 0$ ; además  $a + b > 0$  pues  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , luego,

$$(a - b)(a + b) < 0,$$

de donde,

$$a^2 - b^2 < 0,$$

por lo tanto,

$$a^2 < b^2$$

□

7. Falso. Existen  $a = -2$ ,  $b = 1$  tales que  $a < b$  pero  $\frac{1}{a} \not> \frac{1}{b}$
8. Verdadero. Sea  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $ab > 0$  de donde  $\frac{1}{ab} > 0$ . Como  $a < b$  se tiene que

$$a \left( \frac{1}{ab} \right) < b \left( \frac{1}{ab} \right) \Rightarrow \frac{1}{b} < \frac{1}{a} \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

9. Verdadero. Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+$ , entonces  $a + b \in \mathbb{R}^+$  y puesto que

$$a + b > a$$

por la parte 8) se tiene que

$$\frac{1}{a+b} < \frac{1}{a}$$

Esta última desigualdad es muy útil para acotar expresiones reales como veremos más adelante.

10. Falso. Existen  $a = 2$ ,  $b = \frac{1}{4}$  en  $\mathbb{R}^+$  pero:  $\frac{1}{ab} \not\leq \frac{1}{a}$  pues  $\frac{1}{ab} = 2$  y  $\frac{1}{a} = \frac{1}{2}$

En el ejercicio anterior hemos probado que ciertas desigualdades no siempre se cumplen. La pregunta natural es: ¿Para qué valores reales son verdaderas esas desigualdades?

Las propiedades que en seguida veremos nos permitirán determinar los conjuntos en los cuales esas desigualdades se verifican.

**Proposición 1.19** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$

i)  $ab > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

ii)  $ab < 0 \Leftrightarrow (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

Antes de entrar en la demostración explicaremos lo que se hará en ella en términos lógicos: La proposición i) se puede escribir

$$p \Leftrightarrow (q \vee s)$$

donde las proposiciones son

$$\begin{aligned} p &: ab > 0 \\ q &: a > 0 \wedge b > 0 \\ s &: a < 0 \wedge b < 0 \end{aligned}$$

Por otra parte la equivalencia anterior se separa en dos proposiciones

$$[p \Rightarrow (q \vee s)] \quad \wedge \quad [p \Leftarrow (q \vee s)] \quad (1.37)$$

Como sabemos, para mostrar que una proposición formada por el conectivo  $\wedge$  es verdadera necesitamos mostrar que ambas proposiciones que la componen son verdaderas, es decir, basta probar en forma separada que

$$p \Rightarrow (q \vee s)$$

y

$$p \Leftarrow (q \vee s)$$

Así, indicaremos con  $(\Rightarrow)$  la primera parte y con  $(\Leftarrow)$  la segunda parte. **Demostración:**  $(\Rightarrow)$  Como  $ab > 0$ , i.e.,  $ab \in \mathbb{R}^+$  y  $a$  tiene dos posibilidades (ser positivo o negativo) podemos separar la demostración en dos sub casos

**Caso 1)** Si  $a \in \mathbb{R}^+$  entonces  $a^{-1} \in \mathbb{R}^+$ , luego por Axioma ii) y asociando apropiadamente se tiene que  $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^+$ ; en consecuencia,

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+,$$

por lo tanto<sup>14</sup>

$$ab > 0 \Rightarrow a > 0 \wedge b > 0$$

---

<sup>14</sup>Aquí hay varios pasos basados en equivalencias lógicas que no han sido explicitados; por ejemplo,  $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Leftrightarrow p \wedge q$ .

**Caso 2)** Si  $a \in \mathbb{R}^-$  entonces  $a^{-1} \in \mathbb{R}^-$ , luego por Axioma ii) y asociando apropiadamente se tiene que  $a^{-1}(ab) = b \in \mathbb{R}^-$ . En consecuencia

$$ab \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a \in \mathbb{R}^- \wedge b \in \mathbb{R}^-,$$

es decir,

$$ab > 0 \Rightarrow a < 0 \wedge b < 0$$

Por Casos 1) y 2) tenemos

$$ab > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$$

**Demostración:** ( $\Leftarrow$ ) Es claro por Axioma ii):

$$(a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

y

$$(-a \in \mathbb{R}^+ \wedge -b \in \mathbb{R}^+) \Rightarrow (-a)(-b) \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow ab \in \mathbb{R}^+$$

En consecuencia (ya que en ambos casos obtenemos lo mismo)

$$[(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)] \Rightarrow ab > 0$$

□

En forma análoga, se demuestra ii). Asimismo se tiene que

$$ab \geq 0 \Leftrightarrow [(a \geq 0 \wedge b \geq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \leq 0)]$$

y

$$ab \leq 0 \Leftrightarrow [(a \geq 0 \wedge b \leq 0) \vee (a \leq 0 \wedge b \geq 0)]$$

La demostración se hace mediante el uso de la proposición anterior y del hecho que  $[\sim (a \leq b) \Leftrightarrow a > b]$  y  $[(a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\sim a \Leftrightarrow \sim b)]$ .

**Ejemplo 46** Ahora aplicando las propiedades anteriores, determinemos bajo qué condiciones las siguientes desigualdades son verdaderas en  $\mathbb{R}$ :

$$1. x \leq x^2$$

$$2. \frac{1}{y} > 1$$

$$3. \frac{1}{y} \leq 1$$

$$4. x^2 < 1$$

$$5. \frac{x}{y} \leq \frac{x+z}{y}$$

$$6. \frac{x}{y} < x$$

$$7. \frac{1}{xy} < \frac{1}{x}$$

**Solución:**

Utilizando las propiedades de la proposición 1.19 y las proposiciones que siguen de ella, tenemos

1.

$$\begin{aligned} x \leq x^2 &\Leftrightarrow x - x^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x(1 - x) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x \leq 0 \wedge 1 - x \geq 0) \vee (x \geq 0 \wedge 1 - x \leq 0) \\ &\Leftrightarrow (x \leq 0 \wedge x \leq 1) \vee (x \geq 0 \wedge x \geq 1) \\ &\Leftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto la desigualdad  $x \leq x^2$  se verifica para:  $x \leq 0 \vee x \geq 1$ .

2. La desigualdad  $\frac{1}{y} > 1$  tiene significado en  $\mathbb{R}$  si  $y \neq 0$ . Luego

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{y} > 1 &\Leftrightarrow \frac{1}{y} - 1 > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1-y}{y} > 0 \\
 &\Leftrightarrow (1-y > 0 \wedge y > 0) \vee (1-y < 0 \wedge y < 0) \\
 &\Leftrightarrow (y < 1 \wedge y > 0) \vee (y > 1 \wedge y < 0) \\
 &\Leftrightarrow 0 < y < 1 \vee \text{Falso}^{15} \\
 &\Leftrightarrow 0 < y < 1
 \end{aligned}$$

Luego la desigualdad  $\frac{1}{y} > 1$  se cumple para  $0 < y < 1$ , es decir, para  $y \in ]0, 1[$ . Así, podemos afirmar que la siguiente proposición es verdadera

$$(\forall y \in \mathbb{R})(0 < y < 1 \Leftrightarrow \frac{1}{y} > 1)$$

3. Análogamente se obtiene que  $\frac{1}{y} \leq 1$  se cumple para todo  $y \in \mathbb{R}$  tal que

$$y \geq 1 \vee y < 0$$

4.

$$\begin{aligned}
 x^2 < 1 &\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x-1 > 0 \wedge x+1 < 0) \vee (x-1 < 0 \wedge x+1 > 0) \\
 &\Leftrightarrow (x > 1 \wedge x < -1) \vee (x < 1 \wedge x > -1) \\
 &\Leftrightarrow \text{F} \vee -1 < x < 1 \\
 &\Leftrightarrow -1 < x < 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(-1 < x < 1 \Leftrightarrow x^2 < 1)$$

5. Sea  $y \neq 0$ ;

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{y} \leq \frac{x+z}{y} &\Leftrightarrow \frac{x}{y} - \frac{x+z}{y} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow -\frac{z}{y} \leq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{z}{y} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (z \geq 0 \wedge y > 0) \vee (z \leq 0 \wedge y < 0)
 \end{aligned}$$

Luego la desigualdad

$$\frac{x}{y} \leq \frac{x+z}{y}$$

es verdadera si

$$(z \geq 0 \wedge y > 0) \vee (z \leq 0 \wedge y < 0)$$

---

<sup>15</sup>Por lógica  $p \vee \text{Falso} \Leftrightarrow p$ .



6. Sea  $y \neq 0$ <sup>16</sup>;

$$\begin{aligned}
 \frac{x}{y} < x &\Leftrightarrow \frac{x}{y} - x < 0 \\
 &\Leftrightarrow x \left( \frac{1}{y} - 1 \right) < 0 \\
 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge \frac{1}{y} - 1 < 0) \vee (x < 0 \wedge \frac{1}{y} - 1 > 0) \\
 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge (y > 1 \vee y < 0)) \vee (x < 0 \wedge 0 < y < 1) \\
 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 1) \vee (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge 0 < y < 1)
 \end{aligned}$$

Luego la desigualdad

$$\frac{x}{y} < x$$

se cumple para:

$$(x > 0 \wedge y > 1) \vee (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge 0 < y < 1)$$

7. Sean  $x \neq 0$  y  $y \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{xy} < \frac{1}{x} &\Leftrightarrow \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} < 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{1}{x} \left( \frac{1}{y} - 1 \right) < 0 \\
 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{x} > 0 \wedge \frac{1}{y} - 1 < 0 \right) \vee \left( \frac{1}{x} < 0 \wedge \frac{1}{y} - 1 > 0 \right) \\
 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{x} > 0 \wedge (y > 1 \vee y < 0) \right) \vee \left( \frac{1}{x} < 0 \wedge 0 < y < 1 \right) \\
 &\Leftrightarrow \left( \frac{1}{x} > 0 \wedge y > 1 \right) \vee \left( \frac{1}{x} > 0 \wedge y < 0 \right) \vee \left( \frac{1}{x} < 0 \wedge 0 < y < 1 \right) \\
 &\Leftrightarrow (x > 0 \wedge y > 1) \vee (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge 0 < y < 1)
 \end{aligned}$$

Luego la desigualdad

$$\frac{1}{xy} < \frac{1}{x}$$

se cumple para:

$$(x > 0 \wedge y > 1) \vee (x > 0 \wedge y < 0) \vee (x < 0 \wedge 0 < y < 1)$$

En realidad lo que hemos hecho en el ejemplo 46 anterior es resolver **inecuaciones** en una o más variables.

### 1.3.4 Inecuaciones

Sea  $\mathcal{R}$  el conjunto restricción (ver sección 1.2.4) de las expresiones  $P(x)$ ,  $Q(x)$ .

Resolver una inecuación en la variable  $x$  es encontrar el subconjunto  $S$  de los  $x$  en  $\mathcal{R}$  que satisfacen la **desigualdad** (o **inecuación**).

$$P(x) < Q(x) \quad \text{o} \quad P(x) \leq Q(x) \tag{1.38}$$

Diremos que  $S = \{x \in \mathcal{R} : P(x) < Q(x)\}$  o simplemente  $S = \{x \in \mathbb{R} : P(x) < Q(x)\}$  (subentendiendo que  $x$  debe estar  $\mathcal{R}$ ). es el **conjunto solución** de la inecuación 1.38.

Diremos que dos inecuaciones son equivalentes si tienen el mismo conjunto solución.

<sup>16</sup>El error más común al trabajar en esta desigualdad es multiplicar por  $y$ , pues no se sabe si  $y$  es negativo o positivo. Una multiplicación tal debería hacerse bajo condiciones expresas y por lo tanto se debería considerar todos los casos posibles.

**Ejemplo 47** El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{1}{y} > 1 \quad (1.39)$$

es

$$\begin{aligned} S &= \left\{ y \in \mathbb{R} : \frac{1}{y} > 1 \right\} \\ &= \{ y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1 \} \end{aligned}$$

**Ejemplo 48** El conjunto solución de la inecuación

$$x^2 \leq 1 \quad (1.40)$$

es

$$\begin{aligned} S &= \{ x \in \mathbb{R} : x^2 \leq 1 \} \\ &= \{ x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1 \} \end{aligned}$$

**Ejemplo 49** Resolver las siguientes inecuaciones

1.  $\frac{x-1}{x+5} \geq 0$
2.  $\frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} \leq \frac{x-2}{x+2}$
3.  $\frac{x+3}{x} \geq 2$
4.  $\frac{(3-2x)(x+5)}{(x^2-25)(x+1)} > 0$

**Solución:**

1. Resolvamos la inecuación

$$\frac{x-1}{x+5} \geq 0$$

Notemos que  $x+5 \neq 0$ , es decir, el conjunto restricción de la inecuación ?? es

$$\mathcal{R}_1 = \{ x \in \mathbb{R} : x+5 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{-5\}$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{x+5} \geq 0 &\Leftrightarrow (x-1 \geq 0 \wedge x+5 > 0) \vee (x-1 \leq 0 \wedge x+5 < 0) \\ &\Leftrightarrow (x \geq 1 \wedge x > -5) \vee (x \leq 1 \wedge x < -5) \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \vee x < -5 \end{aligned} \quad (1.41)$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{x+5} \geq 0 \right\} \\ &= \mathcal{R}_1 \cap \{ x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \vee x < -5 \} \\ &= ]-\infty, -5[ \cup [1, \infty[ \end{aligned}$$

Nota:

La resolución de la inecuación  $\frac{x-1}{x+5} \geq 0$  dada en 1.41 se puede resumir en la siguiente tabla;

|                   | $x \in ]-\infty, -5[$ | $x = -5$   | $x \in ]-5, 1[$ | $x = 1$ | $]x \in [1, \infty[$ |
|-------------------|-----------------------|------------|-----------------|---------|----------------------|
| $x-1$             | -                     |            | -               | 0       | +                    |
| $x+5$             | -                     | 0          | +               |         | +                    |
| $\frac{x-1}{x+5}$ | +                     | $\nexists$ | -               | 0       | +                    |

Donde el signo  $+$  indica en qué intervalos el factor correspondiente a la fila es positivo y el signo  $-$  en qué intervalo es negativo. Por ejemplo, de la primera fila se tiene que el factor  $x - 1$  es positivo en el intervalo  $]1, \infty[$  y negativo en  $] - \infty, -5[$  y en  $] - 5, 1[$ , (es decir, en  $] - \infty, 1[$ ). De la última fila se obtiene que la expresión  $\frac{x-1}{x+5}$  es no negativa en los intervalos  $] - \infty, -5[$  y  $]1, \infty[$ ; luego la solución de la inecuación

$$\frac{x-1}{x+5} \geq 0$$

es  $] - \infty, -5[ \cup ]1, \infty[$ .

En muchos casos, los factores involucrados en una inecuación del tipo anterior son más de dos y por ello es frecuente usar la tabla anterior en la resolución.

2. Resolvamos la inecuación

$$\frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} \leq \frac{x-2}{x+2} \quad (1.42)$$

Ambos miembros de la desigualdad tienen significado en  $\mathbb{R}$  si

$$x+2 \neq 0 \quad \wedge \quad x^2-4 \neq 0,$$

es decir, el conjunto restricción de la inecuación 1.42 es

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x+2 \neq 0 \wedge x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

Ahora determinemos el conjunto solución de la inecuación:

$$\begin{aligned} & \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{x^2-4} \leq \frac{x-2}{x+2} \\ \Leftrightarrow & \frac{x}{x+2} - \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} - \frac{x-2}{x+2} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x(x-2) - (x-1) - (x-2)^2}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \leq 0 \end{aligned} \quad (1.43)$$

Ahora consideremos la tabla para la resolución de la inecuación 1.43.

|                          | $x \in ]-\infty, -2[$ | $x = -2$   | $x \in ]-2, 2[$ | $x = 2$    | $x \in ]2, 3[$ | $x = 3$ | $x \in ]3, \infty[$ |
|--------------------------|-----------------------|------------|-----------------|------------|----------------|---------|---------------------|
| $x - 3$                  | -                     |            | -               |            | -              | 0       | +                   |
| $x - 2$                  | -                     |            | -               | 0          | +              |         | +                   |
| $x + 2$                  | -                     | 0          | +               |            | +              |         | +                   |
| $\frac{x-3}{(x-2)(x+2)}$ | -                     | $\nexists$ | +               | $\nexists$ | -              | 0       | +                   |

Se tiene de la última fila que

$$\frac{x-3}{(x-2)(x+2)} \leq 0$$

en los intervalos  $] - \infty, -2[$  y  $]2, 3[$  luego la solución de la inecuación 1.42 es

$$S_2 = \mathcal{R}_1 \cap (]-\infty, -2[ \cup ]2, 3]) = ]-\infty, -2[ \cup ]2, 3]$$

3. Resolvamos la inecuación

$$\frac{x+3}{x} \geq 2 \quad (1.44)$$

El conjunto restricción de la inecuación 1.44 es

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R} - \{0\}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned}
 \frac{x+3}{x} \geq 2 &\Leftrightarrow \frac{x+3}{x} - 2 \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{x+3-2x}{x} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{3-x}{x} \geq 0 \\
 &\Leftrightarrow (3-x \geq 0 \wedge x > 0) \vee (3-x \leq 0 \wedge x < 0) \\
 &\Leftrightarrow (x \leq 3 \wedge x > 0) \vee (x \geq 3 \wedge x < 0) \\
 &\Leftrightarrow (0 < x \leq 3) \vee F \\
 &\Leftrightarrow 0 < x \leq 3
 \end{aligned}$$

Luego

$$S_3 = ]0, 3] \cap \mathcal{R}_1 = ]0, 3]$$

Resolvamos

$$\frac{(3-2x)(x+5)}{(x^2-25)(x+1)} > 0 \quad (1.45)$$

El conjunto restricción de la inecuación 1.45 es

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 25 \neq 0 \wedge x + 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-5, -1, 5\}$$

Como  $x^2 - 25 = (x-5)(x+5)$ , entonces la inecuación 1.45 es equivalente a

$$\frac{(3-2x)}{(x-5)(x+1)} > 0 \quad \text{con } x \in \mathcal{R}_1$$

Considerando la tabla

|                             | $x \in ]-\infty, -1[$ | $x = -1$   | $x \in ]-1, -\frac{3}{2}[$ | $x = -\frac{3}{2}$ | $x \in ]-\frac{3}{2}, 5[$ | $x = 5$    | $x \in ]5, \infty[$ |
|-----------------------------|-----------------------|------------|----------------------------|--------------------|---------------------------|------------|---------------------|
| $3 - 2x$                    | +                     |            | +                          | 0                  | -                         |            | -                   |
| $x - 5$                     | -                     |            | -                          |                    | -                         | 0          | +                   |
| $x + 1$                     | -                     | 0          | +                          |                    | +                         |            | +                   |
| $\frac{(3-2x)}{(x-5)(x+1)}$ | +                     | $\nexists$ | -                          | 0                  | +                         | $\nexists$ | -                   |

Obtenemos que

$$\frac{(3-2x)}{(x-5)(x+1)} > 0$$

en  $] -\infty, -1[ \cup ]\frac{3}{2}, 5[$ , pero  $x \in \mathcal{R}_1$  luego el conjunto solución de 1.45 es

$$\begin{aligned}
 S_4 &= (]-\infty, -1[ \cup ]\frac{3}{2}, 5[) \cap \mathcal{R}_1 \\
 &= ]-\infty, -5[ \cup ]-5, -1[ \cup ]\frac{3}{2}, 5[
 \end{aligned}$$

**Nota:** Notemos que las siguientes proposiciones son falsas

1.  $(\forall x \in \mathbb{R}_0^+)(\sqrt{x} \leq x)$
2.  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq \sqrt{y} \Rightarrow x^2 \leq y)$

En efecto;

Para 1) existe  $x = -\frac{1}{4} \in \mathbb{R}_0^+$ , tal que

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \not\leq -\frac{1}{4}$$

Para 2) existen  $x = -2 \in \mathbb{R}$ ,  $y = 2 \in \mathbb{R}^+$  tales que  $-2 \leq \sqrt{2}$  pero

$$(-2)^2 = 4 \not\leq 2$$

Por lo anterior, podemos observar que para resolver una inecuación del tipo:

$$P(x) \leq \sqrt{Q(x)}$$

o del tipo

$$\sqrt{P(x)} \leq Q(x)$$

**no podemos** elevar al cuadrado sin hacer las restricciones necesarias, para asegurar que obtenemos inecuaciones equivalentes. Debemos observar que algunas veces se debe analizar casos distintos.

**Ejercicio 50** *Resolvamos la inecuación*

$$x - 1 \leq \sqrt{x^2 - 1} \tag{1.46}$$

**Solución:** Debemos primeramente hacer las restricciones necesarias

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \vee x \leq -1\} \\ &= ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[ \end{aligned}$$

Primer caso:

Supongamos que  $x - 1 < 0$  y  $x \in \mathcal{R}_1$ , es decir,

$$x \in C_1 = ]-\infty, -1]$$

Puesto que  $x - 1 < 0$  y que  $\sqrt{x^2 - 1} \geq 0$  para todo  $x \in C_1$ , es claro que la desigualdad 1.46 se cumple para todo  $x \in C_1$ ; luego  $S_1 = ]-\infty, -1]$  es la solución en este caso.

Segundo caso:

Supongamos que  $x - 1 \geq 0$  y  $x \in \mathcal{R}_1$ , es decir

$$x \in C_2 = [1, \infty[$$

Dado que ambos miembros de la desigualdad son no negativos en  $C_2$ , podemos elevar al cuadrado; así,

$$\begin{aligned} x - 1 &\leq \sqrt{x^2 - 1} \\ \Rightarrow (x - 1)^2 &\leq x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 &\leq x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow -2x + 2 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow x &\geq 1 \end{aligned}$$

Luego la solución en este caso es

$$S_2 = [1, \infty[ \cap C_2 = [1, \infty[$$

Y finalmente la solución total es

$$S_T = S_1 \cup S_2 = ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$$

Observemos que en el siguiente ejemplo no se da el primer caso del ejemplo anterior.

**Ejemplo 51** *Resolvamos*

$$\sqrt{x^2 - x - 2} \leq x$$

**Solución:** Haciendo las restricciones necesarias tenemos:

$$\mathcal{R}_2 = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - x \geq 0\}$$

y como

$$\begin{aligned} x^2 - x \geq 0 &\Leftrightarrow x(x-1) \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 1 \vee x \leq 0 \end{aligned}$$

se tiene que

$$\mathcal{R}_2 = ]-\infty, 0] \cup [1, \infty[ = \mathbb{R} - ]0, 1[$$

Notemos que en este tipo de inecuación no se puede dar el caso que

$$x + 2 < 0$$

pues

$$\sqrt{x^2 - x} - 2 \leq x \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - x} \leq x + 2$$

y

$$\sqrt{x^2 - x} \geq 0$$

para todo  $x \in \mathcal{R}_2$ . Así para poder elevar al cuadrado debemos exigir que  $x + 2 \geq 0$ , es decir,

$$x \geq -2 \wedge x \in \mathcal{R}_2$$

Por lo tanto si  $x \in C_1 = [-2, 0] \cup [1, \infty[$  tenemos;

$$\begin{aligned} &\sqrt{x^2 - x} \leq x + 2 \\ \Leftrightarrow &x^2 - x \leq (x + 2)^2 \\ \Leftrightarrow &x^2 - x \leq x^2 + 4x + 4 \\ \Leftrightarrow &-5x \leq 4 \\ \Leftrightarrow &x \geq \frac{-4}{5} \end{aligned}$$

luego el conjunto solución de esta inecuación es

$$S = [\frac{-4}{5}, \infty[ \cap C_1 = [\frac{-4}{5}, 0] \cup [1, \infty[$$

Hemos visto que la desigualdad

$$\sqrt{x} \leq x \tag{1.47}$$

no se cumple para todo  $x \in \mathbb{R}_0^+$ . Entonces ¿para qué valores de  $x \in \mathbb{R}^+$  se cumple? Esto equivale a preguntar ¿cuál es el conjunto solución de la inecuación 1.47?

Para resolver 1.47, primeramente debemos restringir nuestra expresión a

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} = \mathbb{R}_0^+$$

Como ambos miembros de la inecuación son no negativos, podemos elevar al cuadrado en ambos lados:

$$\begin{aligned} &\sqrt{x} \leq x \\ \Leftrightarrow &x \leq x^2 \\ \Leftrightarrow &x - x^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow &x \geq 1 \vee x \leq 0 \end{aligned}$$

luego, el conjunto solución es

$$S = (-\infty, 0] \cup [1, \infty) \cap \mathcal{R}_1 = \{0\} \cup [1, \infty[$$

Es claro que

$$\sqrt{x} < x \quad \forall x \in ]1, \infty[$$

Recordemos que esta última expresión no es válida para  $x \in [0, 1]$ .

En particular, la desigualdad

$$\sqrt{x^2 + y^2} < x^2 + y^2$$

sólo se cumple si  $x^2 + y^2 > 1$

### 1.3.5 La ecuación de segundo grado

Para resolver inecuaciones en que aparezcan factores de la forma  $ax^2 + bx + c$  con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  necesitamos conocer algunas propiedades de la ecuación de segundo grado.

Una **ecuación de segundo grado** en la variable  $x$  es una expresión del tipo

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0 \quad (1.48)$$

Utilizando las propiedades de  $\mathbb{R}$ , analicemos las posibles soluciones de la ecuación 1.48. Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $a > 0$

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} \\ \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} &= \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \vee x + \frac{b}{2a} = -\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\ \Leftrightarrow x &= -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \vee x = -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \end{aligned}$$

Estas expresiones están bien definidas en  $\mathbb{R}$  si y sólo si

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

**Definición 1.20** Llamaremos *discriminante* de la ecuación 1.48 a la expresión

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Se tiene el siguiente teorema

**Teorema 1.21** Considerando la ecuación de segundo grado 1.48 se tiene que:

i) Si  $\Delta > 0$ , entonces la ecuación 1.48 tiene dos soluciones o raíces reales (diferentes)

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

ii) Si  $\Delta = 0$ , entonces la ecuación 1.48 tiene una solución o raíz en  $\mathbb{R}$  (o dos raíces iguales)

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

iii) Si  $\Delta < 0$ , entonces la ecuación 1.48 no tiene soluciones en  $\mathbb{R}$ .

**Observación:** Esto es, si llamamos  $S$  al conjunto solución de la ecuación 1.48, se tiene i) Si  $\Delta > 0$ ,  $S = \{x_1, x_2\}$ . ii) Si  $\Delta = 0$ ,  $S = \{x_1\}$ , iii) Si  $\Delta < 0$ ,  $S = \phi$ .

**Ejemplo 52** Consideremos la ecuación;

$$3x^2 - 2x - 1 = 0$$

Puesto que  $\Delta = (-2)^2 + 12 = 16 > 0$ , entonces la ecuación tiene dos soluciones reales

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{16}}{6} = 1 \quad x_2 = \frac{2-\sqrt{16}}{6} = -\frac{1}{3}$$

**Ejemplo 53** La ecuación

$$x^2 - 2x + 1 = 0$$

tiene una raíz real (o dos raíces iguales)

$$x_1 = x_2 = 1$$

pues  $\Delta = 0$

**Ejemplo 54** Sin embargo la ecuación

$$x^2 + x + 1 = 0$$

no tiene raíces reales pues  $\Delta = -3 < 0$

**Observación:** Es necesario enfatizar que la ecuación 1.48 tiene solución en  $\mathbb{R}$  si y sólo si

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$$

**Ejercicio 55** Complete los siguientes enunciados (correctamente):

1. Si la recta  $y = -\frac{3}{2}x + b$  corta a la parábola  $y^2 = 12x$  en un solo punto entonces  $b = \dots\dots\dots$
2. La recta de ecuación  $y = b$  es tangente a la parábola  $y = x^2 - 6x + 8$  si  $b = \dots\dots\dots$
3. Si la recta  $y = 2x + b$  corta a la curva  $2(x-1)^2 - y^2 = 1$  en dos puntos diferentes entonces  $b \in \dots\dots\dots$
4. La proposición

$$(\alpha + 1)x^2 - 4x + (\alpha - 1) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

es verdadera si y sólo si  $\alpha \in \dots\dots\dots$

**Solución:**

1. Si la recta  $y = -\frac{3}{2}x + b$  corta a la parábola  $y^2 = 12x$  en un solo punto entonces el sistema

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad -\frac{3}{2}x + b = y \\ (2) \quad y^2 = 12x \end{array} \right\}$$

tiene única solución. Reemplazando (1) en (2) se tiene la ecuación

$$\left(\frac{3}{2}x + b\right)^2 = 12x$$

que equivale a la ecuación de segundo grado en la variable  $x$ .

$$\frac{9}{4}x^2 + (3b - 12)x + b^2 = 0 \tag{1.49}$$

Luego el problema equivale a encontrar  $b \in \mathbb{R}$  tal que la ecuación de segundo grado tenga una única solución.

Para esto el discriminante de la ecuación 1.49 debe ser cero luego

$$\Delta = (3b - 12)^2 - 9b^2 = 0$$

de donde  $b = 2$  Si la recta  $y = -\frac{3}{2}x + b$  corta a la parábola  $y^2 = 12x$  en un solo punto entonces  $b = 2$ .



2. Este problema es equivalente al ejercicio anterior, pues si la recta  $y = b$  es tangente a la parábola  $y = x^2 - 6x + 8$ , entonces la recta y parábola se cortan en un solo punto. Por consiguiente el problema es equivalente a determinar  $b$  en  $\mathbb{R}$  tal que la ecuación de segundo grado

$$x^2 - 6x + 8 - b = 0$$

tenga única solución. Así

$$\Delta = 36 - 4(8 - b) = 0$$

de donde  $b = -1$

Nota:

El lector que conoce el concepto de derivada se habrá dado cuenta que este problema resulta muy simple, si utilizamos ese concepto.

3. En este caso, tenemos que el sistema

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x + b & = & y \\ 2(x - 1)^2 - y^2 & = & 1 \end{array} \right|$$

debe tener dos soluciones reales diferentes, luego la ecuación de segundo grado

$$2(x - 1)^2 - (2x + b)^2 = 1$$

que equivale a

$$2x^2 + (4 + 4b)x + b^2 - 1 = 0$$

debe cumplir que su discriminante sea mayor que cero, es decir,

$$\begin{aligned} \Delta &= (4 + 4b)^2 - 8(b^2 - 1) > 0 \\ \iff b^2 + 4b + 3 &> 0 \\ \iff (b + 1)(b + 3) &> 0 \\ \iff (b + 1 > 0 \wedge b + 3 > 0) \vee (b + 1 < 0 \vee b + 3 < 0) \\ \iff b > -1 \vee b < -3 \\ \iff b \in ]-\infty, -3[ \cup ]-1, \infty[ \end{aligned}$$

por lo tanto  $b \in \mathbb{R} - [-3, -1]$

4. La inecuación

$$(\alpha + 1)x^2 - 4x + \alpha - 1 > 0$$

se verifica para todo  $x$  en  $\mathbb{R}$  si y sólo si el discriminante de la ecuación asociada

$$(\alpha + 1)x^2 - 4x + \alpha - 1 = 0$$

es menor que cero con  $\alpha - 1 > 0$ , esto es,

$$\begin{aligned} \Delta &= 16 - 4(\alpha + 1)(\alpha - 1) < 0 \wedge \alpha - 1 > 0 \\ \iff \alpha^2 - 5 &> 0 \wedge \alpha > 1 \\ \iff (\alpha - \sqrt{5})(\alpha + \sqrt{5}) &> 0 \wedge \alpha > 1 \\ \iff \alpha &> \sqrt{5} \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\alpha \in ]\sqrt{5}, \infty[$ .

**Ejercicio 56** Determine para qué valores reales de  $k$  las raíces de la ecuación

$$(k - 3)x^2 - 2kx + 6k = 0$$

son reales.

**Solución:**

1. Supongamos  $k \neq 3$ , en este caso la ecuación es de segundo grado. Las raíces serán reales si

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2k)^2 - 4(k - 3)6k \geq 0 \\ \Leftrightarrow 4k^2 - 24k(k - 3) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow 4k(18 - 5k) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (k \geq 0 \wedge 18 - 5k \geq 0) \vee (k \leq 0 \wedge 18 - 5k \leq 0) \\ \Leftrightarrow 0 \leq k &\leq \frac{18}{5} \end{aligned}$$

luego

$$k \in [0, \frac{18}{5}] - \{3\}$$

2. Supongamos ahora que  $k = 3$ , entonces tenemos la ecuación

$$-6x + 18 = 0$$

de donde obtenemos  $x = 3 \in \mathbb{R}$

Así, hemos determinado que las raíces de la ecuación ?? serán reales si

$$k \in [0, \frac{18}{5}]$$

**Ejercicio 57** Considerando el ejercicio anterior, ¿bajo qué condiciones las raíces serán positivas?

**Solución:** Del teorema anterior es claro que si  $x_1$  y  $x_2$  son las raíces reales de la ecuación 1.48 se tiene que

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \wedge \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Luego las raíces serán positivas si

$$x_1 + x_2 > 0 \quad \wedge \quad x_1 x_2 > 0,$$

es decir,

$$\frac{-b}{a} > 0 \quad \wedge \quad \frac{c}{a} > 0$$

En el caso de la ecuación ?? tenemos

1. Si  $k = 3$  entonces  $x = 3 > 0$
2. Si  $k \neq 3$ , entonces las raíces serán positivas si

$$\frac{2k}{k - 3} > 0 \wedge \frac{6k}{k - 3} > 0$$

con  $k \in [0, \frac{18}{5}] - \{3\}$ . Resolviendo las inecuaciones en ?? obtenemos  $k \in [3, \frac{18}{5}]$ .

En consecuencia las raíces serán reales y positivas si

$$k \in ]3, \frac{18}{5}]$$

**Observación:** Es claro que las raíces  $x_1$  y  $x_2$  serán negativas si

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} < 0 \quad \wedge \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a} > 0$$

Por otra parte, conociendo las raíces  $x_1$  y  $x_2$ , podemos factorizar la expresión  $ax^2 + bx + c$  del siguiente modo:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a \left( x^2 - \left( \frac{-b}{a} \right) x + \frac{c}{a} \right) \\ &= a(x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2) \\ &= a(x - x_1)(x - x_2) \end{aligned}$$

Esta factorización nos facilita la resolución de inecuaciones.

**Ejemplo 58** *Resolvamos la inecuación*

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 8x + 6} > 0$$

**Solución:**

Es claro que

$$\frac{x^2 - 1}{2x^2 - 8x + 6} > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)(x-3)} > 0$$

y el conjunto restricción de la inecuación ?? es

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} - \{1, 3\}$$

Ahora resolver la inecuación ?? equivale a resolver

$$\frac{x+1}{2(x-3)} > 0 \text{ en } \mathcal{R}_1.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{2(x-3)} > 0 &\Leftrightarrow (x+1 > 0 \wedge x-3 > 0) \vee (x+1 < 0 \wedge x-3 < 0) \\ &\Leftrightarrow x > 3 \vee x < -1 \\ &\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -1[ \cup ]3, \infty[ \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación ?? es

$$\begin{aligned} S &= (]-\infty, -1[ \cup ]3, \infty[) \cap \mathcal{R}_1 \\ &= \mathbb{R} - [-1, 3] \end{aligned}$$

En muchas ocasiones, para resolver una inecuación, no es necesario analizar todos los factores involucrados, sino una inecuación equivalente más simple.

**Ejemplo 59** *Resolvamos la inecuación*

$$\frac{(x^2 + 1)\sqrt{x-1}}{x^2 - 7x + 10} \leq 0$$

**Solución:**

Las raíces de la ecuación  $x^2 - 7x + 10 = 0$  son  $x_1 = 2$  y  $x_2 = 5$ , luego,

$$\frac{(x^2 + 1)\sqrt{x-1}}{x^2 - 7x + 10} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{(x^2 + 1)\sqrt{x-1}}{(x-2)(x-5)} \leq 0$$

El conjunto sobre el cual tiene significado resolver la inecuación en  $\mathbb{R}$  es

$$\mathcal{R}_1 = \{x \in \mathbb{R} : x - 1 \geq 0 \wedge x - 2 \neq 0 \wedge x - 5 \neq 0\},$$

es decir, el conjunto restricción es

$$\mathcal{R}_1 = [1, \infty[ - \{2, 5\}$$

Puesto que, para todo  $x \in \mathcal{R}_1$ , se tiene

$$\sqrt{x-1} \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + 1 > 0$$

entonces nos queda por resolver:

$$(x-2)(x-5) < 0 \text{ sobre } \mathcal{R}_1$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned} (x-2)(x-5) < 0 &\Leftrightarrow (x-2 > 0 \wedge x-5 < 0) \vee (x-2 < 0 \wedge x-5 > 0) \\ &\Leftrightarrow (x > 2 \wedge x < 5) \vee (x < 2 \wedge x > 5) \\ &\Leftrightarrow x \in ]2, 5[ \end{aligned}$$

pero 1 es también una solución.

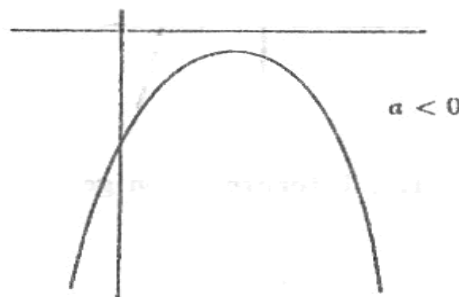
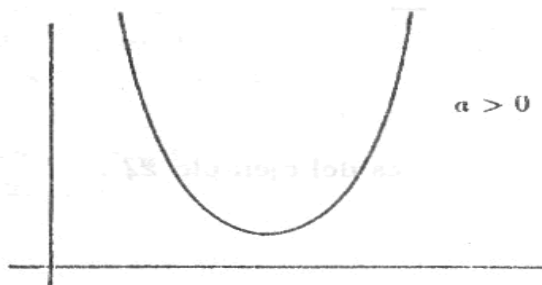
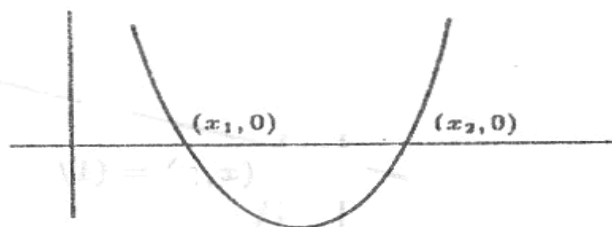
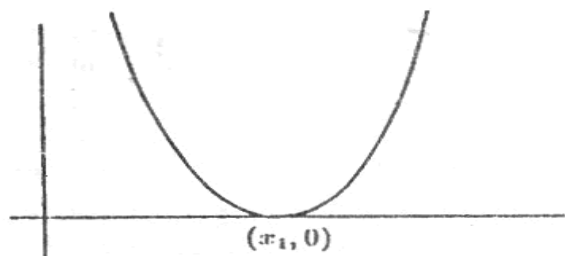
En consecuencia el conjunto solución es

$$S = (]2, 5[ \cup \{1\}) \cap \mathcal{R}_1 = ]2, 5[ \cup \{1\}$$

Geométricamente (ver figuras) una raíz o solución de una ecuación de segundo grado 1.48 corresponde a la intersección de la parábola

$$y = ax^2 + bx + c$$

y el eje de las abscisas (o eje  $x$ ). Así, la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  corta al eje de las abscisas en dos puntos  $(x_1, 0)$  y  $(x_2, 0)$  si y sólo si la ecuación 1.48 tiene dos raíces reales  $x_1$  y  $x_2$ .



La parábola tocará al eje de las abscisas en solo un punto  $(x_1, 0)$  si y sólo si la ecuación 1.48 tiene sólo una solución real  $x_1$ .

La parábola  $y = ax^2 + bx + c$  no corta al eje de las abscisas si y sólo si la ecuación 1.48 no tiene raíces reales. En este último caso observemos que:

Si  $a > 0$ ,  $ax^2 + bx + c > 0 \forall x \in \mathbb{R}$  o bien, si  $a < 0$ ,  $ax^2 + bx + c < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ <sup>17</sup>.

De lo anterior es claro que

$$x^2 + 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

pues  $\Delta = 2^2 - 4 \cdot 3 = -8 < 0$  y  $c = 3 > 0$ .

Esto resulta ventajoso para resolver inecuaciones tales como

$$(x^2 + 2x + 3)(\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1) > 0$$

ya que esto equivale a resolver

$$\sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1 > 0 \tag{1.50}$$

Puesto que

$$x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

entonces el conjunto restricción de la inecuación 1.50 es  $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}$ . Por otra parte,

$$\begin{aligned} & \sqrt{x^2 + 2x + 1} - 1 > 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{x^2 + 2x + 1} > 1 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2x + 1 > 1 \\ \Leftrightarrow & x^2 + 2x > 0 \\ \Leftrightarrow & x(x + 2) > 0 \\ \Leftrightarrow & (x > 0 \wedge x + 2 > 0) \vee (x < 0 \wedge x + 2 < 0) \\ \Leftrightarrow & (x > 0 \wedge x > -2) \vee (x < 0 \wedge x < -2) \\ \Leftrightarrow & x > 0 \vee x < -2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución de la inecuación es

$$S = ]-\infty, -2[ \cup ]0, \infty[ \cap \mathcal{R}_1 = \mathbb{R} - [-2, 0]$$

**Ejercicio 60** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{1-x} < x \text{ es } ]0, 1]$$

2. El conjunto solución de

$$x > \sqrt{-x-1} \text{ es } \phi$$

3.  $\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \leq 0\} = \phi$

**Solución:**

1. Falso. Resolvamos  $\sqrt{1-x} < x$

La expresión  $\sqrt{1-x}$  está definida en  $\mathbb{R}$  si  $1-x \geq 0$  por lo tanto el conjunto restricción de la inecuación es  $\mathcal{R}_1 = ]-\infty, 1]$ . Como  $\sqrt{1-x} \geq 0$  en  $\mathcal{R}_1$ , entonces la inecuación podría tener solución no vacía

<sup>17</sup>También se puede afirmar lo mismo con el signo de  $c$ .

sólo si  $x > 0$ , en cuyo caso podemos elevar al cuadrado en  $\mathcal{R}_2 = ]0, 1]$ .

Así

$$\begin{aligned} & \sqrt{1-x} < x \quad /()^2 \\ \iff & 1-x < x^2 \\ \iff & x^2 + x - 1 > 0 \end{aligned} \tag{1.51}$$

Como el discriminante de la ecuación asociada a  $x^2 + x - 1 = 0$  es  $\Delta = 5 > 0$  entonces la expresión  $x^2 + x - 1$  se puede factorizar como;

$$x^2 + x - 1 = \left( x - \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right) \left( x - \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right).$$

Luego, resolver 1.51 equivale a resolver en  $\mathcal{R}_2$  la inecuación

$$\left( x - \left( \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right) \right) \left( x - \left( \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right) \right) > 0$$

de donde obtenemos

$$\begin{aligned} S &= \left( \left[ -\infty, \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \right] \cup \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, \infty \right] \right) \cap ]0, 1] \\ &= \left[ \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1 \right] \end{aligned}$$

2. Verdadero. La expresión  $\sqrt{-x-1}$  está definida en  $\mathbb{R}$  si  $-x-1 \geq 0$ , es decir, si  $x \leq -1$  luego  $\mathcal{R} = ]-\infty, -1]$ . Pero  $\sqrt{-x-1} \geq 0$  en  $\mathcal{R}$ , por lo tanto la inecuación  $x > \sqrt{-x-1}$  podría tener solución no vacía sólo si  $x \geq 0$ ; pero  $x \not\geq 0$ , por lo tanto  $S = \phi$ .

Nota: Un error típico en la resolución de las inecuaciones anteriores es elevar al cuadrado sin hacer la restricción.

3. Falso. Existe  $x = 2 \in \mathbb{R}$  que satisface la inecuación, luego  $S \neq \phi$ .

Nota:

Otra forma de justificar es resolviendo la inecuación

Resolvamos

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}} \leq 0 \tag{1.52}$$

La expresión  $\frac{x^2 - 4x + 4}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}}$  que equivale a  $\frac{(x-2)^2}{\sqrt{(x-1)(x+5)}}$  está definida en  $\mathbb{R}$

si  $x \in \mathcal{R} = ]-\infty, 5[ \cup ]1, \infty[$ .

Como  $(x-2)^2 \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  y  $\sqrt{(x-1)(x+5)} > 0$  en  $\mathcal{R}$  entonces

$$\frac{(x-2)^2}{\sqrt{(x-1)(x+5)}} \leq 0 \text{ en } \mathcal{R}$$

por consiguiente la inecuación 1.52 tendrá solución sólo para aquellos  $x$  en  $\mathcal{R}$  que cumplan

$$\frac{(x-2)^2}{\sqrt{(x-1)(x+5)}} = 0$$

es decir,

$$S = \{2\}$$

(Por supuesto, si  $S$  hubiera tenido más elementos, cualesquiera de ellos habría bastado para demostrar la falsedad del enunciado 3).

### 1.3.6 Valor absoluto

Recordemos que cuando estudiamos la raíz par 1.20 obtuvimos

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Esto nos sugiere la siguiente definición.

**Definición 1.22** Sea  $x \in \mathbb{R}$ . Se define el valor absoluto de  $x$  como;

$$|x| = \begin{cases} x & , \text{ si } x \geq 0 \\ -x & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

En consecuencia

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Así, por ejemplo, en la inecuación 1.50 tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 + 2x + 1} > 1 &\Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2} > 1 \\ &\Leftrightarrow |x+1| > 1 \end{aligned} \tag{1.53}$$

Veremos que resolver

$$|x+1| > 1$$

resulta más simple que en 1.50. Pero antes determinaremos algunas propiedades básicas del valor absoluto.

Es claro de la definición de valor absoluto que

$$|a| \geq 0, \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

**Proposición 1.23** Sea  $a, b \in \mathbb{R}$  entonces:

- i)  $|a| = b \Leftrightarrow a = b \vee a = -b, \quad b \in \mathbb{R}_0^+$
- ii)  $|a| = |-a|$
- iii)  $|ab| = |a| |b|$
- iv)  $|a|^2 = a^2$
- v)  $-|a| \leq a \leq |a|$

Usando las propiedades mencionadas probemos que

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b \quad a \in \mathbb{R} \quad b \in \mathbb{R}$$

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $|a| \leq b$  y demostraremos que  $-b \leq a \leq b$ .

Como  $a \leq |a|$  y  $|a| \leq b$  entonces por transitividad

$$a \leq b \tag{1.54}$$

Además,

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq -|a|$$

pero

$$-|a| \leq a$$

luego, por transitividad nuevamente,

$$-b \leq a \tag{1.55}$$

luego por 1.54 y 1.55 tenemos que

$$-b \leq a \leq b$$

( $\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que

$$-b \leq a \leq b,$$

es decir,

$$-b \leq a \quad \wedge \quad a \leq b$$

Probaremos que

$$|a| \leq b$$

La demostración se hará por casos <sup>18</sup>.

**Caso 1:** Si  $a \geq 0$ , entonces  $|a| = a$ , además por hipótesis  $a \leq b$  luego

$$|a| \leq b$$

**Caso 2:** Si  $a < 0$ , entonces  $|a| = -a$ , es decir,

$$|a| = -a$$

y por hipótesis  $-b \leq a$  luego

$$-b \leq -|a|$$

de donde

$$|a| \leq b$$

En consecuencia

$$|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$$

Usando la equivalencia

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

se obtiene

$$a > b \vee a < -b \Rightarrow |a| > b,$$

que puede ser extendida a

$$|a| \geq b \Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b$$

Así, hemos probado los siguientes importantes resultados:

**Teorema 1.24** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} |a| \leq b &\Leftrightarrow -b \leq a \leq b \\ |a| \geq b &\Leftrightarrow a \geq b \vee a \leq -b \end{aligned}$$

(Recuerde que, según se advirtió antes, en el teorema anterior, el signo  $\leq$  puede ser cambiado por  $<$ .)

**Observación:** Notemos que si  $b < 0$  entonces la proposición, para todo  $a$  en los  $\mathbb{R}$   $|a| < b$  es falsa, y la proposición para todo  $a \in \mathbb{R}$   $|a| > b$  es verdadera. Así por ejemplo la solución de la inecuación  $|x| < -1$  es vacía y la solución de  $|x| > -1$  es  $\mathbb{R}$ .

Volviendo a la inecuación 1.53 resolvamos

$$|x+1| > 1$$

Aplicando la propiedad anterior tenemos que

$$\begin{aligned} |x+1| > 1 &\Leftrightarrow x+1 > 1 \vee x+1 < -1 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \vee x < -2 \\ &\Leftrightarrow x \in ]-\infty, -2[ \cup ]0, \infty[ \\ &\Leftrightarrow x \in \mathbb{R} - [-2, 0] \end{aligned}$$

---

<sup>18</sup>Las propiedades i) a v) anteriormente enunciadas pueden ser probadas con la misma técnica que los casos aquí desarrollados.



luego la solución es

$$S = \mathbb{R} - [-2, 0]$$

Sin embargo, la solución de la inecuación

$$|x + 1| < 1$$

es

$$S = ] - 2, 0[$$

En efecto,

$$\begin{aligned} |x + 1| < 1 &\Leftrightarrow -1 < x + 1 < 1 \\ &\Leftrightarrow -2 < x < 0 \end{aligned}$$

**Ejercicio 61** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1.  $\{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x-1|}\} = \{x \in \mathbb{R} : 1 > |x-1|\}$
2.  $\{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{|x|}\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{x}\}$
3.  $\{x \in \mathbb{R}^+ : ||x| - 1| \leq 1\} = [-2, 2]$
4. La solución de  $\sqrt{(x-1)^3} \leq |x-1|$  es  $[1, 2]$ .

**Solución:**

1. Falso. Existe  $x = 1 \in \mathbb{R}$  tal que  $1 > |x-1|$  pero

$$1 \notin \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{|x-1|} > 1\}$$

pues la expresión  $\frac{1}{|x-1|}$  no está definida en  $\mathbb{R}$ .

2. Falso. Existe  $x = -1 \in \mathbb{R}$  tal que  $x \leq \sqrt{|x|}$  sin embargo;  $\sqrt{x}$  no está definida para  $x = -1$ .
3. Falso.

$$\begin{aligned} ||x| - 1| \leq 1 &\Leftrightarrow -1 \leq |x| - 1 \leq 1 / + 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq |x| \wedge |x| \leq 2 \\ &\Leftrightarrow \forall \wedge -2 \leq x \leq 2 \\ &\Leftrightarrow x \in [-2, 2] \end{aligned}$$

Luego  $\{x \in \mathbb{R}^+ : ||x| - 1| \leq 1\} = \mathbb{R}^+ \cap [-2, 2] = ]0, 2]$ .

4. Verdadero. Restricción  $\mathcal{R} = [1, \infty[$ ; además,

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^3} \leq |x-1| &\Leftrightarrow |x-1|\sqrt{x-1} \leq |x-1| \\ &\Leftrightarrow |x-1|(\sqrt{x-1} - 1) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee \sqrt{x-1} - 1 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee \sqrt{x-1} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x - 1 \leq 1 \\ &\Leftrightarrow x = 1 \vee x \leq 2 \end{aligned}$$

pero  $x \geq 1$  luego  $S = [1, 2]$ .

**Ejercicio 62** *Resolver*

$$\frac{1 + |2x - 3|}{|x + 5|} < 1 \quad (1.56)$$

**Solución:** La expresión  $\frac{1+|2x-3|}{|x+5|}$  está definida en  $\mathbb{R}$ , si  $|x + 5| \neq 0$ , es decir

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{R} - \{-5\}$$

$$\frac{1 + |2x - 3|}{|x + 5|} < 1 \Leftrightarrow 1 + |2x - 3| < |x + 5|$$

Analicemos dónde los factores  $2x - 3$  y  $x + 5$  son positivos y dónde negativos, para luego usar la definición de valor absoluto.

Para el término  $2x - 3$  se tiene que;

$$2x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow |2x - 3| = 2x - 3$$

y

$$2x - 3 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow |2x - 3| = -(2x - 3)$$

Análogamente, para el factor  $x + 5$  se tiene que

$$x + 5 \geq 0 \Leftrightarrow |x + 5| = x + 5 \Leftrightarrow x \geq -5$$

y

$$x + 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -5 \Leftrightarrow |x + 5| = -(x + 5)$$

Resumiremos toda la información anterior en la tabla siguiente<sup>19</sup>

|          |                  |                      |                         |
|----------|------------------|----------------------|-------------------------|
|          | $] -\infty, -5[$ | $] -5, \frac{3}{2}[$ | $[\frac{3}{2}, \infty[$ |
| $2x - 3$ | -                | -                    | +                       |
| $x + 5$  | -                | +                    | +                       |

Luego según las distintas posibilidades de signos para los términos  $2x - 3$  y  $x + 5$  y considerando la restricción  $\mathcal{R}_1$  debemos analizar tres casos:

1.  $x \in ] -\infty, -5] \cap \mathcal{R}_1$
2.  $x \in ] -5, \frac{3}{2}] \cap \mathcal{R}_1$
3.  $x \in [\frac{3}{2}, \infty] \cap \mathcal{R}_1$

**Caso 1:**

Si  $x \in ] -\infty, -5] \cap \mathcal{R}_1 = ] -\infty, -5]$  se tiene que

$$\begin{aligned} & 1 + |2x - 3| < |x + 5| \\ \Leftrightarrow & 1 + (-(2x - 3)) < -(x + 5) \\ \Leftrightarrow & x > 9 \\ \Leftrightarrow & x \in ]9, \infty[ \end{aligned}$$

pero  $x \in ] -\infty, -5]$ , luego

$$S_1 = ] -\infty, -5] \cap ]9, \infty[ = \emptyset$$

Esto quiere decir que no existen elementos en  $] -\infty, -5]$  que cumplan con la inecuación 1.56

<sup>19</sup> Aquí no tomamos los valores extremos  $-5$  y  $\frac{3}{2}$ , usted debe completar esta falta, lo hemos hecho más adelante, pero no es la única forma.

**Caso 2:**

Si  $x \in ]-5, \frac{3}{2}] \cap \mathcal{R}_1 = ]-5, \frac{3}{2}]$  se tiene que

$$\begin{aligned} & 1 + |2x - 3| < |x + 5| \\ \Leftrightarrow & 1 + (-(2x - 3)) < x + 5 \\ \Leftrightarrow & x > \frac{-1}{3} \\ \Leftrightarrow & x \in ]\frac{-1}{3}, \infty[ \end{aligned}$$

pero  $x \in ]-5, \frac{3}{2}]$  luego

$$S_2 = ]-5, \frac{3}{2}] \cap ]\frac{-1}{3}, \infty[ = ]\frac{-1}{3}, \frac{3}{2}],$$

Es decir, que cualquier  $x \in ]\frac{-1}{3}, \frac{3}{2}]$  cumple con la inecuación 1.56.

**Caso 3:**

Si  $x \in ]\frac{3}{2}, \infty[ \cap \mathcal{R}_1 = ]\frac{3}{2}, \infty[$  se tiene que

$$\begin{aligned} & 1 + |2x - 3| < |x + 5| \\ \Leftrightarrow & 1 + (2x - 3) < x + 5 \\ \Leftrightarrow & x < 7 \\ \Leftrightarrow & x \in ]-\infty, 7[ \end{aligned}$$

pero  $x \in ]\frac{3}{2}, \infty[$  luego

$$S_3 = ]\frac{3}{2}, \infty[ \cap ]-\infty, 7[ = ]\frac{3}{2}, 7[$$

Es decir, que cualquier  $x \in ]\frac{3}{2}, 7[$  cumple con la inecuación 1.56.

En consecuencia, el conjunto solución de la inecuación 1.56 es

$$S_T = S_1 \cup S_2 \cup S_3 = ]\frac{-1}{3}, 7[.$$

**Ejercicio 63 Resolver**

$$|x - 3| \leq \sqrt{x^2 - 1} \quad (1.57)$$

**Solución:** En primer lugar consideremos la restricción

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2 &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1 \vee x \leq -1\} \\ &= ]-\infty, -1] \cup [1, \infty[ \\ &= \mathbb{R} - ]-1, 1[ \end{aligned}$$

Ahora elevando al cuadrado 1.57, en  $\mathcal{R}_2$  se tiene

$$\begin{aligned} & |x - 3|^2 \leq x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow & x^2 - 6x + 9 \leq x^2 - 1 \\ \Leftrightarrow & -6x \leq -10 \\ \Leftrightarrow & x \geq \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$S_T = (\mathbb{R} - ]-1, 1[) \cap [\frac{5}{3}, \infty[ = [\frac{5}{3}, \infty[.$$

**Ejercicio 64** *Resolver*

$$\frac{x^2 + x + 8}{1 - \sqrt{|x| - 3}} \geq 0 \quad (1.58)$$

**Solución:**  $\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 3 \geq 0 \wedge 1 - \sqrt{|x| - 3} \neq 0\}$ .

Ahora bien,

$$\begin{aligned} |x| - 3 \geq 0 &\iff |x| \geq 3 \\ &\iff x \geq 3 \vee x \leq -3 \\ &\iff x \in ]-\infty, -3] \cup [3, \infty[ \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{|x| - 3} = 0 &\iff \sqrt{|x| - 3} = 1 \\ &\iff |x| - 3 = 1 \\ &\iff |x| = 4 \\ &\iff x = 4 \vee x = -4 \end{aligned}$$

Luego el conjunto restricción de la inecuación 1.58 es

$$\mathcal{R} = (]-\infty, -3] \cup [3, \infty[) - \{-4, 4\}$$

Por otra parte, el discriminante de la ecuación de segundo grado

$$x^2 + x + 8 = 0$$

es  $\Delta = 1 - 32 < 0$  y como  $c = 8 > 0$  entonces

$$x^2 + x + 8 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En consecuencia, resolver la inecuación  $\frac{x^2+x+8}{1-\sqrt{|x|-3}} \geq 0$  equivale a resolver la inecuación

$$1 - \sqrt{|x| - 3} > 0$$

Resolvamos

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{|x| - 3} > 0 &\iff \sqrt{|x| - 3} < 1 \\ &\iff |x| - 3 < 1 \\ &\iff |x| < 4 \\ &\iff -4 < x < 4 \\ &\iff x \in ]-4, 4[ \end{aligned}$$

como  $x \in \mathcal{R}$ , luego el conjunto solución de la inecuación 1.58 es:

$$S = ]-4, -3] \cup [3, 4[$$

**Ejercicio 65** *Resolver*

$$\frac{1 - \sqrt{16 - x^2}}{x - 1} < 3 \quad (1.59)$$

**Solución:**

El conjunto restricción es

$$\mathcal{R} = \{x \in \mathbb{R} : 16 - x^2 \geq 0 \wedge x - 1 \neq 0\} = [-4, 4] - \{1\}$$

Analicemos los casos:  $x > 1$  y  $x < 1$  con  $x \in \mathcal{R}$ .

i) Supongamos que  $x > 1$  con  $x \in \mathcal{R}$

Entonces, dado que  $x - 1 > 0$  se tiene que 1.59 equivale a

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{16 - x^2} &< 3(x - 1) \\ 4 - 3x &< \sqrt{16 - x^2} \end{aligned} \quad (1.60)$$

ii) Consideremos los reales tales que  $4 - 3x \geq 0$  y  $1 < x \leq 4$  es decir,  $x \in ]1, 4/3] = C_1$ .

En este conjunto podemos elevar al cuadrado, obteniendo

$$\begin{aligned} (4 - 3x)^2 &< 16 - x^2 \\ \iff 16 - 24x + 9x^2 &< 16 - x^2 \\ \iff 10x^2 - 24x &< 0 \\ \iff 2x(5x - 12) &< 0 \end{aligned}$$

pero  $x \in C_1$  luego  $x < 12/5$ .

Por lo tanto,

$$x \in ]1, 4/3] \cap ]-\infty, 12/5[ = ]1, 4/3]$$

ii) Ahora consideremos los reales tales que

$$4 - 3x < 0 \text{ y } x \in ]1, 4]$$

es decir,  $x \in ]4/3, 4] = C_2$

En este conjunto, es claro que la desigualdad 1.60 se cumple para todo  $x \in C_2$ .

Luego

$$S_i = S_{i1} \cup S_{i2} = ]1, 4/3] \cup ]4/3, 4] = ]1, 4]$$

ii) Supongamos  $x < 1$  con  $x \in \mathcal{R}$ , es decir,  $x \in [-4, 1[$  entonces, dado que  $x < 1$  se tiene que 1.59 es equivalente a

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{16 - x^2} &> 3(x - 1) \\ \iff 4 - 3x &> \sqrt{16 - x^2} \end{aligned}$$

Dado que  $x \in [-4, 1[$  entonces  $4 - 3x > 0$ . y podemos elevar el cuadrado, obteniendos.

$$\begin{aligned} (4 - 3x)^2 &> 16 - x^2 \\ \iff 2x(5x - 12) &> 0 \end{aligned}$$

de donde  $x \in (]-\infty, 0[ \cup ]12/5, \infty[) \cap [-4, 1[$

Luego

$$S_{ii} = [-4, 0[$$

Así la solución es

$$S_T = S_i \cup S_{ii} = [-4, 0[ \cup ]1, 4]$$

**Ejercicio 66** Resolver

$$\frac{\sqrt{4x+1} - \sqrt{x+6}}{\sqrt{x-1}} < 1 \quad (1.61)$$

**Solución:** Determinemos el conjunto restricción

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \{x \in \mathbb{R} : 4x + 1 \geq 0 \wedge x + 6 \geq 0 \wedge x - 1 > 0\} \\ &= [-1/4, \infty[ \cap [-6, \infty[ \cap ]1, \infty[ \\ &= ]1, \infty[\end{aligned}$$

Como  $\sqrt{x-1} > 0$  entonces 1.61 es equivalente a

$$\begin{aligned}\sqrt{4x-1} - \sqrt{x+6} &< \sqrt{x-1} \\ \iff \sqrt{4x-1} &< \sqrt{x-1} + \sqrt{x+6}\end{aligned}\tag{1.62}$$

Como ambos miembros de la inecuación 1.62 son no negativos, podemos elevar al cuadrado, obteniendo

$$\begin{aligned}4x + 1 &< x + 6 + 2\sqrt{(x+6)(x-1)} + x - 1 \\ \iff 2x - 4 &< 2\sqrt{(x+6)(x-1)} \\ \iff x - 2 &< \sqrt{(x+6)(x-1)}\end{aligned}\tag{1.63}$$

Ahora analicemos los casos  $x - 2 \geq 0$  y  $x - 2 < 0$  considerando  $x \in \mathcal{R} = ]1, \infty[$ .

**Caso 1** Si  $x - 2 \geq 0$  y  $x \in ]1, \infty[$  entonces  $x \in C_1 = [2, \infty[$ .

Es claro que si  $x \in C_1$  entonces podemos elevar al cuadrado la inecuación 1.62 obteniendo

$$\begin{aligned}(x - 2)^2 &< (x + 6)(x - 1) \\ \iff x^2 - 4x + 4 &< x^2 + 5x - 6 \\ \iff 9x - 10 &> 0 \\ \iff x &> 10/9\end{aligned}$$

luego  $S_1 = ]10/9, \infty[ \cap [2, \infty[ = ]1, \infty[$

**Caso 2** Si  $x - 2 < 0$  y  $x \in ]1, \infty[$  entonces  $x \in ]1, 2[ = C_2$ .

Luego, dado que  $x - 2 < 0$  y  $\sqrt{(x+6)(x-1)} > 0$ , para  $x \in C_2$  entonces la desigualdad 1.62 se cumple para todo  $x \in C_2$

$$S_2 = ]1, 2[$$

$$S_T = S_1 \cup S_2 = [2, \infty[ \cup ]1, 2[ = ]1, \infty[$$

Una propiedad muy usada para **acotar**<sup>20</sup> expresiones reales es la **desigualdad triangular**

**Teorema 1.25 (Desigualdad Triangular)** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

**Demostración:** Como  $|a + b| \geq 0$ ,  $|a| \geq 0$ ,  $|b| \geq 0$ , se tiene

$$|a + b| \leq |a| + |b| \iff (|a + b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

Luego basta demostrar que

$$(|a + b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

---

<sup>20</sup>Entenderemos por “acotar superiormente” una expresión, el encontrar un número o una expresión real mayor o igual a la dada. Análogamente se define “acotar inferiormente”(ver definición 1.27 más adelante)

pero

$$\begin{aligned}
 (|a+b|)^2 &= (a+b)^2 \\
 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
 &= |a|^2 + 2ab + |b|^2 \\
 &\leq |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 \\
 &= |a|^2 + 2|a||b| + |b|^2 \\
 &= (|a| + |b|)^2
 \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(|a+b|)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

□

Observemos que, según el teorema anterior

$$\frac{1}{|a|+|b|} \leq \frac{1}{|a+b|} \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, a+b \neq 0$$

De la desigualdad triangular se deduce además la siguiente propiedad

**Corolario 1.26** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

En efecto,

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b|$$

luego

$$|a| - |b| \leq |a - b|$$

En base a esta propiedad podemos demostrar implicaciones tales como la siguiente:

$$|x + \frac{1}{3}| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{|2x-1|} < \frac{15}{22}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}
 |x + \frac{1}{3}| < \frac{1}{10} &\Leftrightarrow 2|x + \frac{1}{3}| < \frac{1}{5} \\
 &\Leftrightarrow |2x + \frac{2}{3}| < \frac{1}{5} \\
 &\Leftrightarrow |2x - 1 + 1 + \frac{2}{3}| < \frac{1}{5} \\
 &\Leftrightarrow |\frac{5}{3} + 2x - 1| < \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

pero, por corolario anterior, se tiene que

$$|\frac{5}{3}| - |2x - 1| < |\frac{5}{3} + (2x - 1)|$$

lo que implica que

$$\frac{5}{3} - |2x - 1| < \frac{1}{5}$$

es decir,

$$-|2x - 1| < \frac{1}{5} - \frac{5}{3}$$

lo que equivale a

$$|2x - 1| > \frac{22}{15}$$

y finalmente obtenemos lo buscado

$$\frac{1}{|2x-1|} < \frac{15}{22}$$

cuando  $x \neq \frac{1}{2}$ . En consecuencia

$$|x + \frac{1}{3}| < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{|2x-1|} < \frac{15}{22}$$

Observemos que esta implicación también puede probarse usando el teorema 1.24 de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} |x + \frac{1}{3}| < \frac{1}{10} &\Leftrightarrow \frac{-1}{10} < x + \frac{1}{3} < \frac{1}{10} \quad / + (-\frac{1}{3}) \\ &\Leftrightarrow \frac{-1}{10} - \frac{1}{3} < x < \frac{1}{10} - \frac{1}{3} \\ &\Leftrightarrow \frac{-13}{30} < x < \frac{-7}{30} \\ &\Leftrightarrow \frac{-13}{15} < 2x < \frac{-7}{15} \\ &\Leftrightarrow \frac{-28}{15} < 2x - 1 < \frac{-22}{15} \\ &\Leftrightarrow \frac{28}{15} > -(2x - 1) > \frac{22}{15} \\ &\Rightarrow \frac{28}{15} > |2x - 1| > \frac{22}{15} \\ &\Leftrightarrow \frac{15}{28} < \frac{1}{|2x - 1|} < \frac{15}{22} \\ &\Rightarrow \frac{1}{|2x - 1|} < \frac{15}{22} \end{aligned}$$

**Ejemplo 67** <sup>21</sup> Usando las propiedades mencionadas probemos que las siguientes desigualdades son verdaderas para los números reales  $x$  e  $y$  indicados.

1.  $|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2}, \forall x, y \in \mathbb{R}$
2.  $|xy| \leq x^2 + y^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
3.  $\frac{\sqrt{x^2|y|}}{|x|+|y|} \leq \sqrt{|y|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$
4.  $\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$
5.  $\frac{\sqrt{x^4+2x^3y+x^2y^2}}{|x|+|y|} \leq |x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$
6.  $\frac{|yx-y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq |y|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x, y) \neq (1, 0).$

*Solución:*

1.

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2},$$

*Note: De lo anterior es claro que*

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{1}{|x|}$$

---

<sup>21</sup>En el curso de cálculo en varias variables veremos que las propiedades y desigualdades anteriores son muy útiles en el cálculo de límites.



2. Para todo  $x, y$  en  $\mathbb{R}$  se tiene

$$|x| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

luego

$$|xy| = |x||y| \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 + y^2.$$

Observe que no es cierto  $|xy| \leq (x + y)^2$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$

3.

$$\frac{\sqrt{x^2} |y|}{|x| + |y|} = \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{|y|}}{|x| + |y|} = \frac{|x| \sqrt{|y|}}{|x| + |y|} \leq \frac{|x| \sqrt{|y|}}{|x|} = \sqrt{|y|}$$

Note

$$|x| + |y| \geq |x|, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

y de esto se obtiene la siguiente desigualdad muy utilizada

$$\frac{1}{|x| + |y|} \leq \frac{1}{|x|}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

4.

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{|xy|}{|y|} = \frac{|x| |y|}{|y|} = |x|$$

5.

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^4 + 2x^3y + x^2y^2}}{|x| + |y|} &= \frac{\sqrt{x^2(x^2 + 2xy + y^2)}}{|x| + |y|} \\ &= \frac{|x| \sqrt{(x+y)^2}}{|x| + |y|} \end{aligned} \tag{1.64}$$

Analizamos los siguientes casos

(a) Supongamos que  $x + y \neq 0$ . Entonces por la desigualdad triangular es claro que

$$\frac{1}{|x| + |y|} \leq \frac{1}{|x + y|}$$

además,

$$\sqrt{(x + y)^2} = |x + y|$$

luego,

$$\frac{|x| \sqrt{(x+y)^2}}{|x| + |y|} \leq \frac{|x| |x + y|}{|x + y|} = |x|$$

(b) Si  $x + y = 0$  con  $x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$ . Entonces es claro por 1.64 que

$$\frac{\sqrt{x^4 + 2x^3y + x^2y^2}}{|x| + |y|} = 0$$

y

$$0 \leq |x|$$

Así, de a) y b) se tiene la desigualdad pedida

6. (a) Supongamos que  $x \neq 1$

$$\frac{|yx - y|}{\sqrt{(x-1)^2 + y^2}} \leq \frac{|yx - y|}{\sqrt{(x-1)^2}} = \frac{|y| |x-1|}{|x-1|} = |y|$$

(b) Si  $x = 1, y \neq 0$ , se tiene la desigualdad que equivale a  $0 \leq |y|$ , la cual es verdadera.

Por lo tanto de (a) y (b) se tiene la desigualdad.

Algunos de los errores más frecuentes que se cometen al acotar expresiones reales por otras consisten en utilizar desigualdades que no se cumplen en los conjuntos dados. Por ejemplo, la proposición

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|} \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

no es verdadera, es decir,

$$\frac{|xy|}{|x|+|y|} \text{ no acota superiormente a } \frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|} \text{ según veremos a continuación}$$

Notemos que

$$\frac{\sqrt{|xy|}}{|x|+|y|} \leq \frac{|xy|}{|x|+|y|} \Leftrightarrow \sqrt{|xy|} \leq |xy|$$

Sin embargo

$$\sqrt{|xy|} \leq |xy|$$

sólo se cumple si  $|xy| \geq 1$  o  $|xy| = 0$ .

Análogamente no es cierto que

$$\frac{y^2}{|x|\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Es claro que esta desigualdad equivale a

$$\frac{1}{|x|} \leq 1 \quad \text{con } x \neq 0$$

y esto se cumple si y sólo si  $|x| \geq 1$ , es decir,  $x \geq 1 \vee x \leq -1$

## 1.4 Axioma del Supremo

Finalmente presentaremos el último axioma de los números reales, axioma que nos permite decir que los números reales completan todos los espacios en una recta si son representados en tal forma.

En primer lugar veamos qué entendemos por un conjunto acotado.

**Definición 1.27** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Diremos que

i)  $r$  es una **Cota Superior** de  $A$  si y sólo si:

$$a \leq r, \quad \forall a \in A$$

es decir,  $r$  es cota superior de  $A$  si  $r$  es mayor o igual que cualquier elemento de  $A$ .

ii)  $r$  es una **Cota Inferior** de  $A$  si sólo si:

$$a \geq r, \quad \forall a \in A$$

es decir,  $r$  es menor o igual que cualquier elemento de  $A$ .

Si existe cota superior (inferior) para un conjunto  $A$ , se dice que  $A$  es acotado superiormente (inferiormente)

Si  $A$  es acotado superior e inferiormente se dice que  $A$  es **acotado**.

Si  $A = \emptyset$  diremos que  $A$  es acotado. (Lo cual puede ser demostrado)

**Ejemplo 68**  $A = ] - \infty, 5]$  es acotado superiormente, pues;

Existe  $r = 5 \in \mathbb{R}$  tal que  $a \leq 5$  para todo  $a \in A$ , pero no es acotado inferiormente, pues no existe  $r \in \mathbb{R}$  tal que, para todo  $a \in A$ ,  $r \leq a$

Observemos que cualquier  $r \in [5, \infty[$  es una cota superior para  $A$ . Luego el **conjunto de cotas superiores** de  $A$  es  $[5, \infty[$ .

En cambio  $B = ] - 2, \infty[$  es acotado inferiormente pero no acotado superiormente. El **conjunto de cotas inferiores** de  $B$  es el conjunto  $] - \infty, -2]$ .

De lo anterior, es claro que el conjunto  $C = [-2, 5]$  es acotado

Asimismo, el conjunto

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 < 12\}$$

es acotado puesto que

$$x^2 < 12 \Leftrightarrow |x| < \sqrt{12} \Leftrightarrow -\sqrt{12} < x < \sqrt{12},$$

es decir,

$$D = ] - \sqrt{12}, \sqrt{12}[$$

donde  $] - \infty, -\sqrt{12}]$  es el conjunto de cotas inferiores y el conjunto  $[\sqrt{12}, \infty[$  es el conjunto de cotas superiores. Sin embargo el conjunto;

$$E = \{x \in \mathbb{Z} : x^2 < 12\}$$

no tiene los mismos conjuntos de cotas superiores e inferiores que  $D$ , en efecto,

$$E = \mathbb{Z} \cap ] - \sqrt{12}, \sqrt{12}[ = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

luego  $E$  también es acotado pero el conjunto de cotas superiores de  $E$  es  $] - \infty, -3]$  y el de cotas superiores de  $E$  es  $[3, \infty[$ .

**Ejercicio 69** Sean

$$A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{1+|2x-3|}{|x+5|} < 1\right\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \leq \sqrt{x^2-1}\}$$

Determine si los conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \cup B$  son acotados y encuentre, si existen, el conjunto de cotas superiores e inferiores en cada caso.

**Solución:**

En el ejercicio 62 obtuvimos que

$$A = ] \frac{-1}{3}, 7[$$

Este conjunto es acotado inferior y superiormente; así,  $A$  es un conjunto acotado.

El conjunto de cotas inferiores de  $A$  es  $] - \infty, \frac{-1}{3}]$  y el conjunto de cotas superiores es  $[7, \infty[$ .

Además en el ejercicio 63 determinamos que

$$B = [\frac{5}{3}, \infty[;$$

el cual es un conjunto acotado inferiormente, pero no es acotado superiormente, luego  $B$  no es acotado.

El conjunto de cotas inferiores de  $B$  es  $] - \infty, \frac{5}{3}]$

Como  $A = ] \frac{-1}{3}, 7[$  y  $B = [\frac{5}{3}, \infty[$ , entonces

$$A \cap B = ] \frac{5}{3}, 7]$$

y

$$A \cup B = ] - \frac{1}{3}, \infty[$$

Luego  $A \cap B$  es acotado. El conjunto de cotas superiores de  $A \cap B$  es  $[7, \infty[$  y el de cotas inferiores es  $] - \infty, \frac{5}{3}]$ . Sin embargo  $B$  no es acotado pues no es acotado superiormente. El conjunto de cotas inferiores de  $A \cup B$  es  $] - \infty, -\frac{1}{3}]$ .

**Definición 1.28** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$

i) Si  $A$  es acotado superiormente, diremos que  $L \in \mathbb{R}$  es el **Supremo** de  $A$  si y sólo si  $L$  es una cota superior de  $A$ , y, para cualquier cota superior  $x$  de  $A$  se tiene que

$$L \leq x.$$

Es decir,  $L$  es la menor de las cotas superiores de  $A$ . Se anotará

$$\sup A = L$$

ii) Si  $A$  es acotado inferiormente, diremos que  $L \in \mathbb{R}$  es el **Ínfimo** de  $A$  si y sólo si  $L$  es una cota inferior de  $A$ , y, para cualquier cota inferior  $x$  de  $A$  se tiene que

$$L \geq x.$$

Es decir,  $L$  es la mayor de las cotas inferiores de  $A$ .

Se anotará

$$\inf A = L$$

**Ejemplo 70** Como  $A = ]-\frac{1}{3}, 7[$  es un conjunto acotado, entonces existen

$$\sup A = 7, \quad \inf A = -\frac{1}{3}$$

Sin embargo;  $B = ]-\infty, \frac{5}{3}]$  no es acotado inferiormente, luego no existe  $\inf B$ , pero existe  $\sup B$  pues  $B$  es acotado superiormente,  $\sup B = \frac{5}{3}$ .

## Axioma del Supremo:

Todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado superiormente tiene supremo el cual es un elemento de  $\mathbb{R}$ .

Usando el axioma del supremo, se puede demostrar que: Todo subconjunto  $A$  de  $\mathbb{R}$  no vacío y acotado inferiormente tiene ínfimo, el cual es un elemento de  $\mathbb{R}$ .

Aunque en muchos casos no se ve claramente cuál es el supremo de un conjunto, el axioma nos asegura su existencia.

**Ejemplo 71** Consideremos  $A$  el conjunto de todas las aproximaciones decimales sucesivas e inferiores a  $\sqrt{2}$ , es decir,

$$A = \{1, 4; 1, 41; 1, 414; 1, 4142; \dots\}$$

como  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  y  $A$  es acotado superiormente (por ejemplo  $1, 5 \in \mathbb{R}$  es cota superior), entonces por axioma del supremo, existe  $\sup A$  el cual es un elemento de  $\mathbb{R}$ .

**Nota:** En el ejemplo anterior

$$\sup A = \sqrt{2}$$

**Ejemplo 72** Sea

$$A = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

Es claro que  $A \subset \mathbb{R}$  y  $A \neq \emptyset$ , además

$$\frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir,  $x < 1$  para todo  $x \in A$ . Luego  $A$  es acotado superiormente y por axioma del supremo, existe  $\sup A$ . Considerando distintos valores de  $n \in \mathbb{N}$  podemos conjeturar que:

$$\sup A = 1 \tag{1.65}$$

El hecho que  $\mathbb{R}$  satisfaga los axiomas de cuerpo, de orden y del supremo se expresa diciendo que es un **cuerpo ordenado y completo**.

**Ejercicio 73** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$  y acotado superiormente. Pruebe que  $\sup A$  es único

**Solución:** Por axioma del supremo es claro que existe  $\sup A$ . Sea  $L = \sup A$ . Supongamos que  $\sup A$  no es único, es decir, supongamos que existe  $L' \in \mathbb{R}$  tal que  $L \neq L'$  y

$$L' = \sup A$$

entonces  $L$  y  $L'$  son cotas superiores de  $A$ . Por definición de supremo tenemos que:

Si  $L = \sup A$ , entonces  $L \leq L'$ , pero si  $L' = \sup A$ , entonces  $L' \leq L$ , entonces  $L = L'$  que es una contradicción.

De forma análoga se prueba que el ínfimo de  $A$  es único si  $A$  es acotado inferiormente.

El siguiente teorema nos permite, entre otras cosas, demostrar la conjetura hecha en 1.65 del ejemplo 72

**Teorema 1.29** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $A \neq \emptyset$ ,

i) Sea  $L$  cota superior de  $A$ . Entonces

$$L = \sup A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > L - \varepsilon$$

ii) Sea  $L$  cota inferior de  $A$ . Entonces

$$L = \inf A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < L + \varepsilon$$

**Demostración:** i) ( $\Rightarrow$ ) Por demostrar que

$$L = \sup A \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x > L - \varepsilon$$

Por el método del absurdo: Supongamos que

$$(L = \sup A) \wedge (\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in A)(x \leq L - \varepsilon) \tag{1.66}$$

y obtengamos una contradicción. Por 1.66, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$x \leq L - \varepsilon, \quad \forall x \in A \tag{1.67}$$

Entonces por definición de cota  $L - \varepsilon$  es cota superior de  $A$  pero  $L = \sup A$  (la mayor de las cotas superiores), luego  $L \leq L - \varepsilon$  de donde  $\varepsilon \leq 0$ , que contradice  $\varepsilon > 0$ .

i) ( $\Leftarrow$ ) Nuevamente usamos el método del absurdo. Sea  $L$  cota superior de  $A$ . Por demostrar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > L - \varepsilon) \Rightarrow L = \sup A$$

Supongamos que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in A)(x > L - \varepsilon) \wedge L \neq \sup A$$

Si  $L \neq \sup A$ , siendo  $L$  cota superior de  $A$ , entonces  $L$  no es la menor de las cotas superiores, es decir, existe  $L'$  cota superior de  $A$  tal que

$$L' < L$$

luego existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$L' + \varepsilon = L \tag{1.68}$$

Pero, por hipótesis, existe  $x \in A$  tal que

$$x > L - \varepsilon \tag{1.69}$$

Por 1.68 y 1.69 se tiene que

$$x > L' \quad \text{con } x \in A$$

lo que es una contradicción, pues  $L'$  es cota superior de  $A$ . □

Análogamente se demuestra que si  $L$  es cota inferior de  $A$

$$L = \inf A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < L + \varepsilon$$

En base al teorema anterior, demostraremos que el conjunto de los números naturales no es acotado. Esto nos permitirá a su vez probar el importante teorema 1.31

**Proposición 1.30**  $\mathbb{N}$  no es acotado.

**Demostración:** Supongamos lo contrario, es decir, que  $\mathbb{N}$  es acotado superiormente. Entonces, por axioma del supremo existe  $\sup \mathbb{N} = L$  con  $L \in \mathbb{R}$ . Luego por el teorema 1.29 tenemos:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}, n > L - \varepsilon$$

En particular, consideremos  $\varepsilon = 1 > 0$ ; entonces existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > L - 1,$$

es decir;

$$n + 1 > L$$

pero  $n + 1 \in \mathbb{N}$ , lo que es una contradicción ya que  $L = \sup \mathbb{N}$ . □

**Teorema 1.31 (Propiedad Arquimediana.)** *Todo número real puede ser sobrepasado por un número natural. Es decir*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} : x < n \tag{1.70}$$

**Demostración:** Supongamos lo contrario esto es, asumamos que

$$\exists x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N} : x \geq n$$

Es claro que  $x$  es cota superior de  $\mathbb{N}$  (por definición de cota superior); luego  $\mathbb{N}$  es acotado superiormente, lo que es una contradicción □

**Observación:** Una versión equivalente de la propiedad Arquimediana es la siguiente proposición

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon \quad (1.71)$$

En efecto

Sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos el real  $\frac{1}{\varepsilon}$ , entonces por 1.70, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > \frac{1}{\varepsilon}$$

de donde es claro que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

(El argumento puede revertirse)

El siguiente ejemplo muestra una aplicación de la propiedad Arquimediana.

**Ejemplo 74** *Probemos que si*

$$A = \left\{ x_n \in \mathbb{R} : x_n = \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N} \right\}$$

entonces

$$\sup A = 1$$

**Solución:** *Primero probaremos que  $L = 1$  es cota superior de  $A$ , y segundo que  $L = 1$  es la menor de todas, es decir,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in A : x_n > L - \varepsilon$$

1. *Es claro que*

$$n < n+1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$\frac{n}{n+1} < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

es decir,

$$x_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto  $L = 1$  es cota superior de  $A$ .

2. *Observemos que probar la existencia de  $x_n \in A$  tal que*

$$x_n < 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

*equivale a probar la existencia de  $n \in \mathbb{N}$  tal que*

$$\frac{n}{n+1} < 1 - \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$$

Sea  $\varepsilon > 0$ . Consideremos el real  $\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ . Por la propiedad Arquimediana, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$$

pero

$$\begin{aligned} n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} &\Leftrightarrow n\varepsilon > 1-\varepsilon \\ &\Leftrightarrow n > n - n\varepsilon + 1 - \varepsilon \\ &\Leftrightarrow n > (n+1)(1-\varepsilon) \\ &\Leftrightarrow \frac{n}{n+1} > 1-\varepsilon \end{aligned}$$

En consecuencia

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_n = \frac{n}{n+1} \in A)(x_n > 1 - \varepsilon)$$

Luego

$$\sup A = 1$$

Probemos que si

$$A = \{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$$

entonces

$$\inf A = 0$$

**Solución:** Por demostrar que

**Ejemplo 75** 1.  $L = 0$  es cota inferior de  $A$ .

2.  $L = 0$  es la mayor de todas las cotas inferiores, es decir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in A : x_n < L + \varepsilon$$

1. Es claro que

$$0 < \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego

$$0 < x_n, \quad \forall x_n \in A,$$

así,  $L = 0$  es cota inferior de  $A$ .

2. Por la propiedad Arquimediana 1.71 se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < \varepsilon$$

lo que equivale a:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in A : x_n < L + \varepsilon$$

donde  $L = 0$ .

En consecuencia  $\inf A = 0$ . □

Hemos probado en la proposición 1.14 que entre dos racionales existe al menos un racional.

Utilizando la propiedad arquimediana probemos la siguiente proposición más general:

**Proposición 1.32** Entre dos números reales cualesquiera existe al menos un número racional.

**Demostración:** Sean  $x, y \in \mathbb{R}$ . Es claro que si  $x < 0 < y$ , existe  $r = 0 \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$  y la propiedad queda probada en este caso.

Supongamos ahora  $0 < x < y$ . Sea

$$\varepsilon = y - x > 0$$

Por 1.71, existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que

$$\frac{1}{n} < \varepsilon = y - x \tag{1.72}$$

Además, por 1.70, dado el real  $nx$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que

$$m > nx \tag{1.73}$$

Sea  $m$  el mínimo entero que satisface 1.73, luego

$$m - 1 \leq nx \tag{1.74}$$



De 1.72, 1.73, 1.74 obtenemos

$$x < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < x + (y-x) = y$$

Por tanto

$$x < \frac{m}{n} < y,$$

Es decir, existe  $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$  tal que  $x < r < y$ .

Por otra parte, supongamos que  $x < y < 0$ . Entonces  $0 < -y < -x$  y por lo anterior existe  $r \in \mathbb{Q}$  tal que

$$-y < r < -x$$

Luego

$$x < -r < y$$

y como  $-r \in \mathbb{Q}$  queda demostrada la proposición en este último caso.  $\square$

**Observación:** Se dice que un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}$  es denso en  $\mathbb{R}$  si y sólo si entre dos números reales cualesquiera existe algún elemento de  $S$ .

De la proposición anterior es claro que **el conjunto  $\mathbb{Q}$  de los números racionales es denso en  $\mathbb{R}$ .**

Es necesario aclarar que aunque  $\mathbb{Q}$  es un cuerpo ordenado y denso en  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{Q}$  **no “llena”** la recta real, pues por ejemplo,  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ . En el conjunto de los números racionales no existe un axioma análogo al axioma del Supremo.

$\mathbb{R}$  es el **único cuerpo ordenado y completo**.

## 1.5 Ejercicios Propuestos

### 1.5.1 Estructuras de Grupo y Cuerpo

1. Sea

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$$

considere  $*$  una operación asociativa

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a' & 0 \\ b' & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & 0 \\ ba' + b' & 1 \end{pmatrix}.$$

Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifique).

- (a) El elemento neutro de  $G$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
- (b) Existe un elemento neutro para  $G$ .
- (c) El inverso de  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$  es  $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .
- (d) Todo elemento de  $G$  tiene inverso
- (e)  $(G, *)$  es conmutativo.

2. (a) Sea  $G = \{ax^2 + bx + c : a, b, c \in \mathbb{R}\}$  bajo la operación suma  $(+)$  definida por:

$$(ax^2 + bx + c) + (a'x^2 + b'x + c') = (a + a')x^2 + (b + b')x + (c + c')$$

Demuestre que  $G$  es un grupo conmutativo.

(b) Considere  $G_1 \subset G$  donde  $G_1 = \{ax^2 + bx + c : a \neq 0\}$ . Muestre que  $(G_1, +)$  no es un grupo.

3. Sea  $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  bajo la operación suma

$$(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$$

y la operación producto

$$(a + b\sqrt{2}) \cdot (a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + ba')\sqrt{2}$$

Pruebe que  $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}), +, \cdot)$  es un cuerpo conmutativo.

Note que  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}$ , y por esto se dice que  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$  son **subcuerpos** de  $\mathbb{R}$ .

4. Demuestre que, si  $a, b \in \mathbb{R}$ , entonces

(a)  $a^2 + b^2 \geq 2ab$

(b)  $(-a)^{-1} = -(a^{-1})$ ,  $a \neq 0$

(c)  $(-a)(b^{-1}) = -(ab^{-1})$ ,  $b \neq 0$

(d)  $-\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$

### 1.5.2 Problemas de Planteo

- Un cierto número de personas tiene que pagar a partes iguales un total de \$ 72.000. Si hubiera tres personas menos entonces cada una debería contribuir con \$ 4.000 más. ¿Cuántas personas son?
- Sesenta ejemplares del primer volumen de un libro y 75 ejemplares del segundo volumen cuestan un total de \$ 405.000. Sin embargo, un descuento del 15% en el primer volumen y de un 10% en el segundo volumen reducirá el precio total a \$ 355.500. Determine el precio de cada volumen.
- La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide  $3\sqrt{5}$  metros. Determine los catetos sabiendo que cuando se aumenta uno en un  $\frac{400}{3}\%$  y el otro en un  $\frac{50}{3}\%$  la suma de sus longitudes vale 14 metros.
- Dos sacos contienen 140 kilogramos de harina. Si sacamos el 12,5% de la harina del primer saco y la echamos en el segundo ambos tendrán la misma cantidad. ¿Cuántos kilos de harina tiene cada saco?
- Dos fábricas  $A$  y  $B$  se comprometen a servir un pedido en 12 días. Después de dos días la fábrica  $A$  cierra para hacer unas reparaciones, mientras que la fábrica  $B$  sigue funcionando normalmente. Sabiendo que  $B$  tiene un rendimiento del  $\frac{200}{3}\%$  del rendimiento de  $A$ , determine en cuántos días se servirá el pedido.
- Un lingote de aleación cobre-zinc que pesa 24 kilogramos se sumerge en agua y pierde  $\frac{26}{9}$  kilogramos en peso. Determine la cantidad de cobre y de zinc en la aleación, sabiendo que en el agua el cobre pierde  $\frac{100}{9}\%$  y el zinc  $\frac{100}{7}\%$  de su peso.
- Encuentre un número de dos cifras sabiendo que el cociente que se obtiene al dividirlo por el producto de sus dígitos es igual a  $\frac{8}{3}$  y, además, que la diferencia que se obtiene entre el número buscado y el número que se obtiene al invertir el orden de los dos dígitos que lo forman es 18.
- Determine un número de dos cifras sabiendo que el número de unidades excede en dos al número de decenas y que el producto del número deseado por la suma de sus dígitos es 144.
- Dos trenes salen al mismo tiempo de las estaciones  $A$  y  $B$  separadas 600 km y viajan uno al encuentro del otro. El primer tren llega a  $B$  tres horas antes de que el segundo llegue a  $A$ . El primer tren recorre 250 km en el mismo tiempo en que el segundo recorre 200 km. Encuentre la velocidad de cada tren.
- Un viajero que va a tomar su tren ha cubierto 3,5 km en una hora y se da cuenta que a esa velocidad llegará una hora tarde. Entonces recorre el resto de la distancia a la velocidad de 5 km/h y llega 30 minutos antes de que salga el tren. Determine la distancia que tenía que recorrer.

11. La distancia entre  $A$  y  $B$  por autopista es 19 km. Un ciclista sale de  $A$  en dirección a  $B$  a una velocidad constante. Un coche sale de  $A$  15 minutos más tarde en la misma dirección. Al cabo de 10 minutos alcanza al ciclista y continúa hasta  $B$ , donde da la vuelta y al cabo de 50 minutos después de haber abandonado  $A$  encuentra por segunda vez al ciclista. Determine las velocidades del ciclista y del coche.
12. Un tren correo sale de la estación  $A$  a las 5 de la madrugada en dirección de la estación  $B$  a 1.080 km de distancia. A las 8 de la mañana sale de  $B$  un tren en dirección de  $A$  y viaja 15 km/h más aprisa que el tren correo. ¿Cuándo se encontrarán sabiendo que el punto de encuentro es el punto medio entre  $A$  y  $B$ ?
13.  $A$  dista 78 km de  $B$ . Un ciclista sale de  $A$  en dirección de  $B$ . Una hora después, otro ciclista sale de  $B$  en dirección a  $A$  y va 4 km/h más rápido que el primero. Se encuentran a 36 km de  $B$ . ¿Cuánto hace que ha salido cada uno y cuáles son sus velocidades?
14. Una bandeja rectangular de 20 cm  $\times$  90 cm  $\times$  25 cm (paralelepípedo rectangular) se usará para hacer negativos fotográficos. El agua llega a través de un tubo de goma y sale a través de otro para mantener al agua en agitación. Se necesitan 5 minutos menos para vaciar la bandeja a través del segundo tubo que en llenarla mediante el primero, con el segundo cerrado. Si se abren ambos tubos, la bandeja completa se vaciará en una hora. Encuentre la cantidad de agua que deja pasar cada tubo en un minuto.
15. Dos trabajadores, uno de los cuales empieza a trabajar uno y medio días después que el otro, pueden completar un trabajo en 7 días. Si cada uno de ellos hiciera el trabajo individualmente, el primero habría necesitado 3 días más que el segundo que empezó después. ¿Cuántos días tardará cada obrero en realizar el trabajo individualmente?
16. Dos máquinas perforadoras de túneles trabajando en los dos extremos de un túnel tienen que completar la perforación en 60 días. Si la primera máquina hace el 30% del trabajo asignado, y la segunda el  $\frac{80}{3}\%$ , entonces ambas perforarán 60 metros de túnel. Si la primera máquina ha realizado  $\frac{2}{3}$  del trabajo asignado a la segunda, y la segunda 0,3 del trabajo asignado a la primera, entonces la primera máquina necesitaría 6 días más que la segunda. Determine cuántos metros de túnel perfora cada máquina por día.
17. Dos cuadrillas de ferroviarios trabajando conjuntamente terminan una reparación de la sección de una vía en 6 días. Para hacer el 40% del trabajo, la primera cuadrilla sola necesitaría dos días más de lo que la segunda cuadrilla sola necesitaría, para realizar  $\frac{40}{3}\%$  del trabajo completo. Determine cuántos días tardaría cada cuadrilla en reparar la sección completa por separado.
18. Dos obreros juntos completan una cierta tarea en 8 horas. Trabajando individualmente, el primer obrero podría hacer el trabajo 12 horas más aprisa que lo podría hacer el segundo. ¿Cuántas horas tardaría cada obrero en hacer individualmente el trabajo?
19. Dos tuberías tardan 6 horas en llenar una piscina. Una sola la llenaría 5 horas más deprisa que la otra. ¿Cuánto tardará cada tubería sola en llenar la piscina?
20. Dos ruedas están girando accionadas por una correa sin fin; la más pequeña da 400 revoluciones por minuto más que la grande. Esta da 5 revoluciones en un lapso de tiempo que es un segundo mayor que el necesario para que la más pequeña de 5 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones por minuto da cada una?
21. Dos motores de combustión interna se sometieron a un ensayo de rendimiento y se encontró que uno de ellos había consumido 600 gramos de combustible mientras que el otro, que había funcionado 2 horas menos, consumió 384 gramos. Si el primer motor consumiera la misma cantidad de combustible por hora que el segundo y el segundo lo mismo que el primero, entonces ambos motores consumirían la misma cantidad de combustible durante el mismo período de funcionamiento que antes. ¿Cuánto combustible consume por hora cada motor?

22. Cuatro grúas de puerto idénticas se usan para cargar un barco. Cuando llevan 2 horas trabajando, se ponen a trabajar con ellas 2 grúas más de menor capacidad, con lo que se completa la carga en 3 horas. Si hubieran empezado a trabajar todas juntas, se habría completado la carga en 4,5 horas. Determine el tiempo (en horas) necesario para que realice el trabajo completo una grúa sola de las más potentes y una grúa sola de las de menor potencia.
23. Un estanque con cierta cantidad de agua tiene forma de cono invertido. Al agregarle 10 litros, el nivel de agua sube en un 20%. Si la base del cono fuese reducida en 40%, mateniendo la misma altura resultaría un cono que estaría lleno con la cantidad de agua inicial. Sabiendo que la altura del estanque es 50 cm. Calcular el radio inicial y el volumen de agua contenido en un comienzo.

### 1.5.3 Ejercicios de Sistemas de Ecuaciones

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{array} & 2) \quad \begin{array}{l} x + y + z = 2 \\ 2xy - z^2 = 4 \end{array} \\
 3) \quad \begin{array}{l} x^2 + xy + y^2 = 13 \\ x + y = 4 \end{array} & 4) \quad \begin{array}{l} \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{25}{12} \\ x^2 - y^2 = 7 \end{array} \\
 5) \quad \begin{array}{l} 2x + 2y + 2 = 2\lambda x \\ 2x + 4y + 3 = -\lambda \\ x^2 - y - 1 = 0 \end{array} & 6) \quad \begin{array}{l} y = 8\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ 4x^2 + y^2 - 4 = 0 \end{array} \\
 7) \quad \begin{array}{l} yz = \lambda \\ xz = \lambda \\ xy = \lambda \\ x + y + z = 1 \\ x > 0, y > 0, z > 0 \end{array} & 8) \quad \begin{array}{l} 2(y + z) + \lambda yz = 0 \\ 2(x + z) + \lambda xz = 0 \\ 2(y + x) + \lambda yx = 0 \\ xyz = 64 \end{array} \\
 9) \quad \begin{array}{l} y^2 - y^2 = \lambda(xy - 3) \\ 2(3 - xy) = \lambda(x^2 - y^2) \\ 3x^2 - 6x - y^3 = 0 \end{array} & 10) \quad \begin{array}{l} x + \lambda(x - 3) = 0 \\ y + \lambda(y - 4) = 0 \\ z = \lambda z \\ (x - 3)^2 + (y - 4)^2 = z^2 \end{array} \\
 11) \quad \begin{array}{l} 2x - \lambda y = 0 \\ 2y - \lambda x = 0 \\ z + \lambda z = 0 \\ z^2 - xy - 1 = 0 \end{array} & 12) \quad \begin{array}{l} yz = \lambda(y + z) \\ xz = \lambda(x + z) \\ xy = \lambda(y + x) \\ xy + xz + yz = 5 \end{array}
 \end{array}$$

### 1.5.4 Ejercicios Acerca de los Axiomas de Orden

1. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifique)

- (a)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}^+)(x \leq xy)$
- (b)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R} - \{0\}) \left( x < y \Rightarrow \frac{x}{y} < 1 \right)$
- (c)  $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x \leq y \Rightarrow x \leq y^2)$
- (d)  $(\forall x \in \mathbb{R}_0^+)(\sqrt[3]{x} \leq x)$
- (e) Si  $a = \sqrt{2}$ ,  $b = \sqrt[3]{5}$ ,  $c = \sqrt[4]{6}$ , entonces;  $a < c < b$ .
- (f)  $\left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{|1-x|} > 1 \right\} = \{x \in \mathbb{R} : |x| > |1-x|\}$

- (g)  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}) \left( |x| < 2 \Rightarrow \frac{1}{|x|} > \frac{1}{4} \right)$   
 (h)  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\})(\forall y \in \mathbb{R}) \left( \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \geq 1 \right)$   
 (i) El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{|x-3|}{16x^2+x+22} \leq 0$$

es vacío.

- (j) El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-2x+1}} \leq |x-1|$$

es  $] -\infty, 0[ \cup ] 2, \infty[$ .

- (k)  $\{x \in \mathbb{R} : |x-2| = |2-x|\} = \{x \in \mathbb{R} : \left| \frac{x-2}{2-x} \right| = 1\}$

- (l) Resolver la inecuación

$$\frac{|x^2-1|(x^4-16)(x^3-8)}{(x+5)(x^2-4)\sqrt{x-1}} \leq 0$$

equivale a resolver la inecuación

$$\frac{x-2}{x+5} \leq 0$$

en  $\mathcal{R}_1 = ]1, \infty[ - \{2\}$ .

2. Determine para qué valores de  $x$  en  $\mathbb{R}$  las expresiones siguientes están bien definidas y racionalice.

Ayuda: Para racionalizar usar la factorización

$$a^m - b^m = (a-b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \dots + ab^{m-2} + b^{m-1}), \forall m \in \mathbb{Z}^+$$

- (a)  $\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{2x}}$   
 (b)  $\frac{x-2}{\sqrt[4]{1-x-16}}$   
 (c)  $\frac{x}{\sqrt[3]{1-x-1}}$   
 (d)  $\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-1} - \sqrt[4]{x-1}}$   
 (e)  $\frac{2}{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-2}}$

3. Indique si las siguientes desigualdades son verdaderas para los  $(x, y)$  indicados.

- (a)  $\left| \frac{xy}{|x|+|y|} \right| \leq |y|$ , si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
 (b)  $\left| \frac{(y-2)^2 \sin(xy)}{y^2+x^2-4y+4} \right| \leq |\sin(xy)|$ , si  $(x, y) \neq (0, 2)$ .  
 (c)  $\frac{|yx-y|}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}} \leq |x-1|$ , si  $(x, y) \neq (1, 0)$ .  
 (d)  $\frac{x}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{x}{y\sqrt{x^2+y^2}}$ , si  $x+y \neq 0$  y  $y \neq 0$ .  
 (e)  $\sqrt{\frac{x^2}{x^2+y^2}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}$ , si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .  
 (f)  $\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |y|$ , si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(g)  $\sqrt{x^2 + y^2} < x^2 + y^2$ , si  $(x, y) \neq (0, 0)$ .

(h)  $\frac{|x+y|}{\sqrt{x^2-y^2}} \leq \sqrt{\frac{x+y}{x-y}}$ , si  $x^2 > y^2$ .

(i)  $\frac{|xy|}{\sqrt{xy}} > 1$ , si  $xy > 0$ .

(j)  $\frac{|x|y}{|x^2-y^2|} \leq |y|$ , si  $x^2 \neq y^2$ .

4. Determine para qué valores de  $x, y, z \in \mathbb{R}$  se verifican las siguientes desigualdades:

(a)  $\sqrt[3]{x} \leq x$

(b)  $\sqrt{x^3} \leq x$

(c)  $x \leq \sqrt{x}$

(d)  $\frac{\sqrt{x}}{x^2+y^2} \leq \frac{x}{x^2+y^2}$

(e)  $\frac{z}{xy} \leq \frac{z}{x}$

(f)  $\sqrt[3]{x} < \sqrt{x}$

5. Resuelva las siguientes inecuaciones:

(a)  $2x - \frac{x-2}{3} > \frac{1-x}{2}$

(b)  $4 < \frac{3x+1}{x-2}$

(c)  $\frac{1}{x} + \frac{x}{1-x} \geq 0$

(d)  $7x^2 > x$

(e)  $\frac{x}{1-2x} + \frac{2x-3}{x-1} < 0$

(f)  $\frac{x^4-17x^2+60}{x(x^2-8x+5)} < 0$

(g)  $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$

(h)  $2x^2 - \sqrt{x} - 1 < 0$

(i)  $\sqrt{1-x} \geq \sqrt{2x-8}$

(j)  $\sqrt{\frac{x-1}{x+2}} > 1$

(k)  $\sqrt{x-2} - \sqrt{x-6} < 8$

(l)  $\sqrt{3x-8} - \sqrt{5x-3} > \sqrt{x+6}$

(m)  $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$

(n)  $\sqrt{(x-3)(x-5)} > \sqrt{(x+2)(x-1)} - 4$

(o)  $\sqrt{\sqrt{x}-2} - 4 < 0$

(p)  $\sqrt{-x^2+x+1} < \sqrt{x+6} + 1$

(q)  $\sqrt{\sqrt{1-x}+1} \leq x-1$

(r)  $\sqrt{1-\sqrt{x-5}} < 2$

(s)  $\sqrt{2-x} - 2\sqrt{x} \leq \sqrt{x-2}$

6. Resuelva

(a)  $|\sqrt{1-x} + \sqrt{x}| = \sqrt{|x-3|}$

(b)  $|2-|x|| - ||2x|-3| = x+3$

(c)  $\left| \frac{|x|-2}{x-1} \right| = |x|$

- (d)  $||x - 1| + 2| \geq x$
- (e)  $|x - 2| \leq |3x + 1|$
- (f)  $|3x - 2| + |x - 3| \geq 4$
- (g)  $|2x - 4| - \left| \frac{1}{2-x} \right| > 6|x - 2|$
- (h)  $||x| - 2| + ||2x| - 3x| < 5$
- (i)  $\frac{|x|-1}{|x|+1} > \frac{|x|-10}{|x|+10}$
- (j)  $||x| - 1| < 5 + |x + 8|$
- (k)  $\frac{||x+3|-2|}{||x|-1|} \geq 2$
- (l)  $\sqrt{1-|x|} > 1 - 3x$
- (m)  $\frac{|x-1|(x^4-16)(x^3-8)}{(x+7)(x^2-4)\sqrt{x-1}} \leq 0$
- (n)  $\frac{\sqrt{(x-12)^2(x^2-5)}}{-x^2-x-1} \leq 0$
- (o)  $|x + 1| + ||x - 1| + 3| \leq |x + 2| + 8$
- (p)  $\sqrt{(x-1)^3} \leq |x - 1|$
- (q)  $\frac{-x^2-x-1}{|x-5|} \leq x^2 + 1$
- (r)  $\sqrt[3]{2-x} + 2\sqrt{x} \leq \sqrt[3]{x-2}$

7. Demuestre que para todo  $a, p, q \in \mathbb{R}$  las raíces de la ecuación

$$\frac{1}{x-p} + \frac{1}{x-q} = \frac{1}{a^2}$$

son reales.

8. Encuentre los valores reales de  $\alpha$ , si existen, para los cuales las raíces de la ecuación de segundo grado

$$(\alpha - 2)x^2 - 2\alpha x + 6(\alpha - 1) = 0$$

son reales y positivas.

9. Considere la ecuación de segundo grado

$$(m - 5)x^2 - 2(m - 2)x + m - 1 = 0$$

Determine en cada caso si existe  $m$  de modo que:

- (a) El producto de las raíces sea 3.
  - (b) La suma de las raíces sea 5.
  - (c) Las raíces difieran sólo en el signo.
  - (d) Una raíz sea el doble de la otra.
  - (e) Las raíces sean negativas.
10. Considere la ecuación

$$5x^2 - kx + 1 = 0$$

Determine el valor de  $k$  para que la diferencia de sus raíces sea 1.

11. Determine los posibles valores de  $k \in \mathbb{R}$  de modo que la ecuación

$$k|k|x^2 + kx + 1 = 0$$

admita dos soluciones reales y diferentes.

12. Encuentre (si existen) el Supremo e Infimo correspondiente a los conjuntos  $A$ ,  $B$ ,  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A - B$ , donde  $A$  y  $B$  están definidos por:

(a)  $A = \{x \in \mathbb{R} : \sqrt[3]{x} \leq x\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{R} : x \leq \sqrt{x}\}$

(b)  $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{|x|}{|1-x|} > 1\right\}$ ,  $B = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{\sqrt{x-2}}{|x-2|-|1-x|} \leq 0\right\}$

13. Sean  $A = \{x \in \mathbb{R} : |3x + 7| \leq -4x\}$  y  $B = \{x \in \mathbb{R} : |x| - |x - 1| \geq 1\}$ . Se define  $AB = \{ab : a \in A \wedge b \in B\}$

(a) Determine (si existe)  $\sup A$

(b) Encuentre  $\{x \in \mathbb{R} : x \text{ es cota superior de } B\}$

(c) De una cota superior de  $AB$ .

14. Demuestre que si  $x + A = \{x + a : a \in A\}$ , entonces

$$x + \sup A = \sup(x + A)$$

15. Demuestre que  $\mathbb{Z}$  no es acotado superiormente.

16. Demuestre que si

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \frac{2n}{n+3}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

entonces  $\sup A = 2$ .

17. Demuestre que si

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \frac{2}{3n+1}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

entonces  $\inf A = 0$ .

18. Demuestre que si

$$A = \left\{x_n \in \mathbb{R} : x_n = \frac{2n^2 + 3}{-1 + 2n}, n \in \mathbb{N}\right\},$$

entonces  $A$  no es acotado superiormente.



## Chapter 2

# Funciones

### 2.1 Introducción

La noción de “correspondencia” aparece frecuentemente en la vida diaria. Por ejemplo:

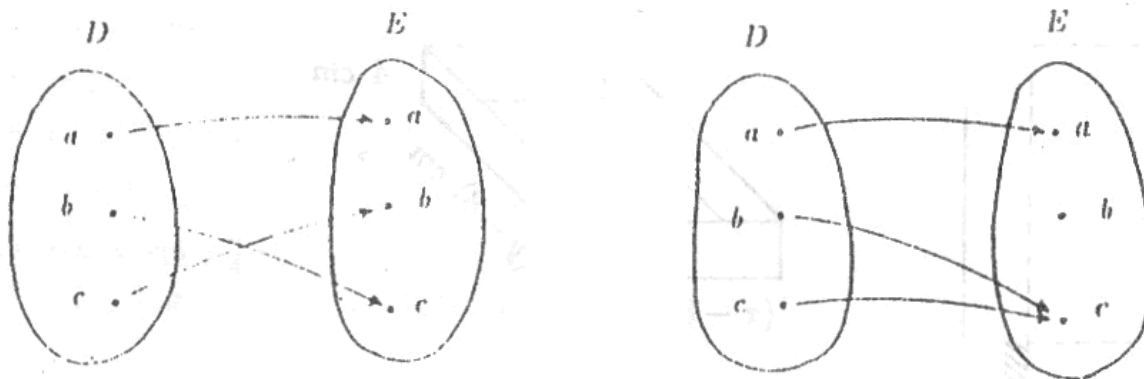
*A cada libro de la biblioteca le corresponde un número de páginas.*

*A cada circunferencia le corresponde su área.*

*A cada hombre le corresponde su edad.*

Estos ejemplos de correspondencia involucran dos conjuntos  $D$  y  $E$ . En el primer ejemplo,  $D$  denota el conjunto de libros de una biblioteca y  $E$  es el conjunto de enteros positivos. A cada libro  $x$  en  $D$  le corresponde un entero positivo  $y$  en  $E$ , el número de páginas del libro.

Una correspondencia de este tipo se puede también ilustrar mediante diagramas como los de la figura siguiente



en donde los conjuntos  $D$  y  $E$  quedan representados por puntos dentro de ciertas regiones en el plano. La flecha curva indica que  $y$  es el elemento de  $E$  que corresponde al elemento  $x$  de  $D$ .

Los conjuntos pueden tener elementos en común, de hecho muchas veces se tendrá  $D = E$ .

Los ejemplos anteriores tienen la particularidad de que a cada elemento de  $D$  le corresponde uno y sólo un elemento de  $E$ ; es decir, dado  $x$ , se tiene que  $y$  es único para ese  $x$ . Sin embargo, a varios elementos de  $D$  les puede corresponder un mismo elemento de  $E$ . Por ejemplo, dos libros pueden tener el mismo número de páginas. En la figura anterior derecha, a los elementos  $b$  y  $c$  de  $D$  les corresponde el mismo elemento  $c$  de  $E$ .

En general, en todo el capítulo,  $D$  y  $E$  serán conjuntos de números. Por ejemplo si  $D = E = \mathbb{R}$ , a cada número  $x$  se le puede asignar su opuesto aditivo  $-x$ . Así, a 2 se le asigna -2, a -3 se le asigna 3, etc. Esto nos da una correspondencia de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$ <sup>1</sup>

Cada uno de los ejemplos anteriores es una correspondencia llamada **función**, concepto que definiremos a continuación:

**Definición 2.1** Diremos que una correspondencia de un conjunto  $D$  a un conjunto  $E$  es una función si a cada elemento  $x$  de  $D$  le corresponde un único elemento  $y$  de  $E$ .

Para  $x$  en  $D$  el elemento  $y$  de  $E$  (único) es el valor (funcional) de la función que denotaremos por  $f(x)$  (notación que se lee “ $f$  de  $x$ ”). Se dice también que  $f(x)$  es la **imagen** de  $x$  bajo la función  $f$ .

Algunas notaciones para indicar una función son:

$$\begin{array}{ccc} f: & D & \longrightarrow E \\ & x & \longrightarrow f(x) \end{array} \quad f: D \longrightarrow E; \quad y = f(x)$$

o

$$D \xrightarrow{f} E$$

## 2.2 Dominio y Recorrido

El conjunto  $D$  es llamado **dominio de la función** ( $D = \text{Dom}(f)$  o simplemente  $D = \text{Dom}f$ ), el conjunto  $E$  es llamado **conjunto de llegada** de la función. Un subconjunto importante de  $E$  es el conjunto llamado **recorrido** de  $f$  ( $\text{Rec}(f)$  o simplemente  $\text{Rec}f$ ) que es el conjunto formado por todos los valores posibles de  $f(x)$ , con  $x$  en  $D$ .

Así,  $f: D \longrightarrow E$  es una función si cumple:

**1** A cada elemento  $x$  de  $D$  le corresponde un elemento  $y$  en  $E$ .

$$(\forall x \in D)(\exists y \in E)(a \ x \text{ le corresponde } y)$$

**2**  $y$  es *único* (para cada  $x \in D$ ).

Si bien es cierto que una función  $f: D \longrightarrow E$  consta de tres entes (dos conjuntos,  $D$  y  $E$ , y la correspondencia misma  $f$ ) muchas veces una función la definiremos por medio de una expresión solamente, no especificando el dominio  $D$  ni el conjunto de llegada  $E$ , por ejemplo diremos solamente:

$$\text{Sea } f(x) = \sqrt{x-1} \text{ una función.}$$

En este caso se subentiende que  $E$  (conjunto de llegada) lo tomaremos lo suficientemente grande como para que  $f(x)$  esté en  $E$  y el dominio de  $f$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  para los cuales  $\sqrt{x-1}$  resulte ser un número en  $\mathbb{R}$ . Así, en este caso entenderemos que

$$\begin{array}{ccc} f: & [1, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \end{array}$$

es función ya que  $f(x) = \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}$  si y sólo si  $x-1 \geq 0$  por lo tanto

$$\text{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \geq 0\} = [1, +\infty[.$$

En estricto sentido

$$\begin{array}{ccc} f: & [1, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \end{array}$$

---

<sup>1</sup>Esto está garantizado por la axiomática de  $\mathbb{R}$  (existencia de inverso aditivo y proposición de unicidad).

y

$$\begin{aligned} f_1 : [2, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f_1(x) = \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

no representan a la misma función ya que sus dominios son distintos pero al indicar una función solamente por la expresión  $f(x) = \sqrt{x-1}$  nos referiremos a la función de **dominio máximo** (según inclusión de conjuntos) y conjunto de llegada  $\mathbb{R}$ . En general lo importante en estos casos es que el conjunto de llegada de  $f$  contenga al recorrido de  $f$ .

Si  $x$  está en el dominio de  $f$ , se dice que  $f$  está definida en  $x$ , o que  $f(x)$  existe. Si un conjunto  $S$  está contenido en el dominio se dice que  $f$  está definida en  $S$ . La frase “ $f$  no está definida en  $x$ ” significa que  $x$  no está en el dominio de  $f$ .

Los símbolos que se usan para una función y para la variable son irrelevantes, por ejemplo  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $f(s) = \sqrt{s}$ ,  $g(t) = \sqrt{t}$ ,  $k(r) = \sqrt{r}$  definen la misma función. Esto es por que si  $a$  es cualquier número en el dominio, entonces se obtiene el mismo valor  $\sqrt{a}$  independiente de la variable que se utilice.

En los ejemplos que siguen haremos uso de la notación acostumbrada de funciones y en algunas de ellas no especificaremos los conjuntos de llegada ni dominios, sin embargo llamaremos función simplemente a la **fórmula** que hace la correspondencia entre  $x$  e  $y$ .

**Ejemplo 76** Sea  $f$  una función con dominio  $\mathbb{R}$  tal que  $f(x) = 2x^2 + 1$ , calcular  $f(-1)$ ,  $f(2)$ ,  $f(\sqrt{2})$ .

**Solución:** Podemos calcular los valores de  $f$  sustituyendo  $x$  por los valores dados en la ecuación

$$f(x) = 2x^2 + 1$$

así,

$$f(-1) = 2 \cdot (-1)^2 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$$

$$f(2) = 2 \cdot (2)^2 + 1 = 2 \cdot 4 + 1 = 9$$

$$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot (\sqrt{2})^2 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5.$$

**Ejemplo 77** Sea  $f(x) = \frac{2x+5}{x-4}$  una función. Determinemos el dominio y recorrido de  $f$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4\} \\ &= \mathbb{R} - \{4\} \end{aligned}$$

Para encontrar  $\text{Rec}(f)$ , debemos determinar para qué valores de  $y$  existe  $x$  en el dominio de  $f$  tal que

$$y = f(x)$$

es decir,

$$y = \frac{2x+5}{x-4}.$$

Para esto despejamos  $x$  de la expresión  $y = f(x)$  y mantenemos registro de las condiciones necesarias para que tal despeje sea válido:

$$\begin{aligned} y &= \frac{2x+5}{x-4} \\ y(x-4) &= 2x+5 \\ x(y-2) &= 4y+5 \\ x &= \frac{4y+5}{y-2}, \text{ si } y-2 \neq 0 \end{aligned}$$

Luego, dado  $y \in \mathbb{R}$  podemos encontrar  $x \in \text{Dom}(f)$  tal que  $y = f(x)$  si  $y \neq 2$ . Luego,  $\text{Rec}(f) = \mathbb{R} - \{2\}$ .

**Ejemplo 78** Consideremos la función

$$\begin{aligned} f : [1, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Determinemos  $\text{Rec}(f)$ .

**Solución:** Por definición tenemos que  $\text{Rec}(f) = \{y \in \mathbb{R} : y = f(x), x \in \text{Dom}(f)\}$ . Claramente se tiene que  $y$  debe ser no negativo (por definición de raíz cuadrada).

Sea  $y \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $x \in [1, +\infty[$  tal que  $y = f(x)$ , se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= \sqrt{x-1} \\ y^2 &= x-1 \\ x &= y^2+1 \end{aligned}$$

Así, para todo  $y \geq 0$ , existe  $x \in \text{Dom}(f) = [1, +\infty[$  tal que  $y = f(x)$ . Luego<sup>2</sup>,  $\text{Rec}(f) = [0, +\infty[$ .

Ahora consideremos la función

$$\begin{aligned} f : [5, +\infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{x-1} \end{aligned}$$

Note que el dominio se ha restringido a un subconjunto de  $[1, +\infty[$ . Calculemos  $\text{Rec}(f)$ . Claramente  $y$  debe ser no negativo, pero

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ y &= \sqrt{x-1} \\ y^2 &= x-1 \\ x &= y^2+1 \end{aligned}$$

Ahora bien, como  $x \in [5, +\infty[$ , es decir,

$$x \geq 5$$

se debe cumplir que

$$y^2 + 1 \geq 5$$

por lo tanto

$$y^2 \geq 4$$

o equivalentemente

$$|y| \geq 2$$

es decir,

$$y \geq 2 \quad \vee \quad y \leq -2$$

pero  $y \geq 0$ , luego,  $y \leq -2$  se descarta. De esta forma  $\text{Rec}(f) = [2, +\infty[$ .

**Ejemplo 79** Sea  $f$  la función definida por

$$\begin{aligned} f : D &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{2x-3}{x+1}. \end{aligned}$$

Determinemos el dominio  $D$  de  $f$ .

**Solución:** Con la definición tenemos

$$\begin{aligned} D = \text{Dom}(f) &= \left\{ x \in \mathbb{R} : x+1 \neq 0 \wedge \frac{2x-3}{x+1} \in \mathbb{R}^+ \right\} \\ &= \left\{ x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \wedge \frac{2x-3}{x+1} > 0 \right\} \end{aligned}$$

Debemos resolver la inecuación que define al dominio de  $f$ .

$$\begin{aligned} &\frac{2x-3}{x+1} > 0 \\ \iff &(2x-3 > 0 \wedge x+1 > 0) \vee (2x-3 < 0 \wedge x+1 < 0) \\ \iff &(x > \frac{3}{2} \wedge x > -1) \vee (x < \frac{3}{2} \wedge x < -1) \\ \iff &x > \frac{3}{2} \vee x < -1. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>Note que en realidad se ha probado también que si  $y \in \text{Rec}(f)$  entonces  $x \in [1, +\infty[$ .

Luego se tiene que

$$D = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1 \wedge x \in \mathbb{R} - [-1, \frac{3}{2}]\},$$

es decir,

$$D = \mathbb{R} - [-1, \frac{3}{2}].$$

**Ejercicio 80** Considere la función

$$\begin{aligned} f: D &\longrightarrow [1, 9[ \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{|x| - 2} - 1 \end{aligned}$$

Determine  $D = \text{Dom}f$

**Solución:**  $f$  será función si  $|x| - 2 \geq 0$  y  $\sqrt{|x| - 2} - 1 \in [1, 9[$  luego

$$D = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 2 \geq 0 \wedge 1 \leq \sqrt{|x| - 2} - 1 < 9\}$$

Pero

$$|x| - 2 \geq 0 \iff |x| \geq 2 \iff x \geq 2 \vee x \leq -2$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 1 \leq \sqrt{|x| - 2} - 1 < 9 &\iff 2 \leq \sqrt{|x| - 2} < 10 \\ &\iff 4 \leq |x| - 2 < 100 \\ &\iff 6 \leq |x| < 102 \\ &\iff 6 \leq |x| \wedge |x| < 102 \\ &\iff (x \geq 6 \vee x \leq -6) \wedge (-102 < x < 102) \\ &\iff x \in ]-102, -6] \cup [6, 102[ \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$D = (]-\infty, -2] \cup [2, \infty[) \cap (]-102, -6] \cup [6, 102[) = ]-102, -6] \cup [6, 102[$$

**Ejercicio 81** Considere la función

$$\begin{aligned} g: ]-\infty, -2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1 \end{aligned}$$

Determine  $\text{Rec}g$

**Solución:** Notemos que  $]-\infty, -2]$  no es el dominio “máximo” de  $g$  pues  $g$  esta definida para  $x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[$

Consideremos  $\text{Dom}g = ]-\infty, -2]$ , determinemos  $\text{Rec}g$

Sean  $x \in ]-\infty, -2]$  e  $y \in \mathbb{R}$  su imagen. Se tiene:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \frac{1}{\sqrt{|x|-1}} + 1 \\ &\iff y - 1 = \frac{1}{\sqrt{-x-1}} \text{ pues } |x| = -x \\ &\iff \sqrt{-x-1} = \frac{1}{y-1}, \quad y - 1 > 0 \\ &\iff -x - 1 = \frac{1}{(y-1)^2} \\ &\iff x = -1 - \frac{1}{(y-1)^2} \end{aligned}$$

pero  $x \in ]-\infty, -2]$ , entonces  $x \leq -2$

Así

$$\begin{aligned} -1 - \frac{1}{(y-1)^2} \leq -2 &\iff \frac{1}{(y-1)^2} \geq 1 \\ &\iff 1 \geq (y-1)^2 \\ &\iff 1 \geq |y-1| \\ &\iff -1 \leq y-1 \leq 1 \\ &\iff 0 \leq y \leq 2 \end{aligned}$$

Luego  $y \in [0, 2] \cap ]1, \infty[ = ]1, 2]$ , es decir,  $\text{Rec} f = ]1, 2]$ .

**Nota:** Observe que si hubiéramos considerado el dominio máximo de  $g$  entonces el recorrido de  $g$  habría sido  $]1, \infty[$

**Ejercicio 82** Dada la relación

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow [1, +\infty[ \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{|2x-1|+x}{|x-3|}, \end{aligned}$$

determine  $A$  de modo que  $f$  sea función

**Solución:** Se busca  $x$ , tal que  $x \neq 3$  y

$$\frac{|2x-1|+x}{|x-3|} \geq 1$$

o bien, equivalentemente,

$$|2x-1|+x \geq |x-3|.$$

Como

$$2x-1=0$$

si y sólo si

$$x = 1/2$$

y

$$x-3=0$$

si y sólo si

$$x = 3,$$

entonces obtenemos la siguiente tabla

|        | $] -\infty, 1/2]$ | $] 1/2, 3[$ | $[3, \infty[$ |
|--------|-------------------|-------------|---------------|
| $2x-1$ | $- \text{ ó } 0$  | $+$         | $+$           |
| $x-3$  | $-$               | $-$         | $+$ ó $0$     |

que nos permite resolver el problema por casos.

**Caso 1:** Si  $x \in ]-\infty, 1/2]$  la inecuación ?? se reduce a

$$\begin{aligned} -(2x-1)+x &\geq -(x-3) \\ 1 &\geq 3 \end{aligned}$$

como esto último es un absurdo, no hay  $x \in ]-\infty, 1/2]$  que satisfaga ??

**Caso 2:** Si  $x \in ]1/2, 3[$  la inecuación ?? se reduce a

$$2x-1+x \geq -(x-3),$$

es decir,

$$x \geq 1$$

Así, los  $x \in ]\frac{1}{2}, 3[ \cap ]1, \infty[ = ]1, 3[$  satisfacen ??

**Caso 3:** Si  $x \in ]3, \infty[$  la inecuación ?? nos queda

$$\begin{aligned} 2x - 1 + x &\geq x - 3 \\ 2x &\geq -2 \\ x &\geq -1 \end{aligned}$$

Solución de este caso es  $]3, \infty[$

Finalmente, los  $x$  que satisfacen ?? están en el conjunto  $]1, 3[ \cup ]3, \infty[$

De esta forma  $f$  es función si

$$A \subseteq ]1, \infty[ - \{3\}$$

**Definición 2.2** Diremos que dos funciones  $f$  y  $g$  de  $D$  en  $E$  son iguales, y escribiremos

$f = g$ , si y sólo si  $f(x) = g(x)$  para todo  $x \in D$ .

(Es decir, cada vez que se evalúa en  $x$ , las imágenes son iguales).

**Ejemplo 83** Si  $g(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$  y  $f(x) = x - 1$ , entonces  $f = g$  en  $D = \mathbb{R} - \{-1\}$ . Es decir, las funciones

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = x - 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} - \{-1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = \frac{x^2-1}{x+1} \end{aligned}$$

son iguales<sup>3</sup>.

**Ejemplo 84** Determinemos en primer lugar el dominio de las funciones definidas por las fórmulas

$$f(x) = \frac{x^3 - 1}{(x^2 + x - 2)\sqrt{x+5}} \quad y \quad g(x) = \frac{x^2 + x + 1}{(x+2)\sqrt{x+5}}.$$

$$\begin{aligned} Dom(f) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x - 2 \neq 0 \wedge x + 5 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-1)(x+2) \neq 0 \wedge x > -5\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1 \wedge x \neq -2 \wedge x > -5\} \\ &= ]-5, +\infty[ - \{1, -2\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dom(g) &= \{x \in \mathbb{R} : x + 2 \neq 0 \wedge x + 5 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq -2 \wedge x > -5\} \\ &= ]-5, +\infty[ - \{-2\}. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} f: ]-5, +\infty[ - \{1, -2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{x^3-1}{(x^2+x-2)\sqrt{x+5}} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g: ]-5, +\infty[ - \{-2\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = \frac{x^2+x+1}{(x+2)\sqrt{x+5}} \end{aligned}$$

son distintas pues sus dominios son distintos. Sin embargo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3-1}{(x^2+x-2)\sqrt{x+5}} \\ &= \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+2)\sqrt{x+5}} \\ &= \frac{x^2+x+1}{(x+2)\sqrt{x+5}} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

siempre que  $x \neq 1$  y  $x \neq -2$ , es decir,  $f = g$  en  $D = Dom(f) \cap Dom(g) = ]-5, +\infty[ - \{1, -2\}$ .

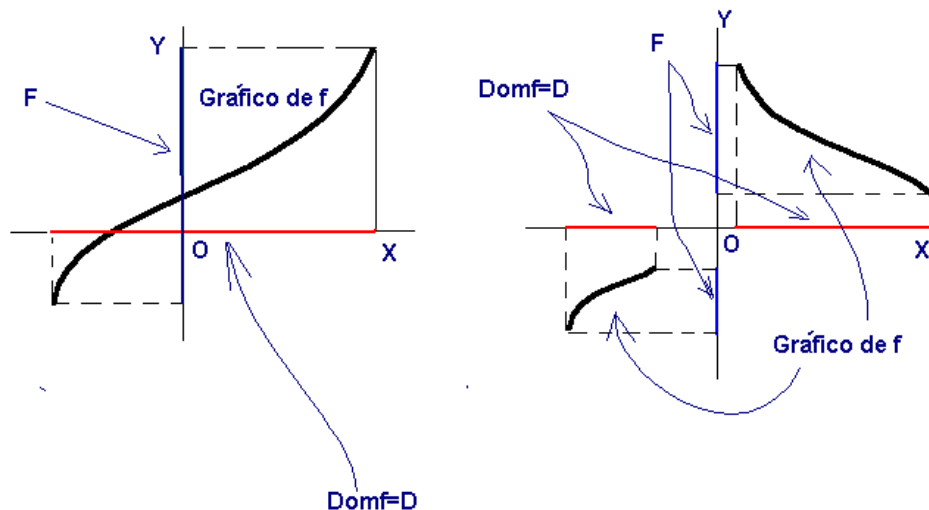
<sup>3</sup>Note que no son funciones iguales en  $\mathbb{R}$ .

## 2.3 Representación Gráfica

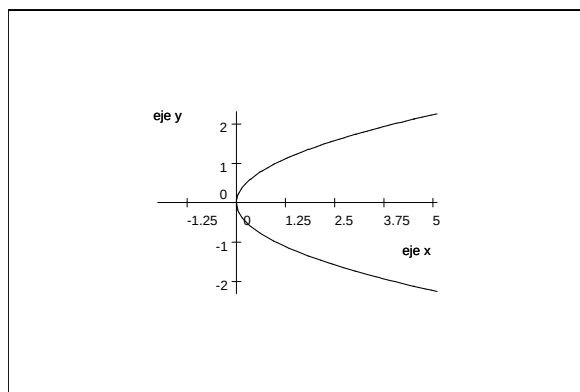
Se define el gráfico de una función  $f : D \rightarrow E$  como el conjunto

$$\text{Graf}f = \{(x, y) \in D \times E : y = f(x), x \in D\} \subset \mathbb{R}^2$$

La “representación gráfica” del gráfico de  $f$  se denomina curva y se dibuja en el plano  $\mathbb{R}^2$ , indicando  $D = \text{Dom}f$  en el eje horizontal (eje  $OX$ ) y de  $E$  conjunto de llegada en eje vertical (eje  $OY$ ).



Puesto que por definición de función hay exactamente un valor  $y$  para cada valor  $x \in D$ , se sigue que toda recta vertical que corte el conjunto  $D$  debe cortar a la gráfica de una función sólo una vez. Esta observación proporciona un criterio visual para distinguir la gráfica de una función de la gráfica de una relación que no lo sea. Por ejemplo vemos que en la figura que sigue, la gráfica **no** define una función  $y$  de  $x$  en  $\mathbb{R}^+$ , puesto que una recta vertical corta a la gráfica dos veces para algunos puntos de  $D$ .



$$x = y^2$$

Veamos la representación gráfica de algunas funciones fundamentales.

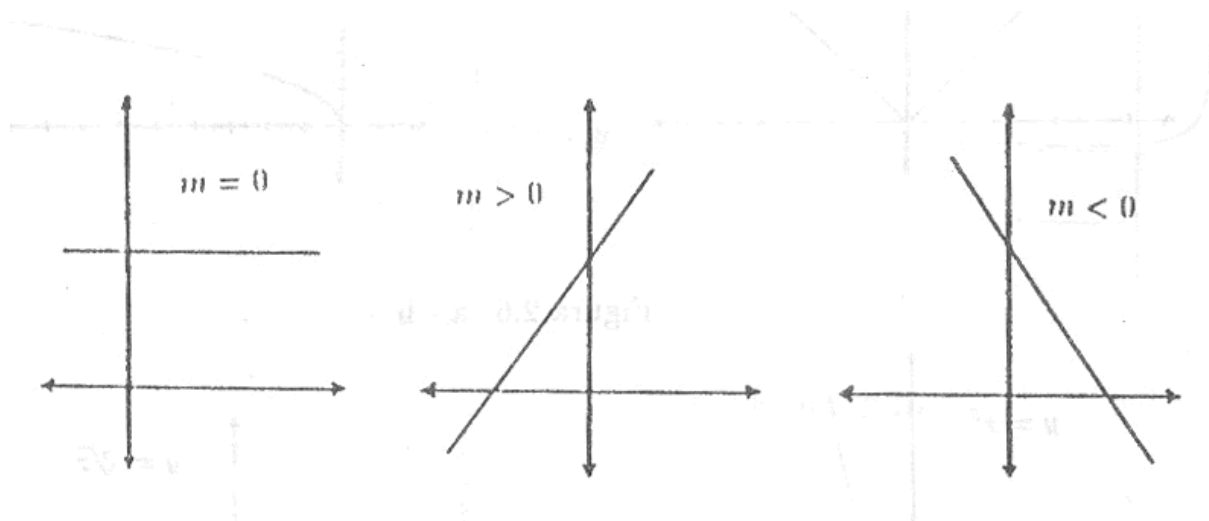
### Funciones Básicas

1. **Función “Lineal”**: es una función de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow mx + b \end{aligned}$$



con  $m, b \in \mathbb{R}$ , que tiene como representación gráfica una recta. Su ubicación en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  depende de los valores de  $m$  y  $b$  (ver Figuras??)

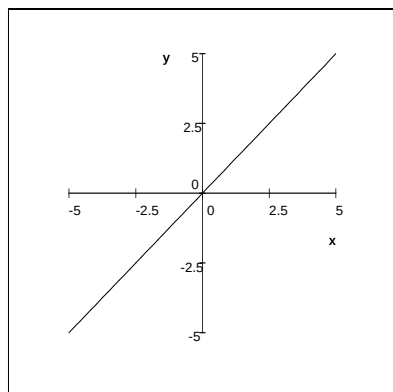


Rectas con pendientes diferentes

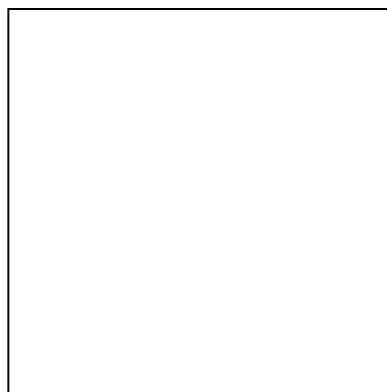
Si  $m = 1$  y  $b = 0$ , se tiene la función identidad

$$\begin{aligned} \text{Id} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \text{Id}(x) = x \end{aligned}$$

cuya representación gráfica corresponde a la gráfica de la recta  $y = x$  (figura que sigue, izquierda)



Función identidad



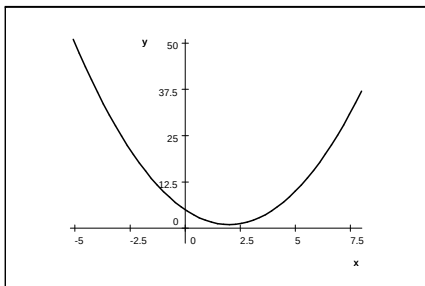
Función Constante  $f(x) = 3$

A la función  $f(x) = b$  (ver figura anterior derecha) también se le dice función constante  $b$

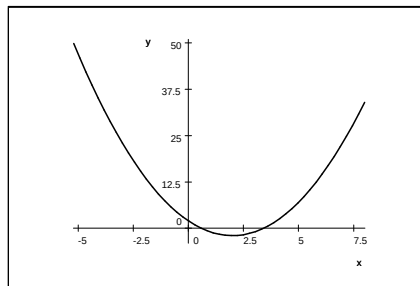
**2. Función Cuadrática:** es una función de la forma

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow ax^2 + bx + c \end{aligned}$$

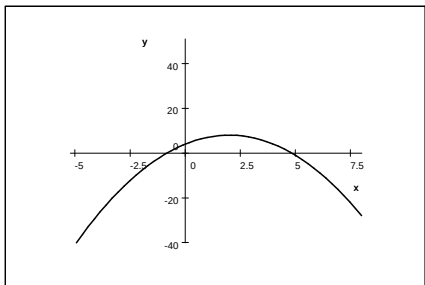
con  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$  que tiene como representación gráfica una parábola. Su ubicación en  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$  depende de los valores de  $a$  y  $\Delta = b^2 - 4ac$  (ver sección 1.3.5).



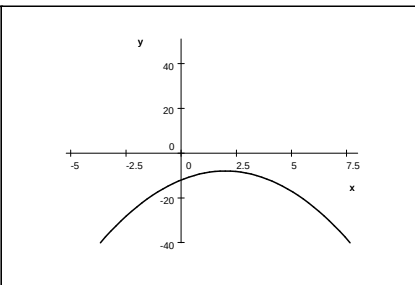
$$b^2 - 4ac < 0, a > 0$$



$$b^2 - 4ac > 0, a > 0$$



$$b^2 - 4ac > 0, a < 0$$



$$b^2 - 4ac < 0, a < 0$$

**Observación:** Para graficar una parábola es conveniente conocer (si existen) las intersecciones con los ejes coordenados y el vértice  $V$  de la parábola cuyas coordenadas son

$$x = \frac{-b}{2a}, \quad y = \frac{-\Delta}{4a}.$$

Además, Si  $a > 0$  se abre hacia arriba. Si  $a < 0$  se abre hacia abajo.

Por ejemplo grafiquemos  $y = 8x - x^2$ .

En este caso  $a = -1, b = 8, c = 0$ . Determinemos (si existen) las intersecciones con los ejes.

Si  $x = 0$  entonces  $y = 0$ .

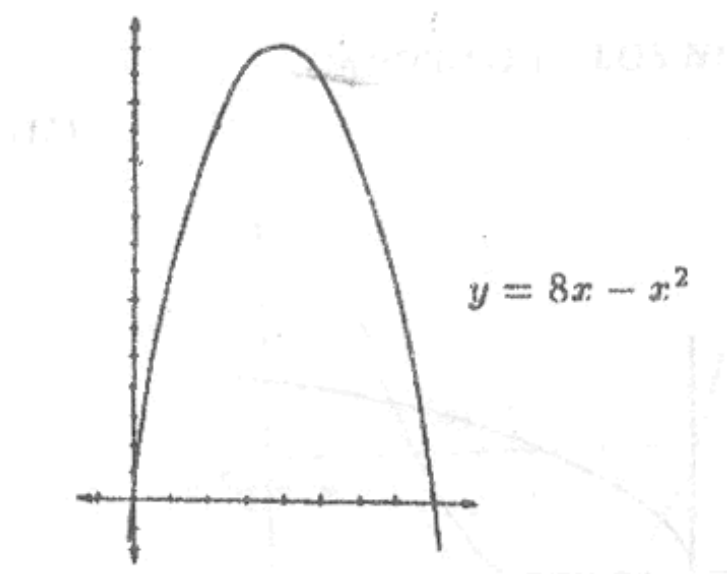
Si  $y = 0$  entonces  $8x - x^2 = 0$  de donde  $x = 0 \vee x = 8$ .

Luego la parábola pasa por los puntos  $(0, 0)$  y  $(8, 0)$ .

El vértice de la parábola está dado por la fórmula

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

Así  $V = (4, 16)$ , y como  $a = -1 < 0$  entonces se abre hacia abajo (ver figura siguiente)



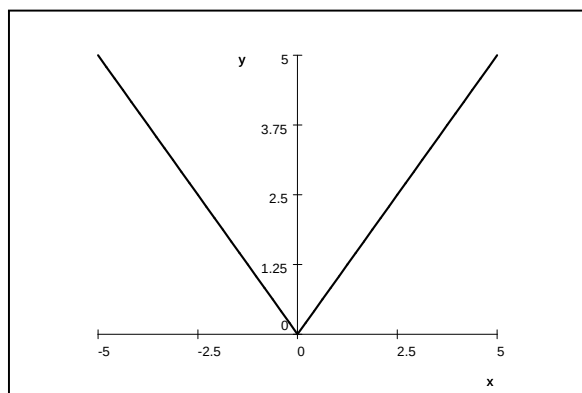
Note además que, si  $a < 0$ , el máximo valor que toma la función  $y = ax^2 + bx + c$  es  $y = -\frac{\Delta}{4a}$  y se alcanza cuando  $x = -\frac{b}{2a}$ . Análogamente si  $a > 0$ , el mínimo de la función también se alcanza en el vértice.

### 3. Función Valor Absoluto:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

esta función tiene como representación la gráfica de la figura.



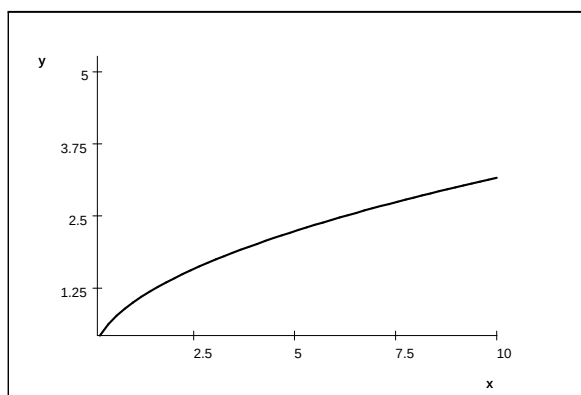
Valor Absoluto  $f(x) = |x|$

### 4. Función Raíz Cuadrada:

$$f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

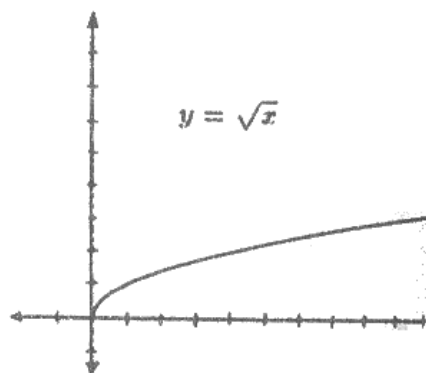
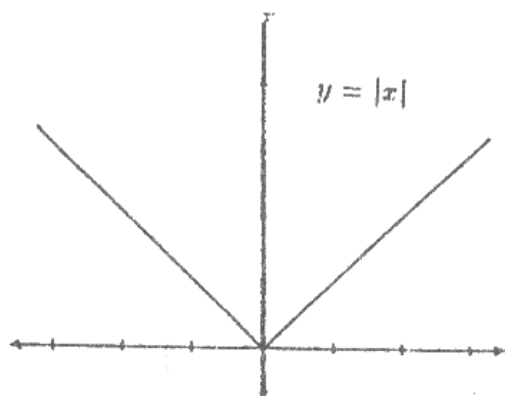
$$x \longrightarrow \sqrt{x}.$$

Tiene como representación gráfica la figura

Raíz  $f(x) = \sqrt{x}$ **5. Función Cúbica:**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^3. \end{aligned}$$

Tiene como representación gráfica la figura que sigue izquierda

**6. Función Raíz Cúbica:**

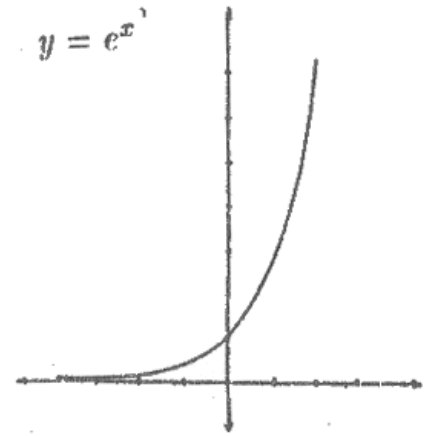
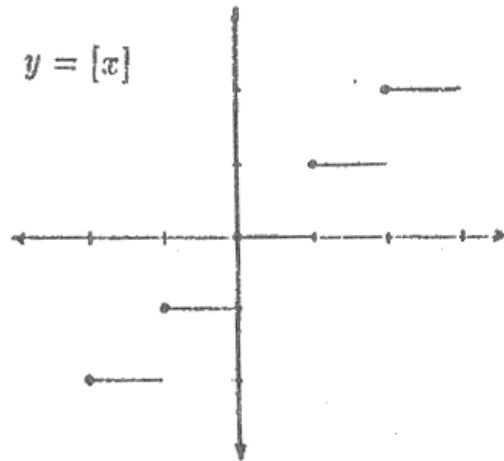
$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt[3]{x}. \end{aligned}$$

Tiene como representación gráfica la figura anterior derecha.

**7. Función Parte Entera:**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow [x] \end{aligned}$$

donde  $[x]$  representa al mayor entero menor o igual que  $x$  y tiene como representación gráfica la figura siguiente, izquierda



### 8. Función Exponencial:

$$\begin{aligned} \exp : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow e^x \end{aligned}$$

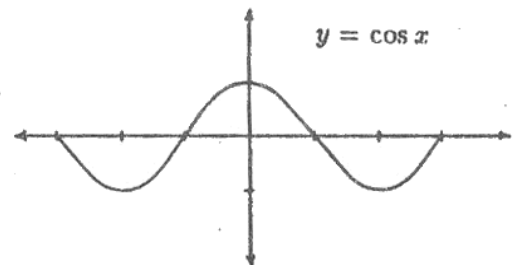
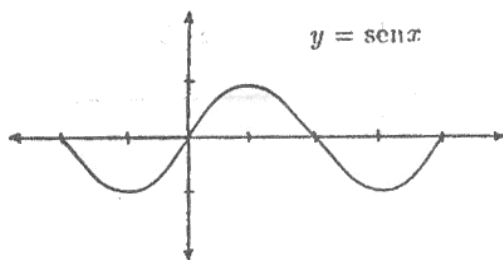
donde  $e \approx 2,71$ . El recorrido de esta función es  $\mathbb{R}^+$ . (La estudiaremos con más detalle en la sección 2.6); figura anterior derecha

### 9. Funciones Seno y Coseno: Son las funciones “trigonométricas”

$$\begin{aligned} \text{sen} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \text{sen } x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cos} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \text{cos } x \end{aligned}$$

que tienen como representación gráfica la figura sigue y que serán estudiadas más adelante.

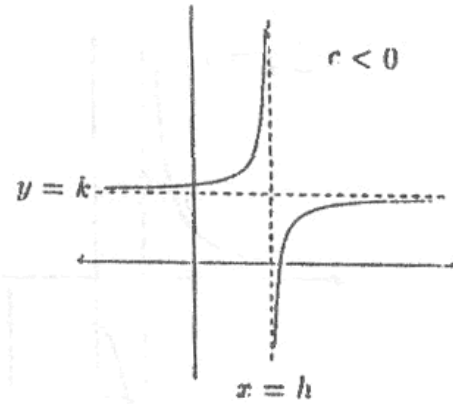
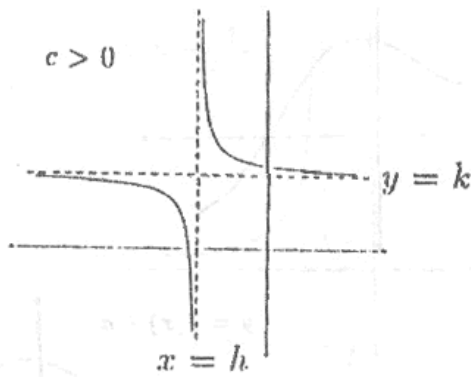


Otras funciones de importancia son las siguientes:

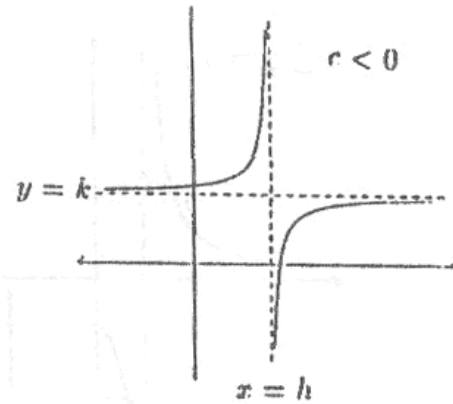
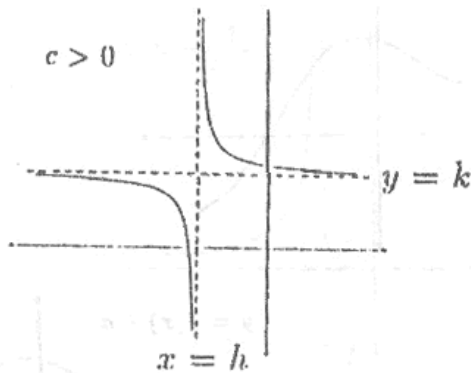
### 10. Función hipérbola equilátera: Es una función de la forma

$$y = \frac{c}{x-h} + k \quad \text{donde } h, k \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} - \{0\}$$

con dominio  $\mathbb{R} - \{h\}$  (muchas veces se escribe  $(y-k)(x-h) = c$ ), cuya representación gráfica es una hipérbola equilátera. (ver siguiente figura)



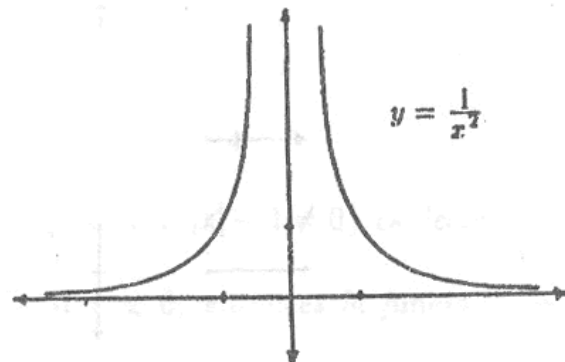
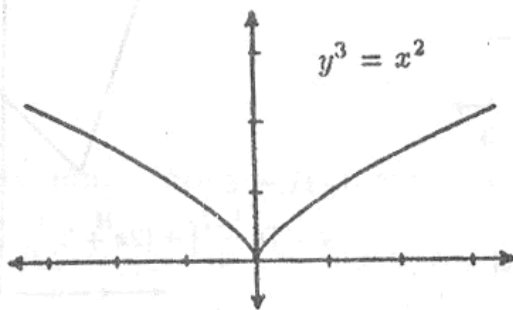
En particular, la gráfica de  $y = \frac{1}{x}$  y la gráfica de  $y = -\frac{1}{x}$  son las siguientes



11. **Función parábola semicúbica**(o gaviota)

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt[3]{x^2} \end{aligned}$$

cuya representación gráfica es la figura izquierda siguiente



12. **Función “volcán”**

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$

cuya representación gráfica esta en la figura anterior a la derecha

Dada la gráfica de una función  $f$ , el dominio de ella corresponde a la sombra o proyección de la gráfica sobre el eje horizontal (eje  $OX$ ), y el recorrido de  $f$  corresponde a la proyección sobre el eje vertical (eje  $OY$ ).

De esa forma el dominio de la función Raíz Cuadrada es  $\mathbb{R}_0^+$ . Las funciones Seno y Coseno tienen como recorrido  $[-1,1]$ ; el recorrido de la función del Valor Absoluto es  $\mathbb{R}_0^+$ , la función Parte Entera tiene como recorrido a  $\mathbb{Z}$ . Finalmente, el recorrido de la función Hipérbola Equilátera es  $\mathbb{R} - \{k\}$ .

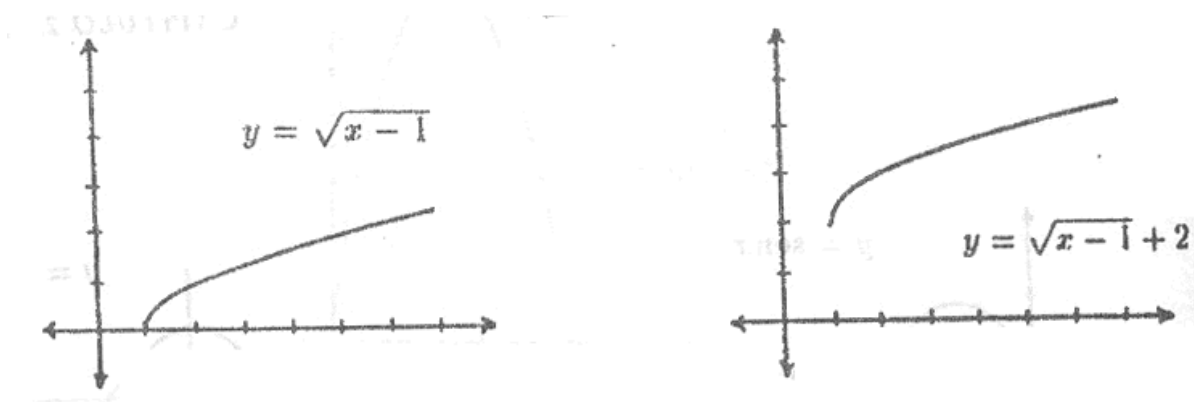
En base a las gráficas dadas anteriormente podemos graficar otras funciones.

### Ejemplo 85 Grafiquemos la función

$$f: \begin{array}{ll} [1, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow \sqrt{x-1} \end{array}$$

Para ello tomaremos como referencia la gráfica de la función raíz cuadrada (figura ??-b). El dominio  $D = [1, +\infty[$  se ubica en el eje  $x$  de modo que la curva se traslada hacia la derecha comenzando de 1. Note que si  $x = 1$  entonces  $f(x) = 0$  luego, se tiene el gráfico siguiente

a la izquierda



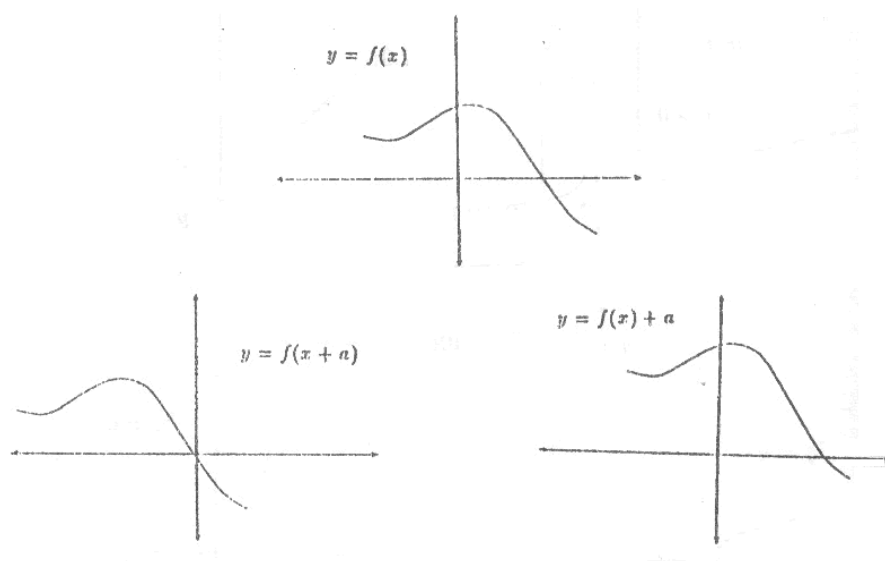
En cambio si consideramos la función

$$f: \begin{array}{ll} [1, +\infty[ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow \sqrt{x-1} + 2 \end{array}$$

entonces la curva se traslada hacia arriba pues la imagen de  $x = 1$  es  $f(1) = 2$  y se obtiene el gráfico derecho de la figura anterior.

Así, conociendo la gráfica de  $f(x)$  uno puede obtener la gráfica de  $h(x) = f(x+a)$  y  $v(x) = f(x) + a$ , que corresponde, en el caso de la función  $h(x)$ , a mover hacia la izquierda o derecha la gráfica de  $f(x)$  y en el caso de la función  $v(x)$ , subir o bajar la gráfica de  $f(x)$  (ver figuras siguientes <sup>4</sup>.)

<sup>4</sup> Piense que la gráfica de la función  $f(x)$  está hecha de un alambre rígido, el cual se puede tomar y mover.



**Ejemplo 86** Grafiquemos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor \end{aligned}$$

En este caso tomaremos como referencia la función parte entera.

Note que  $\frac{2}{3}x \in [0, 1[$ , si y sólo si,  $\left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = 0$ , es decir,

$$0 \leq \frac{2}{3}x < 1 \iff \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = 0$$

luego,

$$0 \leq x < \frac{3}{2} \iff \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = 0$$

Análogamente  $\frac{2}{3}x \in [1, 2[$  si y sólo si  $\left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = 1$ , es decir,

$$1 \leq \frac{2}{3}x < 2 \iff \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = 1$$

luego,

$$\frac{3}{2} \leq x < 3 \iff \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = 1$$

En general, si  $\frac{2}{3}x \in [n, n+1[$  con  $n \in \mathbb{Z}^+$ , entonces  $\left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = n$  lo que equivale a:

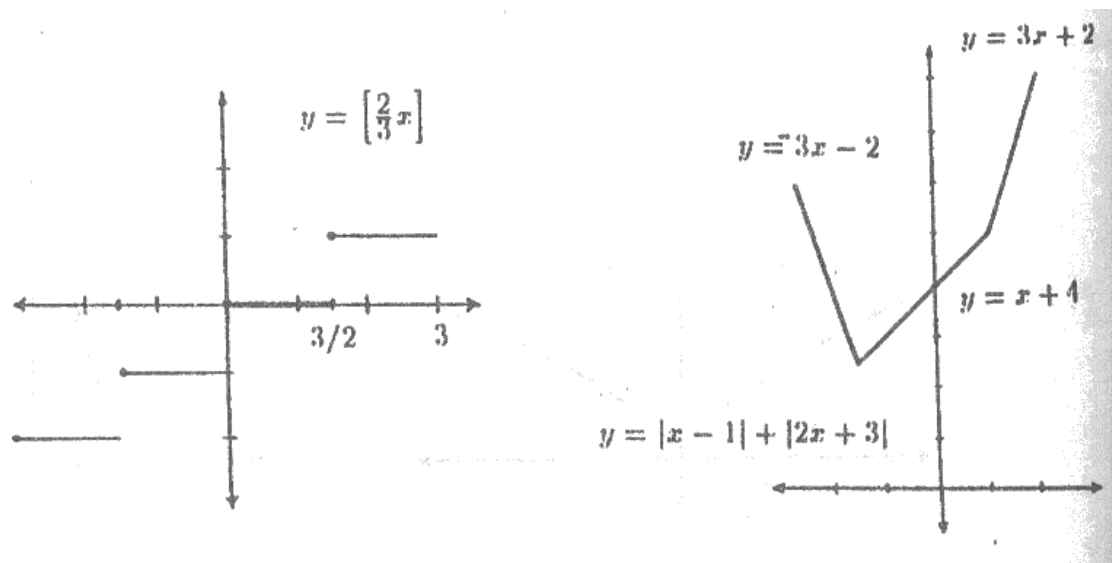
$$n \leq \frac{2}{3}x < n+1 \iff \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = n$$

es decir,

$$\frac{3}{2}n \leq x < \frac{3}{2}(n+1) \iff \left\lfloor \frac{2}{3}x \right\rfloor = n$$

La gráfica de la función anterior aparece en el grafico izquierdo de las figuras siguiente





**Ejemplo 87** Grafiquemos la función

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow |x - 1| + |2x + 3| \end{aligned}$$

Previamente escribamos la función por partes. De la tabla obtenemos los signos de  $x - 1$  y  $2x + 3$  que finalmente nos dan la “forma” que toman los valores absolutos  $|x - 1|$  y  $|2x + 3|$  en los intervalos que se señala:

|          | $] -\infty, -3/2[$ | $]-3/2, 1[$ | $] 1, \infty[$ |
|----------|--------------------|-------------|----------------|
| $x - 1$  | -                  | -           | +              |
| $2x + 3$ | -                  | +           | +              |

Si  $x \in ] -\infty, -3/2[$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x) = |x - 1| + |2x + 3| &= -(x - 1) + (-(2x + 3)) \\ &= -3x - 2 \end{aligned}$$

Si  $x \in ] -3/2, 1[$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x) = |x - 1| + |2x + 3| &= -(x - 1) + (2x + 3) \\ &= x + 4 \end{aligned}$$

Si  $x \in ] 1, \infty[$ , entonces

$$\begin{aligned} f(x) = |x - 1| + |2x + 3| &= (x - 1) + (2x + 3) \\ &= 3x + 2 \end{aligned}$$

Luego,

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 2 & x \leq -\frac{3}{2} \\ x + 4 & -\frac{3}{2} < x < 1 \\ 3x + 2 & 1 < x \end{cases}$$

cuya representación gráfica se muestra en la figura anterior derecha

**Ejemplo 88** Grafiquemos la función

$$f(x) = [x] + |x - 1|$$

en el intervalo  $[-1, 2[$ .

**Solución:** Interpretemos a  $f$  como una función definida por partes. Para esto consideremos los siguientes casos.

**Caso 1:** Si  $x \in [-1, 0[$ , entonces

$$[x] = -1 \quad \text{y} \quad |x - 1| = -(x - 1)$$

luego,

$$f(x) = -1 - x + 1 = -x$$

**Caso 2:** Si  $x \in [0, 1[$ , entonces

$$[x] = 0 \quad \text{y} \quad |x - 1| = -(x - 1)$$

luego,

$$f(x) = 0 - x + 1 = 1 - x$$

**Caso 3:** Si  $x \in [1, 2[$ , entonces

$$[x] = 1 \quad \text{y} \quad |x - 1| = x - 1$$

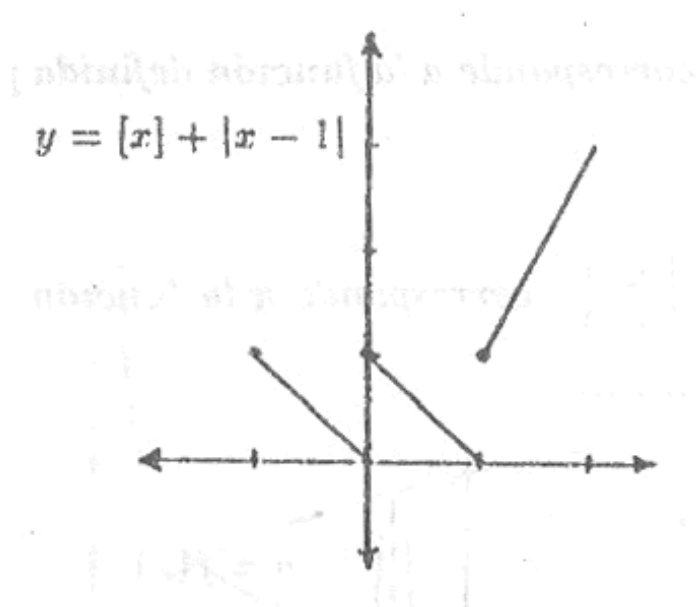
luego,

$$f(x) = 1 + x - 1 = x$$

En consecuencia

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x & \text{si } 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

y su gráfica es la que se muestra en la figura siguiente



**Ejercicio 89** Grafique

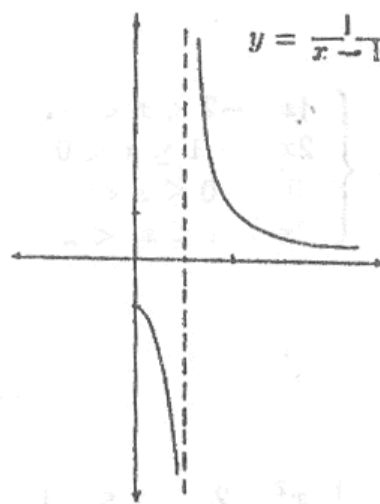
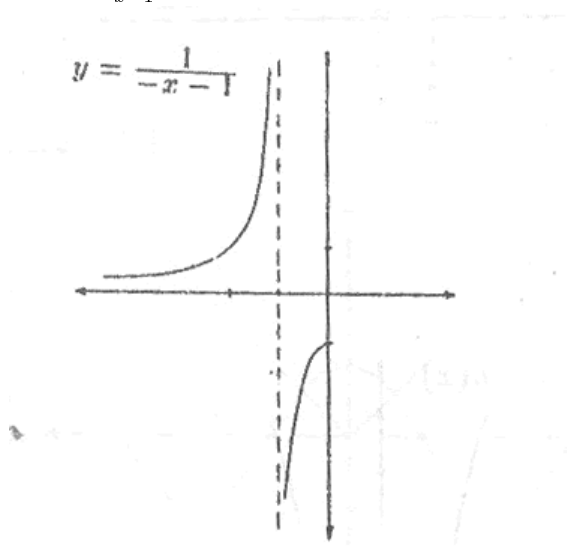
$$y = \frac{1}{|x| - 1}$$

**Solución:** Sea  $y = f(x)$ , entonces  $\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : |x| - 1 \neq 0\}$  es decir,  $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$ .

Puesto que  $|x| = x$  si  $x \geq 0$  y  $|x| = -x$  si  $x < 0$ , entonces la función  $y = \frac{1}{|x| - 1}$  corresponde a la función definida por partes;

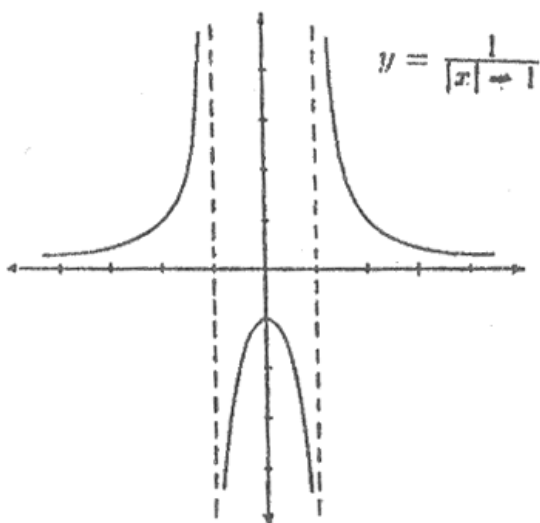
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x \geq 0 \text{ con } x \neq 1 \\ \frac{1}{-x-1} & x < 0 \text{ con } x \neq -1 \end{cases}$$

Sea  $x < 0$  con  $x \neq -1$ . Entonces, según la gráfica de la hipérbola equilátera, la representación gráfica de  $y = \frac{1}{-x-1}$  es el grafico izquierdo siguiente



Sea  $x \geq 0$  con  $x \neq 1$  entonces por la razón anterior, la representación gráfica de  $y = \frac{1}{x-1}$  (es la figura derecha anterior)

Luego uniendo las gráficas obtenemos la gráfica de  $y = \frac{1}{|x|-1}$  (dada en figura siguiente).



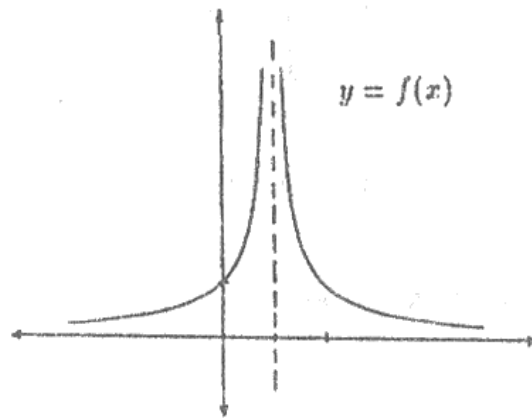
**Ejercicio 90** Complete las siguientes afirmaciones.

1. La función  $f(x) = \frac{1}{|x-1|}$  definida en  $\mathbb{R} - \{1\}$  corresponde a la función definida por partes .....  
cuya gráfica es .....
2. La función  $g(x) = 2[x]|x|$  definida en  $] -2, 2[$  corresponde a la función definida por partes .....  
cuya gráfica es .....
3. La función  $h(x) = |x^2 - 1| - 1$  definida en  $\mathbb{R}$  corresponde a la función definida por partes .....  
cuya gráfica es .....
4. La función  $l(x) = \begin{cases} |x| & x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$  corresponde a la función definida por partes ..... cuya gráfica es .....

5. La función  $q(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|-4} & |x| \geq 4 \\ \sqrt{4-|x|} & |x| < 4 \end{cases}$  corresponde a la función definida por partes ..... cuya gráfica es .....

**Solución:**

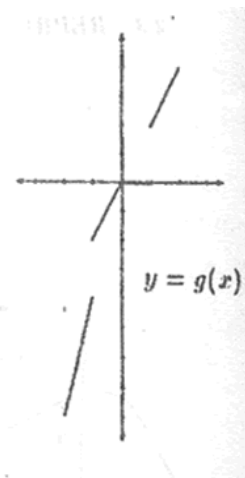
$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & x > 1 \\ -\frac{1}{x-1} & x < 1 \end{cases}$$



1.

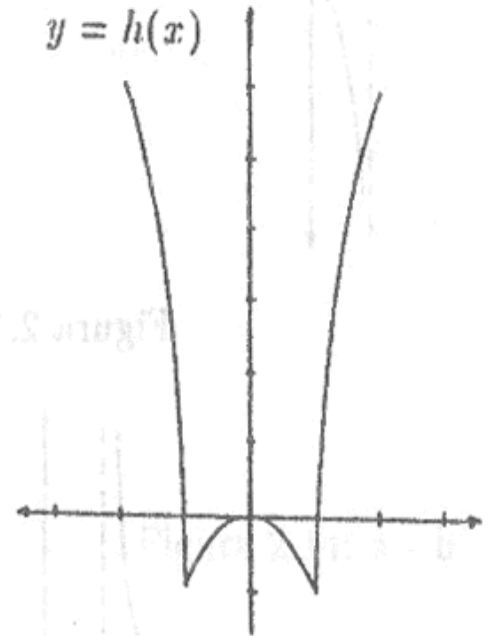
$$2. g(x) = \begin{cases} 4x & -2 < x < -1 \\ 2x & -1 \leq x < 0 \\ 0 & 0 \leq x < 1 \\ 2x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

$y = h(x)$



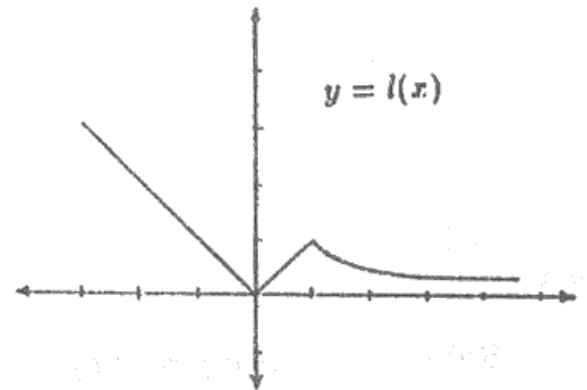
2.

$$3. \quad h(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & x \leq -1 \\ -x^2 & -1 < x \leq 1 \\ x^2 - 2 & x > 1 \end{cases}$$



3.

$$4. \quad l(x) = \begin{cases} -x & x < 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}$$



4.

$$5. \quad q(x) = \begin{cases} \sqrt{-x-4} & x \leq -4 \\ \sqrt{4+x} & -4 < x < 0 \\ \sqrt{4-x} & 0 < x < 4 \\ \sqrt{x-4} & x \geq 4 \end{cases}$$



5.

### 2.3.1 Raíces mediante gráficas

Se sabe que las raíces de la ecuación

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (2.1)$$

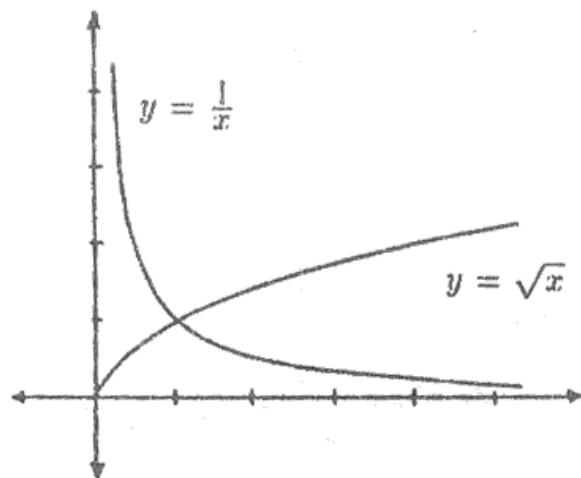
corresponden gráficamente a la intersección de la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  con el eje  $OX$ , cuya ecuación es  $y = 0$ , es decir, corresponde a la(s) solución(es) del sistema.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{array} \right\}$$

En forma análoga se tiene que resolver la ecuación

$$\sqrt{x} - \frac{1}{x} = 0 \quad \text{o} \quad \sqrt{x} = \frac{1}{x} \quad (2.2)$$

se reduce a encontrar la intersección de las gráficas de las funciones  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \frac{1}{x}$  (ver figura siguiente)

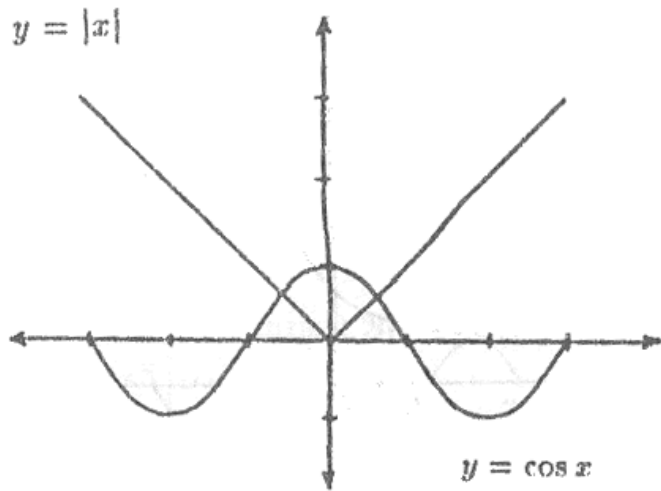


Así, tenemos que la ecuación anterior tiene sólo una solución.

El método gráfico no sólo sirve para encontrar raíces sino para saber si las hay y cuántas son.

**Ejemplo 91** La ecuación  $|x| - \cos x = 0$  tiene sólo 2 raíces reales.

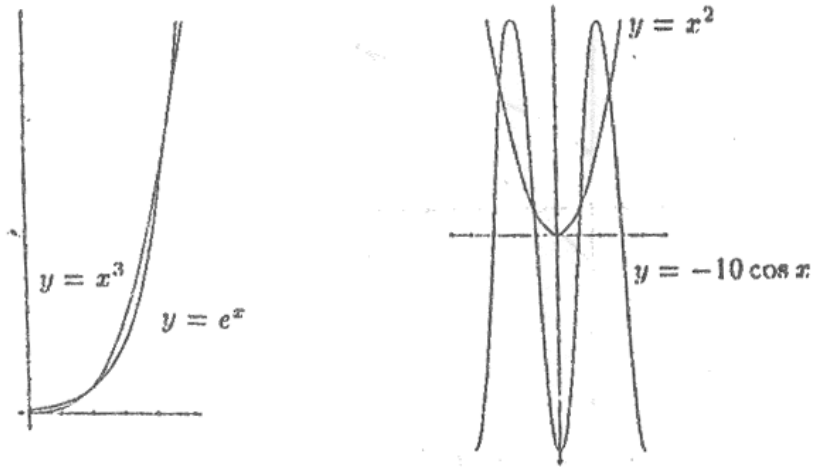
En efecto, si graficamos las funciones  $y = |x|$  e  $y = \cos x$  tenemos las figuras:



**Ejemplo 92** La ecuación

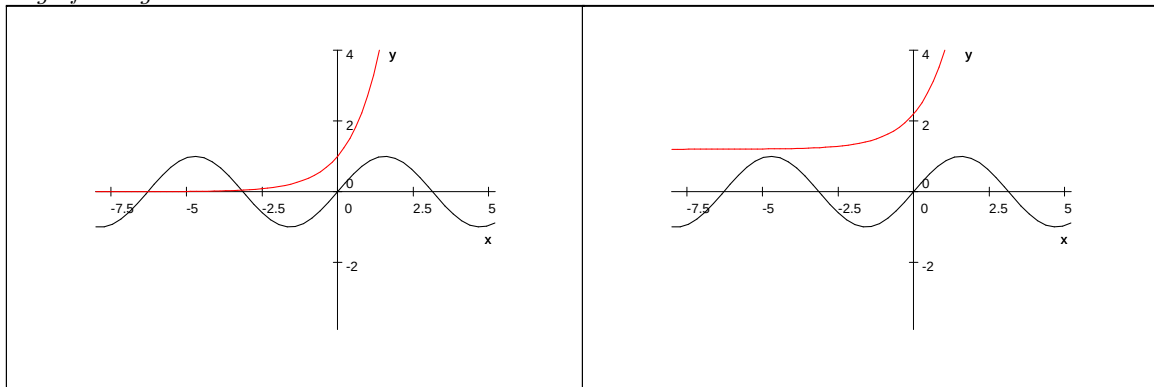
$$x^3 - e^x = 0$$

tiene sólo 2 raíces reales, como se puede ver en el gráfico izquierdo que sigue



**Ejemplo 93** La ecuación  $x^2 + 10 \cos x = 0$  tiene 4 raíces reales (figura derecha anterior)

**Ejemplo 94** La ecuación  $e^x - \sin x = 0$  tiene infinitas soluciones y todas negativas, como se puede ver en el gráfico siguiente.



**Ejemplo 95** Finalmente, la ecuación

$$e^x + 1 - \sin x = 0$$

no tiene solución real como se ve en la gráfica de la figura derecha anterior

Por otra parte, observemos que también mediante gráficas podemos obtener la solución de inecuaciones. Por ejemplo resolvamos la siguiente inecuación mediante gráficas.

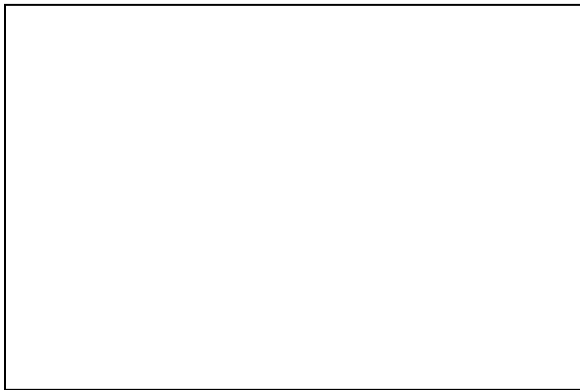
**Ejemplo 96** Resolvamos la inecuación

$$x - 1 \leq \sqrt{2x + 1}$$

Consideremos las curvas de las funciones;

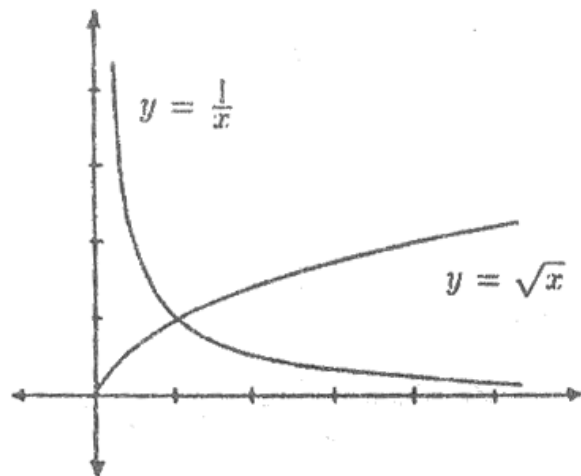
$$y = \sqrt{2x + 1} \quad \text{e} \quad y = x - 1$$

que aparecen en la figura



Es claro que para  $x \in [-\frac{1}{2}, 4]$  los valores que toma la expresión  $y = x - 1$  son menores o iguales a los valores que toma la expresión  $y = \sqrt{2x + 1}$ . Por lo tanto, la solución de la inecuación es  $[-\frac{1}{2}, 4]$ .

Análogamente observando la figura



, vemos que la solución de la inecuación

$$\sqrt{x} < \frac{1}{x}$$

es el intervalo  $]0, 1[$ , puesto que la gráfica de la función  $y = \sqrt{x}$  está bajo la gráfica de la función  $y = \frac{1}{x}$  sólo en  $]0, 1[$ .

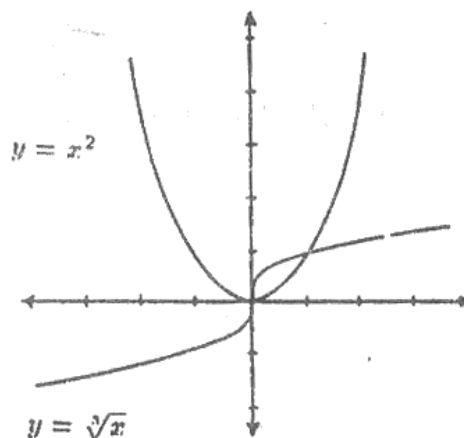
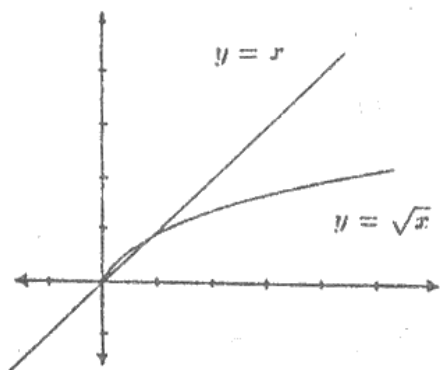
**Ejercicio 97** Resuelva gráficamente

$$\sqrt{x} < x$$

**Solución:** Graficando las funciones  $y = \sqrt{x}$  e  $y = x$  (ver figura izquierda siguiente) obtenemos que la función  $y = \sqrt{x}$  toma valores menores que  $y = x$  sólo si  $x > 1$ .

Por lo tanto,  $S = ]1, \infty[$



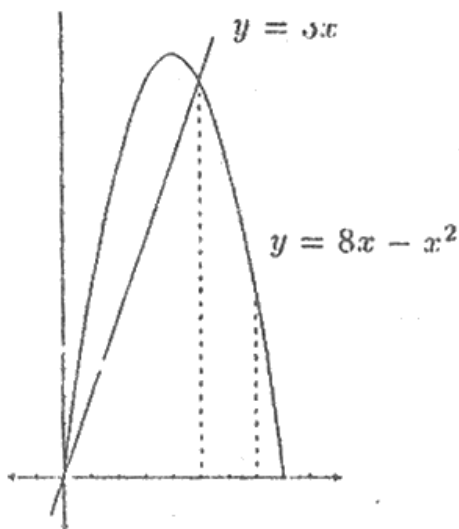


**Ejercicio 98** Resuelva gráficamente

$$\sqrt[3]{x} - x^2 \geq 0$$

**Solución:** Graficando las funciones  $y = \sqrt[3]{x}$  e  $y = x^2$  (figura anterior derecha), obtenemos que el conjunto solución es  $S = [0, 1]$

**Ejercicio 99** Dependiendo de la tecnología usada para fabricar  $x$  miles unidades de un artículo, se tiene dos posibilidades de ganancia al vender dichos artículos (considere las siguientes funciones o modelos que representan la ganancia, figura siguiente):



$$y = 8x - x^2, \quad y = 3x$$

Si se desea fabricar hasta 7 mil artículos. ¿Para qué valores de  $x$  el segundo modelo predice una mayor utilidad respecto al primer modelo?

**Solución:** Graficando las funciones  $y = 8x - x^2$ ,  $y = 3x$  con  $0 < x < 7$  vemos que la función  $y = 3x$  toma valores mayores que  $y = 8x - x^2$  si  $5 < x < 7$ , luego el segundo modelo predice mayor utilidad que el primer modelo para  $x$  entre 5 y 7 mil unidades.

## 2.4 Aplicaciones de Funciones, Modelación

Con el objeto de utilizar los resultados del cálculo diferencial e integral en la resolución de problemas concretos, muchas veces es necesario tener claro el concepto de función y por supuesto, ser capaz de identificar el problema con una función concreta, que se llama “modelar” matemáticamente, ya que con la manipulación matemática de ella, se puede obtener la información requerida.

El ejemplo siguiente nos da un caso concreto de tal problemática.

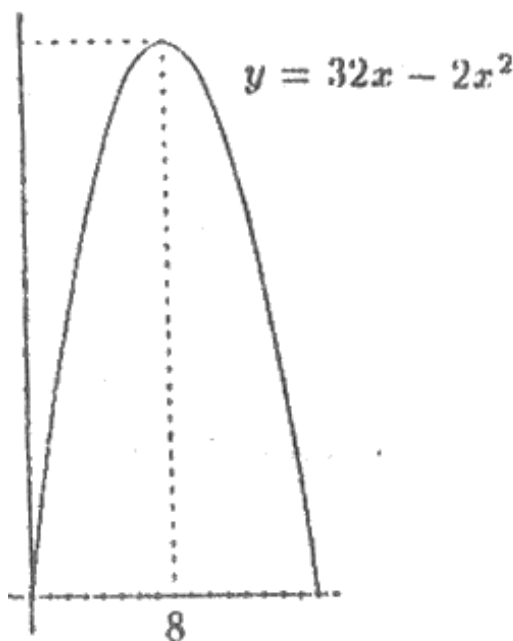
*La potencia suministrada a un circuito por una fuerza electromotriz igual a 32 Voltios y resistencia interna de 2 Ohms es  $32x - 2x^2$  Volts donde  $x$  es la corriente medida en Amperios.*

*¿Cuál es la corriente que hace que el generador suministre la máxima potencia?*

Aquí nos piden el valor máximo que toma la función

$$f(x) = 32x - 2x^2,$$

que tiene como gráfica la parábola  $y = 32x - 2x^2$  (ver figura que sigue),



y cuyo valor máximo está en el vértice, es decir, el valor máximo de la función es  $f(8) = 32 \cdot (8) - 2 \cdot (8)^2 = 128$ .

En este caso el problema fue resuelto fácilmente gracias a que contábamos con la función, o, mejor dicho, con la fórmula.

En general una función puede expresarse de los siguientes modos:

- 1) Mediante un enunciado: *La longitud de una circunferencia es  $2\pi$  veces el radio de ella.*
- 2) Mediante una tabla de valores:

|     |   |               |      |               |
|-----|---|---------------|------|---------------|
| $r$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1    | $\frac{3}{2}$ |
| $C$ | 0 | 3.14          | 6.28 | 12.6          |

- 3) Mediante una fórmula, ecuación:

$$C = 2\pi r$$

Nuestro objetivo en esta sección es llevar *enunciados* de problemas a *fórmulas* (*funciones*) que nos permitan trabajar matemáticamente.

Si las variables  $x$  e  $y$  están relacionadas de modo que siempre que se asigne un valor a  $x$ , se pueda determinar un valor correspondiente  $y$ , se dice que  $y$  depende de  $x$ ; de allí que reciban los nombres:

$x$  variable independiente  
y variable dependiente

Algunos ejemplos que muestran las variables dependiente e independiente son:

- 1) *El área  $A$  de un círculo depende del radio  $r$*
- 2) *La velocidad de crecimiento de la vegetación depende del tiempo*
- 3) *El precio de un artículo depende de la oferta y de la demanda*
- 4) *El franqueo postal hasta un destino dado depende del peso (y del volumen) del paquete*

Muchas veces los papeles de las variables independientes con las variables dependientes son intercambiables, por ejemplo,

$$C = 2\pi r$$

que nos da la longitud  $C$  de una circunferencia cuando conocemos el radio  $r$ , pero también puede ser visto como

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

para el caso en que se nos dé la longitud  $C$  de la circunferencia y quisiéramos calcular su radio.

En los siguientes ejercicios llegaremos a una función, que se obtiene del enunciado del problema, correspondiendo este tipo de ejercicio a lo que se entiende por **modelación matemática**. El dominio de la función obtenida se debe restringir a las condiciones del problema considerando donde tiene sentido la variable utilizada, obteniendo un nuevo dominio que llamaremos **dominio del problema** y lo denotaremos  $\text{Dom}P(f)$ .

Por ejemplo: Supongamos que  $x$  indica la longitud de un lado de una caja y la función  $A(x) = x(10-x)$  representa el área de la caja.

Entonces el dominio de la función (mirada no en el contexto del problema) es  $\mathbb{R}$ , pero considerando  $A(x)$  como área y teniendo presente que  $x$  es una longitud entonces debemos asegurarnos de que

$$x > 0 \quad \text{y} \quad 10 - x > 0$$

de donde  $0 < x < 10$ , luego el dominio del problema es  $\text{Dom}P(A) = ]0, 10[$ .

**Ejercicio 100** *La compañía de arriendo de autos "Jiménez", arrienda automóviles Chevette a \$ 10.500 por día y 40 pesos por kilómetro recorrido, mientras que la compañía "Arancibia" arrienda el mismo tipo de auto a \$ 8.900 por día y a 60 pesos por kilómetro.*

- a) *Si  $x$  representa el número de kilómetros recorrido en un día, encuentre las funciones  $C_A(x)$ ,  $C_J(x)$  que representan el costo por arrendar un Chevette en la compañía "Arancibia" y "Jiménez" respectivamente.*
- b) *¿Cuántos kilómetros se debe recorrer en el día para que convenga arrendar el auto de la compañía "Jiménez"? Entregue si es posible una solución gráfica.*

**Solución:** a) Si  $x$  representa el número de kilómetros recorrido en un día, entonces el costo por arrendar un Chevette en cada compañía es;

$$C_J(x) = 10500 + 40x, \quad C_A(x) = 9800 + 60x \quad \text{con } x \geq 0$$

b) Conviene arrendar el auto de la compañía "Jiménez" cuando el costo sea menor que el de la compañía "Arancibia", luego debemos resolver

$$C_A(x) > C_J(x)$$

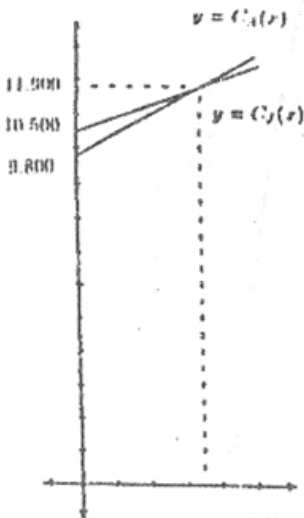
lo que equivale a

$$9800 + 60x > 10500 + 40x$$

de donde  $35 < x$ . Es decir, conviene arrendar el auto de la compañía "Jiménez" si se recorren más de 35 kilómetros.

Ahora veamos una solución gráfica para el problema.

Consideremos las rectas  $y = 10500 + 40x$  e  $y = 9800 + 60x$  que representan a las funciones  $C_J$ ,  $C_A$  respectivamente. Observando figura que sigue, vemos que los valores de la función  $C_J(x)$  son menores que los de la función  $C_A(x)$  si  $x > 35$ .



**Ejercicio 101** El impuesto  $T$  a la venta de ciertos artículos (taxable) es de 18 % sobre el valor  $x$  del artículo. Si  $T$  y  $x$  están dados en pesos.

a) Exprese  $T$  en función de  $x$ .

b) Calcule  $T(200)$  y  $T(5.65)$ .

**Solución:** a)  $T(x) = \frac{18}{100}x$  con  $x > 0$ .

b)  $T(200) = \frac{18}{100}200 = 36$  y  $T(5.65) = \frac{18}{100}5.65$

**Ejercicio 102** Si el franqueo en el servicio de correos de U.S.A. es de 8 centavos por onza o fracción de onza,  $x$  es el peso de la carta (en onzas) e  $y$  representa el franqueo requerido para tal carta, exprese  $y$  en función de  $x$ .

**Solución:**  $x$  puede ser un número entero de onzas, o bien puede ser algunas onzas más fracción de onza. En el primer caso el franqueo será simplemente

$$y(x) = 0.08x = 0.08[x]$$

pero en el segundo caso el franqueo será

$$y(x) = 0.08([x] + 1)$$

por lo tanto,

$$y(x) = \begin{cases} 0.08([x] + 1) & x \in \mathbb{R}^+ - \mathbb{Z}^+ \\ 0.08x & x \in \mathbb{Z}^+ \end{cases}$$

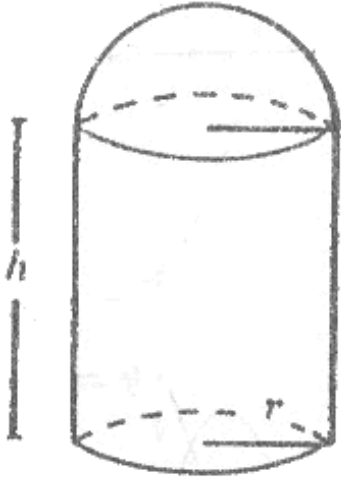
o con  $x \in \mathbb{R}^+$

$$y(x) = 0.08([x] - [[x] - x])$$

también

$$y(x) = 0.08 \mid [-x] \mid$$

**Ejercicio 103** Se desea construir un silo en forma cilíndrica rematado por una bóveda semiesférica como se indica en la figura



- Expresar el volumen del silo en función de  $r$  y  $h$ .
- Expresar el área del silo en función de  $r$  y  $h$ .
- Si el costo de construcción por metro cuadrado es el doble en la bóveda y el suelo comparado con la parte cilíndrica y el volumen del silo es  $V_0[m^3]$ , expresar el costo de construcción  $C$  como función de  $r$  y encontrar  $\text{Dom}P(C)$ .

**Solución:** a) Como el volumen de la semiesfera es  $\frac{2}{3}\pi r^3$  y el volumen del cilindro es  $\pi r^2 h$  se tiene que el volumen del silo es el volumen de la bóveda más el volumen del cilindro

$$V = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

b) Como el área del techo (semiesfera) es  $2\pi r^2$ , el área de las paredes (cilindro) es  $2\pi r h$  y el área del suelo (círculo) es  $\pi r^2$ , se tiene que el área total del silo es

$$A = 2\pi r^2 + 2\pi r h + \pi r^2$$

c) El costo total de construcción del silo está dado por la suma de los costos de construcción de la bóveda, las paredes y el suelo. Si  $l$  es el costo por metro cuadrado de construcción de la parte cilíndrica (paredes), entonces el costo total de construcción está dado por una función que depende de  $h$  y  $r$

$$C = (2\pi r^2)(2l) + (2\pi r h)l + (\pi r^2)(2l).$$

Pero el volumen del silo es fijo,  $V_0$ , por lo tanto

$$V_0 = \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h$$

así, despejando  $h$

$$h = \left( \frac{V_0 - \frac{2}{3}\pi r^3}{\pi r^2} \right) \quad (2.3)$$

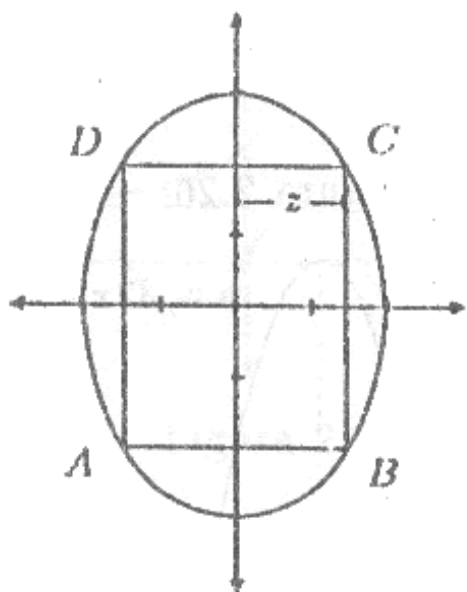
y por lo tanto el costo dado dependiendo solamente de  $r$  es

$$C = 6\pi r^2 l + 2\pi r l \left( \frac{V_0}{\pi r^2} - \frac{2}{3}r \right)$$

donde  $r > 0$  y  $h > 0$  pero por 2.3  $h$  será positivo si  $V_0 - \frac{2}{3}\pi r^3 > 0$ , con  $r > 0$  de donde  $0 < r < \sqrt[3]{\frac{3V_0}{2\pi}}$ . Luego, el dominio del problema es

$$\text{Dom}P(f) = ]0, \sqrt[3]{\frac{3V_0}{2\pi}}[$$

**Ejercicio 104** Considere  $R$  un rectángulo ( $ABCD$ ) con sus lados paralelos a los ejes, inscrito en la elipse  $9x^2 + 4y^2 = 36$ . Sea  $z$  la distancia entre un lado vertical de  $R$  y el eje  $y$  (ver figura)



- a) Determine el área de  $R$  como una función de  $z$ ,  $A(z)$ .  
 b) ¿Para qué valores de  $z$ , tiene  $A(z)$  sentido en este problema?

**Solución:** a) Sea  $C$  el vértice del rectángulo  $R$  ubicado en el primer cuadrante  $C = (z, y)$ , entonces los lados del rectángulo son  $|\overline{AB}| = 2z$  y  $|\overline{BC}| = 2y$ . Por lo tanto, el área de  $R$  es  $A = 2z2y = 4zy$ . Pero  $C$  pertenece a la elipse, así que sus coordenadas satisfacen la ecuación  $9x^2 + 4y^2 = 36$ , de donde, despejando  $y$ , se tiene

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{36 - 9z^2} \quad \vee \quad y = -\frac{1}{2}\sqrt{36 - 9z^2}$$

como  $y$  es una distancia, entonces  $y = \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2}$  y por lo tanto el área de  $R$  nos queda

$$A = 4z \frac{3}{2}\sqrt{4 - z^2} = 6z\sqrt{4 - z^2}$$

b) La función  $A(z) = 6z\sqrt{4 - z^2}$  tiene un dominio matemático ( $\text{Dom}(A) = \{z : 4 - z^2 \geq 0\}$ ) pero el dominio del problema es  $\text{Dom}P(A) = ]0, 2[$ , ya que  $z$  es una distancia (y por lo tanto debe ser positiva)

**Ejercicio 105** La concurrencia media en un cine en el que la entrada vale \$ 1200 es de 100 personas. El empresario tiene buenas razones para creer que cada vez que se reduce el precio en \$ 80, el número de espectadores aumenta en 20.

- a) Determine la recaudación  $R$  en función del precio  $p$ .
- b) ¿Qué precio y número de espectadores producirán mayor taquilla?
- c) ¿Cuál es la recaudación máxima por sesión?

**Solución:** a) Sea  $n$  es el número de espectadores y  $p$  el precio de la entrada, entonces la recaudación será

$$R = np$$

Sea  $l$  el número de veces que se reduce el precio en \$ 80, luego el precio  $p$  estará dada por

$$p = 1200 - 80l \text{ donde } l \in \mathbb{N} \quad (2.4)$$

Además, por cada vez que se reduce el precio, el número de espectadores aumenta en 20, luego

$$n = 100 + 20l$$

pero por 2.4,  $l = \frac{1200-p}{80}$   
 Por lo tanto

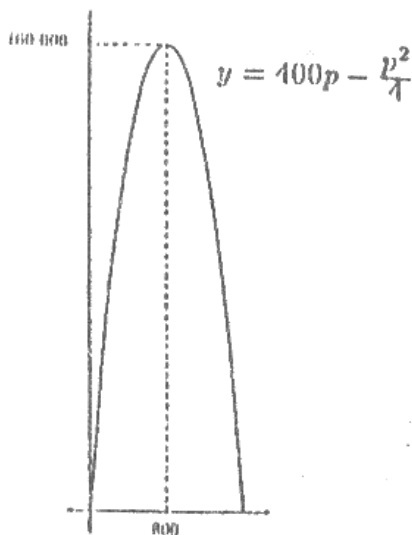
$$R(p) = \left(100 + 20 \left(\frac{1200-p}{80}\right)\right) p$$

donde  $p \in \{1200 - 80l : l \in \mathbb{N}\} \cap ]0, 1200]$

La función  $R(p)$  es equivalente a;

$$R(p) = \left(100 + 20 \left[\frac{1200-p}{80}\right]\right) p$$

- b) Como  $R(p)$  es la parábola de la figura



la máxima recaudación se encuentra cuando el precio es  $p = 800$  y con una taquilla  $n = 400 - \frac{800}{4} = 400 - 200 = 200$ .

- c) La recaudación máxima por sesión es \$ 160.000.

**Ejercicio 106** Un campesino tiene dinero para comprar 1600 metros de alambre de púas, y desea cercar con cuatro hebras de alambre un terreno rectangular en su predio. Si  $x$  representa un lado del rectángulo

- a) Determine la función  $A(x)$  área del terreno cercado con este alambre en términos de  $x$ .
- b) Encuentre las dimensiones del terreno cercado de mayor área.

**Solución:** a) Si  $x$  e  $y$  son los lados del rectángulo, se tiene que el área del terreno cercado es

$$A(x) = xy \quad \text{con } x > 0, y > 0$$

y el alambre empleado para este rectángulo será

$$4(2x + 2y)$$

que debe ser igual a la cantidad de alambre disponible. Así:

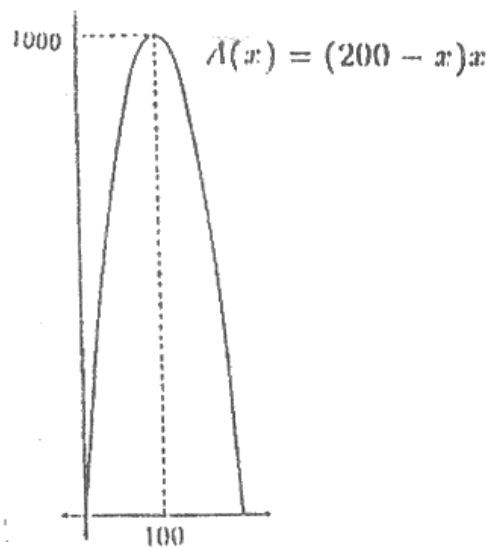
$$\begin{aligned} 4(2x + 2y) &= 1600 \\ x + y &= 200 \\ y &= 200 - x \end{aligned}$$

Por lo tanto el área queda sólo como función de  $x$

$$A(x) = (200 - x)x$$

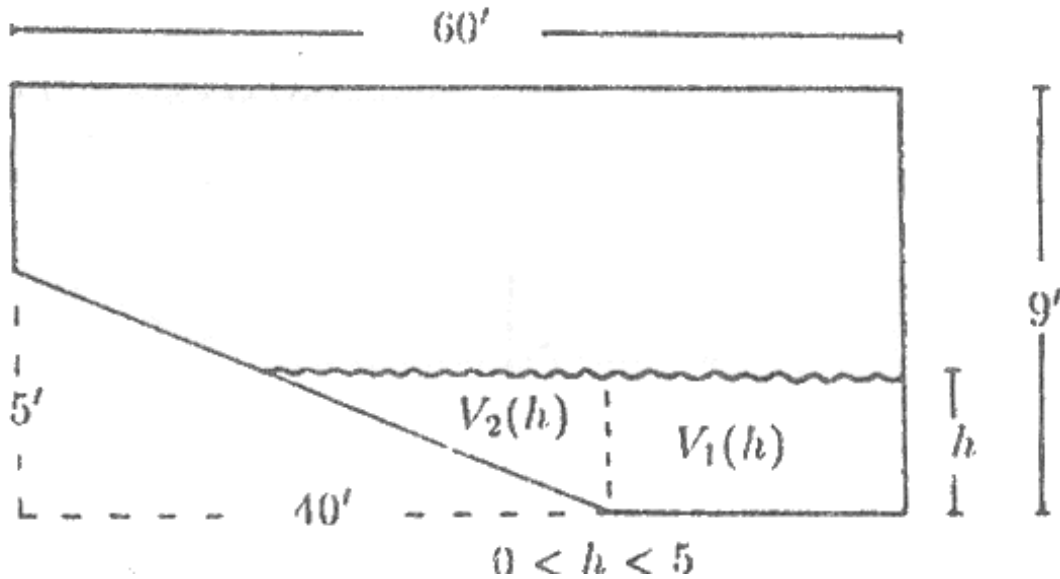
donde  $\text{Dom}P(A) = ]0, 200[$ .

b) Ya que  $A(x) = (200 - x)x$  es una parábola, como la de la figura siguiente se tiene que el área máxima se obtiene cuando  $x = 100$ , por lo tanto las dimensiones del terreno cercado son de 100 por 100 mts.



**Ejercicio 107** La orilla de una piscina forma un rectángulo de 60 pies de largo y 30 pies de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 4 a 9 pies en un tramo horizontal de 40 pies y después continúa al mismo nivel los restantes 20 pies, como se ilustra en la figura que muestra una sección transversal. Si la piscina se ha llenado desde fuera alcanzando un nivel  $h$  en el lado más profundo, determine el volumen  $V(h)$  del agua en función de la altura  $h$ .





**Solución: Primer caso.** Supongamos primero que  $0 < h < 5$ . Claramente tenemos que

$$V(h) = V_1(h) + V_2(h)$$

donde

$$V_1(h) = 20 \cdot h \cdot 30$$

Para  $V_2(h)$  consideremos la figura

donde

$$V_2(h) = \frac{30hy}{2}$$

pero por el teorema de Tales tenemos que

$$\frac{5}{40} = \frac{h}{y}$$

lo que implica que

$$y = 8h$$

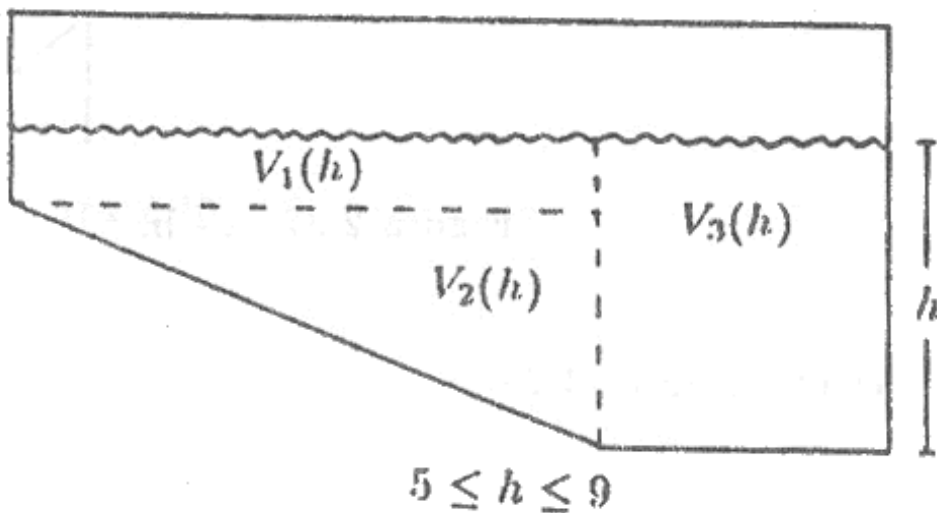
luego,

$$V_2(h) = \frac{30h(8h)}{2} = \frac{240h^2}{2}.$$

Por lo tanto, sumando ambos volúmenes

$$V(h) = 600h + 120h^2$$

**Segundo caso.** Supongamos ahora que  $9 \geq h \geq 5$  y consideremos la figura



Tenemos que

$$V(h) = V_1(h) + V_2(h) + V_3(h)$$

donde

$$\begin{aligned} V_1(h) &= 20 \cdot 30 \cdot h = 600h \\ V_2(h) &= \frac{40 \cdot 5 \cdot 30}{2} = \frac{6000}{2} = 3000 \\ V_3(h) &= (h - 5) \cdot 40 \cdot 30 = 1200(h - 5) \end{aligned}$$

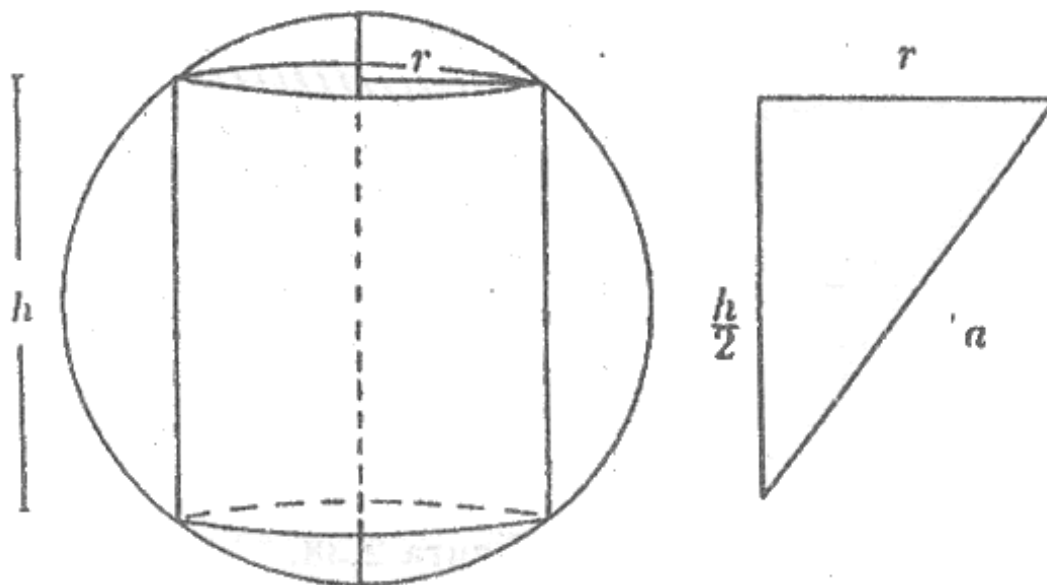
por lo tanto,

$$V(h) = 600h + 3000 + 1200(h - 5)$$

y finalmente

$$V(h) = \begin{cases} 600h + 120h^2 & \text{si } 0 < h < 5 \\ 600h + 3000 + 1200(h - 5) & \text{si } 5 \leq h \leq 9 \end{cases}$$

**Ejercicio 108** Determine una función que represente el volumen de un cilindro inscrito en una esfera de radio  $a$  (como en la figura ) en función de su altura.



**Solución:** Sean  $r$  y  $h$  radio y altura del cilindro respectivamente.

Sabemos que el volumen del cilindro está dado por la fórmula  $V = \pi r^2 h$  (que depende de las variables  $r$  y  $h$ ), pero, por teorema de Pitágoras, tenemos

$$a^2 = \left(\frac{h}{2}\right)^2 + r^2.$$

Luego, despejando  $r^2$  y reemplazando en la fórmula del volumen, tenemos

$$V(h) = \pi \left(a^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2\right) h$$

donde  $\text{Dom}P(V) = ]0, 2a[$ , puesto que  $h > 0$  y  $a^2 - \frac{h^2}{2} > 0$ ; de donde  $0 < h < 2a$ .

**Ejercicio 109** Un ciclista tiene que hacer un viaje de  $d$  kms, en un tiempo determinados. Calcula que debe viajar a  $V$  kms/hrs. Pero sale 3 minutos tarde y viaja a 1 kms/hrs más deprisa, y llega a tiempo.

Determinar la velocidad prevista  $V$  en función de la distancia  $d$ .

**Solución:** Supongamos que el ciclista viajaba a una velocidad de  $v$  km/hr; entonces la velocidad buscada será  $V = (v - 1)$  km/hr. El ciclista viajó realmente  $\frac{d}{v}$  horas mientras que el tiempo previsto era de  $\frac{d}{v-1}$  horas. Por hipótesis

$$\begin{aligned} \frac{\frac{d}{v-1} - \frac{d}{v}}{\frac{v d - (v-1)d}{(v-1)v}} &= \frac{\frac{3}{60}}{\frac{1}{20}} \\ 20vd - 20(v-1)d &= (v-1)v \\ 20vd - 20dv + 20d &= v^2 - v \\ v^2 - v - 20d &= 0 \end{aligned}$$

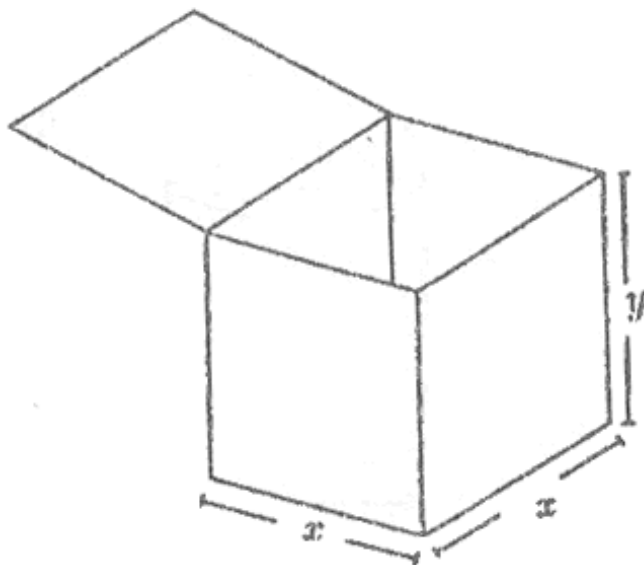
Como  $d > 0$  y  $v > 0$  tendremos que

$$v(d) = \frac{1 + \sqrt{1 + 80d}}{2}$$

pero la velocidad buscada es  $V(d) = v(d) - 1$ , por lo tanto

$$V(d) = \frac{\sqrt{1 + 80d} - 1}{2}$$

**Ejercicio 110** Se desea construir una caja con tapa de base cuadrada con área no mayor de  $100\text{cm}^2$  como la de la figura, de volumen  $252\text{cm}^3$ . Si el costo de la tapa es \$ 2 por  $\text{cm}^2$ , la base \$ 5 por  $\text{cm}^2$  y el de los lados es de \$ 3 por  $\text{cm}^2$ , exprese el costo  $C$  como función de  $x$  y  $\text{Dom}P(C)$ .



**Solución:** Por hipótesis se sabe que el volumen de la caja es de  $252\text{cm}^3$ ; luego

$$x^2y = 252 \quad (2.5)$$

con  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $x^2 \leq 100$ .

El costo de la tapa es \$ 2 por  $\text{cm}^2$ . La tapa tiene  $x^2\text{cm}^2$ , luego el costo de la tapa es \$  $2x^2$ .

El costo de la base es \$ 5 por  $\text{cm}^2$  y la base tiene  $x^2\text{cm}^2$ , luego el costo de la base es \$  $5x^2$ .

Finalmente, el costo de los lados es \$ 3 por  $\text{cm}^2$  y cada lado tiene  $xy\text{cm}^2$ , luego el costo de la base es \$  $3(4xy) = \$ 12xy$ .

Así, el costo total de la caja es:

$$C = 2x^2 + 5x^2 + 12xy \quad (2.6)$$

pero por 2.5,

$$y = \frac{252}{x^2}$$

reemplazando en 2.6 obtenemos la función pedida

$$C(x) = 7x^2 + 12x \frac{252}{x^2} \text{ donde } \text{Dom}P(C) = ]0, 10]$$

**Ejercicio 111** Si el radio basal  $r$  de un cono circular recto aumenta en un  $x\%$ , mientras que su altura  $h$  disminuye en un  $20\%$ , formule una función en términos de  $x$  que permita obtener en qué porcentaje varían:

a) el área basal del cono.

b) el volumen del cono.

En particular, si el radio aumenta en  $15\%$ , ¿en qué porcentaje varían el área basal y el volumen del cono? (Sólo desarrollaremos lo relativo al área).

**Solución:** a) Si el radio basal aumenta en  $x\%$  entonces el nuevo radio sería

$$r_N = r + \frac{x}{100}r = \left(1 + \frac{x}{100}\right)r$$

luego el área basal sería

$$\begin{aligned} A_b = \pi r_N^2 &= \pi \left(1 + \frac{x}{100}\right)^2 r^2 \\ &= \pi \left(1 + \frac{x}{50} + \left(\frac{x}{100}\right)^2\right) r^2 \\ &= \pi r^2 + \pi \left(\frac{x}{50} + \left(\frac{x}{100}\right)^2\right) r^2 \end{aligned}$$

Así, el área basal aumentaría

$$\pi \left(\frac{x}{50} + \left(\frac{x}{100}\right)^2\right) r^2 \text{ unidades,}$$

es decir, aumentaría

$$\left(\frac{x}{50} + \left(\frac{x}{100}\right)^2\right) 100 \text{ por ciento}$$

Luego la función que representa el porcentaje de aumento del área basal es

$$A(x) = \left(\frac{x}{50} + \left(\frac{x}{100}\right)^2\right) 100 \text{ con } x > 0$$

En particular, si el radio aumenta en un 15% entonces el porcentaje de aumento del área es  $A(15)$ .

### 2.4.1 Programación Lineal

En los siguientes problemas de modelación matemática, se consideran funciones de dos variables<sup>5</sup> del tipo

$$z = f(x, y) = ax + by$$

sujetas a restricciones de desigualdades.

**Ejemplo 112** *Una industria manufacturera produce bicicletas y motonetas, cada una de las cuales debe procesarse a través de dos centrales de máquinas A y B. La central A tiene un máximo de 120 horas disponibles y la central B posee un máximo de 180 horas disponibles. La manufactura de una bicicleta requiere 6 horas en la central A y 3 horas en la central B; la manufactura de una motoneta requiere de 4 horas en la central A y 10 horas en la central B. Sabiendo que el beneficio por bicicleta es de \$ 45 y por motoneta es de \$ 55 formulemos un modelo matemático que permita obtener el número de bicicletas y de motonetas que se deberán fabricar para obtener un beneficio máximo.*

**Solución:** Sean  $x$  e  $y$  las variables que representan las cantidades de bicicletas y motonetas respectivamente y sea  $z$  la ganancia que resulta al vender  $x$  bicicletas e  $y$  motonetas. El objetivo es escoger los valores de  $x$  e  $y$  de manera que se maximice la cantidad

$$z = 45x + 55y \tag{2.7}$$

sujeta a la restricción correspondiente a la central A

$$6x + 4y \leq 120$$

---

<sup>5</sup>Una función real de dos variables con dominio  $A$   $f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es una correspondencia tal que para cada par de elementos  $(x, y)$  en  $A$  existe un único elemento  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $z = f(x, y)$  (Ver Apéndice C).

y la restricción correspondiente a la central  $B$

$$3x + 10y \leq 180$$

Como  $x$  e  $y$  son cantidades de vehículos entonces debemos exigir también

$$x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0$$

Luego el modelo matemático correspondiente al problema es

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 45x + 55y \\ \text{sujeta a } 6x + 4y &\leq 120 \\ 3x + 10y &\leq 180 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.8}$$

**Nota:** Este es un problema de **programación lineal**. El problema general de programación lineal trata de maximizar o minimizar (es decir, optimizar) una función lineal de varias variables llamada **función objetivo** (ecuación 2.7 en el ejemplo anterior) sujeta a un conjunto de ecuaciones lineales o desigualdades lineales llamadas **restricciones** (ecuaciones e inecuaciones en 2.8 del ejemplo anterior).

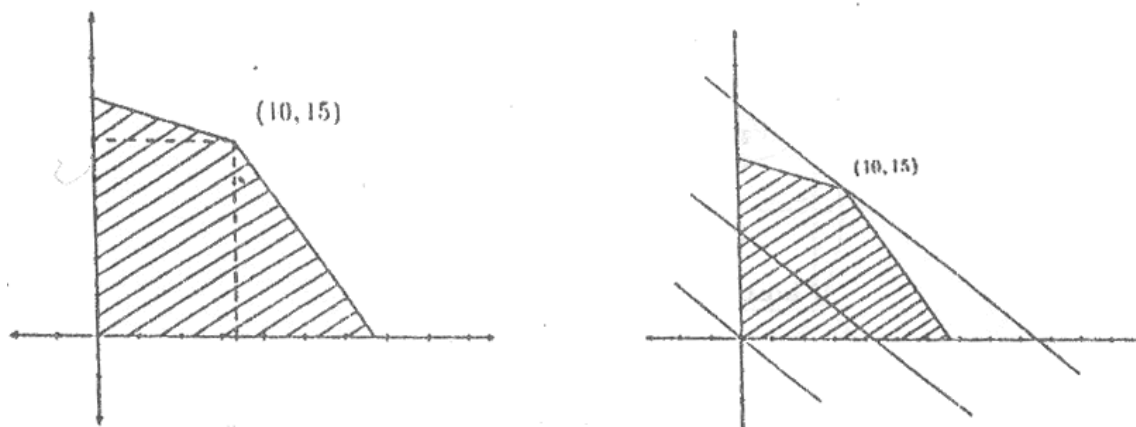
Para una función lineal de dos variables

$$f(x, y) = ax + by$$

el problema podemos resolverlo geoméricamente. En efecto, en este caso el problema sólo tiene dos **variables de decisión** y por lo tanto sólo dos dimensiones, por lo que podemos usar un procedimiento gráfico para resolverlo. Este procedimiento incluye la construcción de una gráfica de dos dimensiones con  $x$  e  $y$  en los ejes. El primer paso es identificar los valores de  $(x, y)$  permitidos por las restricciones; así, para el problema anterior, se grafican las rectas

$$\begin{aligned} 6x + 4y &= 120 \\ 3x + 10y &= 180 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo la **región factible**  $R$  en la figura



El paso final es seleccionar, dentro de esta región, el punto  $(x, y)$  que maximiza el valor de  $z = 45x + 55y$ .

Este paso se vuelve automático después de un poco de práctica, pero para descubrir en qué se fundamenta vale la pena intentar algunos valores por prueba y error. Por ejemplo, consideremos  $z = 810$ . Si se dibuja la recta  $45x + 55y = 810$  se puede ver (en la figura) que existen muchos puntos sobre esta recta que están dentro de la región  $R$ . Por lo tanto debemos intentar un valor mayor para  $z$ , por ejemplo,  $z = 900$ .

Graficando la recta  $45x + 55y = 900$  vemos nuevamente que existen infinitos puntos sobre esta recta que están dentro de la región  $R$ , de manera que el máximo valor permisible de  $z$  debe ser por lo menos 900. Notemos que si se da un valor más grande a  $z$ , la recta quedará más arriba o más alejada del origen que la primera y que todas estas rectas son paralelas.

Este es el procedimiento de prueba y error que sólo necesita que se grafiquen una familia de rectas paralelas que contengan al menos un punto de la región factible y que se elija la que esté más alejada del origen (en la dirección en que crecen los valores de  $z$ ). Dicha recta pasa por el punto  $(10, 15)$  como se indica en la figura y la ecuación queda

$$45x + 55y = 3 \cdot 10 + 55 \cdot 15 = 1275$$

Por lo tanto la solución que buscábamos es:

$$x = 10, \quad y = 15, \quad z = 1275$$

es decir, fabricar 10 bicicletas y 15 motonetas obteniendo un beneficio de \$ 1275.

Después de un poco de práctica, se puede aplicar un método más sencillo que consiste en dibujar sólo una de estas rectas para establecer la pendiente y luego mover visualmente esta recta paralela a sí misma.

**Ejercicio 113** *Un horticultor desea mezclar fertilizante que proporcione un mínimo de 15 unidades de potasa, 20 unidades de nitratos y 24 unidades de fosfatos. Dispone de dos marcas de fertilizantes. La marca 1 proporciona 3 unidades de potasa 1 de nitratos y 3 de fosfatos; su costo es de 120 dólares (la unidad). La marca 2 proporciona 1 unidad de potasa 5 de nitratos y 2 de fosfatos; su costo es de 60 dólares (la unidad).*

*Formule un modelo matemático que permita obtener la combinación de fertilizantes de menor costo que satisfaga las especificaciones deseadas.*

**Solución:** Sean

$x$  (unidades) la cantidad de fertilizante (Marca 1)

$y$  (unidades) la cantidad de fertilizante (Marca 2)

Entonces el objetivo es minimizar la función:

$$z = 120x + 60y$$

sujeta a las restricciones:

1. Correspondientes a las necesidades de potasa.

$$3x + y \geq 15$$

2. Correspondientes a las necesidades de nitratos.

$$x + 5y \geq 20$$

3. Correspondientes a las necesidades de fosfatos.

$$3x + 2y \geq 24$$

Claramente, además

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Luego el modelo matemático pedido es

$$\text{Min } z = 120x + 60y$$

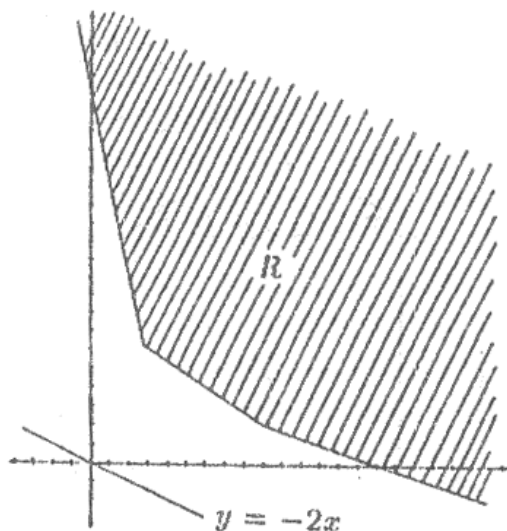
sujeto a

$$\begin{aligned} 3x + y &\geq 15 \\ x + 5y &\geq 20 \\ 3x + 2y &\geq 24 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

Graficando las rectas

$$\begin{aligned} 3x + y &= 15 \\ x + 5y &= 20 \\ 3x + 2y &= 24 \\ x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos la región  $R$  de la figura



Por otra parte a partir de la función objetivo, con  $c$  constante, se tiene que

$$y = \frac{c}{60} - 2x$$

de donde la pendiente de la recta  $c = 120x + 60y$  es  $m = -2$ . Considerando la recta (con pendiente  $m = -2$ ) más cercana al origen, que pase por al menos un punto del conjunto  $R$ , tenemos que el punto óptimo es

$$x = 2, \quad y = 9$$

es decir, 2 unidades de fertilizante Marca 1 y 9 unidades de fertilizante Marca 2.

**Ejercicio 114** Una editorial planea usar una sección de su planta para producir dos textos  $A$  y  $B$ . La ganancia es de \$ 8 por el texto  $A$  y \$ 5 por el texto  $B$ . El texto  $A$  requiere de 4 horas para imprimir y de 6 horas para encuadernar y empastar. El texto  $B$  requiere de 5 horas para imprimir y de 3 horas para encuadernar y empastar. Si se dispone de 200 horas para imprimir y de 210 horas para encuadernar y empastar y si por lo menos se deben producir 20 textos.

1. Formule un modelo matemático que permita obtener el beneficio máximo.
2. Determine el número óptimo de cada texto que debe producir la editorial y su correspondiente ganancia.
3. ¿Cuántas horas se usan para imprimir?



4. ¿Cuántas horas se usan para encuadernar y empastar?
5. Si se agrega la restricción: La producción del texto  $B$  debe ser por lo menos el 50% de la producción del texto  $A$ . ¿Qué puede decir del óptimo?
6. Si se dispone de 6 horas más para imprimir y la ganancia por cada texto se reduce en \$ 0,02 ¿qué puede decir del óptimo? (NO considere la restricción impuesta en 5).

**Solución:** 1): Sean

$x$ : números de textos  $A$ .

$y$ : números de textos  $B$ .

Formulación del problema:

$$\text{Max } z = 8x + 5y$$

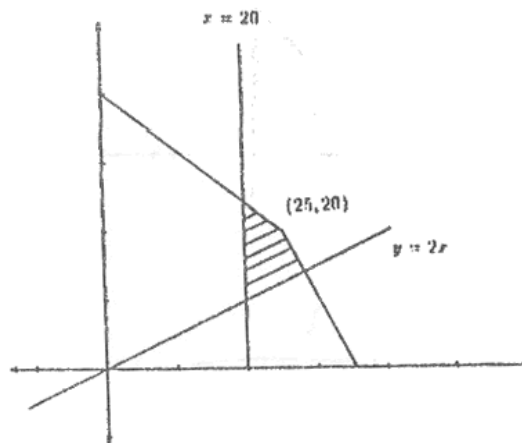
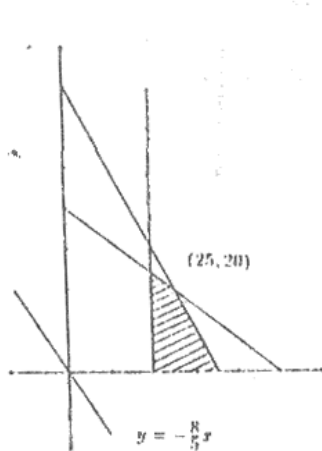
sujeto a

$$\begin{aligned} 4x + 5y &\leq 200 \\ 6x + 3y &\leq 210 \\ x &\geq 20 \\ y &\geq 0 \end{aligned}$$

2) Graficando las rectas

$$\begin{aligned} 4x + 5y &= 200 \\ 6x + 3y &= 210 \\ x &= 20 \\ y &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos la región  $R$  de la figura izquierda



Considerando la recta (con pendiente  $m = -\frac{8}{5}$ ) más lejana al origen, que pase por al menos un punto del conjunto  $R$ , tenemos que el punto óptimo es

$$x = 25, \quad y = 20$$

con  $z = 300$

3) y 4) Reemplazando la solución óptima en la restricción de impresión tenemos que se usaron  $4 \cdot 25 + 5 \cdot 20 = 200$  horas para imprimir, es decir, todas las horas disponibles para tal efecto. Considerando la restricción de encuadernación y empaste, obtenemos que se usaron las 210 horas disponibles para esta tarea.

5) Al agregar la restricción

$$2y - x \geq 0$$

obtenemos la región  $R_1$  que muestra la figura anterior derecha.

de donde es claro que el óptimo no cambió, es decir, la solución óptima sigue siendo

$$x = 25, \quad y = 20$$

con  $z = 300$ .

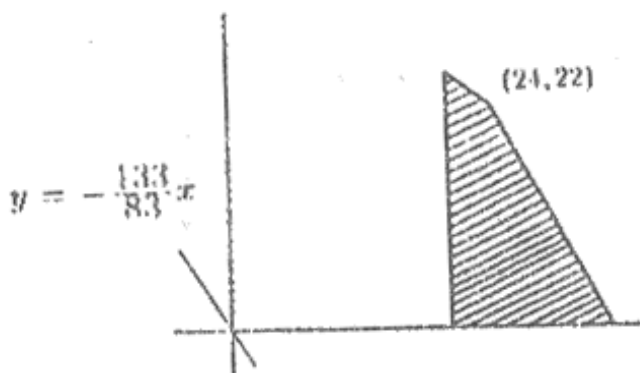
6) Si se disponen de 6 horas más para imprimir y la ganancia por cada texto se reduce en \$ 0,02 la formulación matemática sería

$$\text{Max } z = 7,98x + 4,98y$$

sujeto a

$$\begin{array}{rcl} 4x + 5y & \leq & 206 \\ 6x + 3y & \leq & 210 \\ x & \geq & 20 \\ y & \geq & 0 \end{array}$$

la gráfica correspondiente a este modelo se encuentra en la figura



de donde la solución óptima es

$$x = 24, \quad y = 22, \quad z = 7,98 \cdot 24 + 4,98 \cdot 22 = 301,08$$

Luego la ganancia aumenta en \$ 1,08

## 2.5 Álgebra de Funciones

Utilizando funciones elementales ya conocidas, se puede fabricar nuevas funciones; por ejemplo usando las funciones  $f(x) = \text{sen}x$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$  se puede construir la función

$$h(x) = \text{sen}x + \sqrt{x}$$

Una de las cosas que debe especificarse aquí es el dominio de  $h(x)$ , y es natural pensar en un conjunto tal que cada sumando esté definido en  $\mathbb{R}$ ; así el dominio de  $h(x)$  debe ser a lo más  $\text{Dom}f \cap \text{Dom}g$ .

En el caso anterior se usó la operación  $+$  (suma), también se podría haber usado la operación  $\cdot$  (multiplicación), división, etc.

**Definición 2.3** En general supongamos que  $f$  y  $g$  son dos funciones y sea  $D = \text{Dom}f \cap \text{Dom}g$ , entonces se definen nuevas funciones (con dominio  $D$ ) construidas en base a operaciones entre sus imágenes respectivas:

a) La suma de  $f$  y  $g$  denotada por  $f + g$  y definida por:

$$\begin{aligned} f + g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) + g(x) \end{aligned}$$

b) La diferencia de  $f$  y  $g$  denotada por  $f - g$  y definida por:

$$\begin{aligned} f - g : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) - g(x) \end{aligned}$$

c) El producto de  $f$  y  $g$  denotado por  $f \cdot g$  y definido por:

$$\begin{aligned} fg : D &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x)g(x) \end{aligned}$$

d) El cociente  $f$  y  $g$  denotado por  $\frac{f}{g}$  y definido por:

$$\begin{aligned} f/g : D' &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x)/g(x) \end{aligned}$$

donde

$$D' = \{x \in D : g(x) \neq 0\}$$

**Ejemplo 115** Sean  $f(x) = \sqrt{(2-x)^3}$ ,  $g(x) = |x-2|$ . Determinemos la suma, la diferencia, el producto y el cociente de  $f$  y  $g$ . **Solución:** Notemos que  $f(x) = \sqrt{2-x} |2-x|$ . El dominio de  $f$  es el intervalo  $]-\infty, 2]$  y el dominio de  $g$  es  $\mathbb{R}$ , por lo tanto la intersección de sus dominios es  $]-\infty, 2]$  y las funciones que se requieren están dadas por

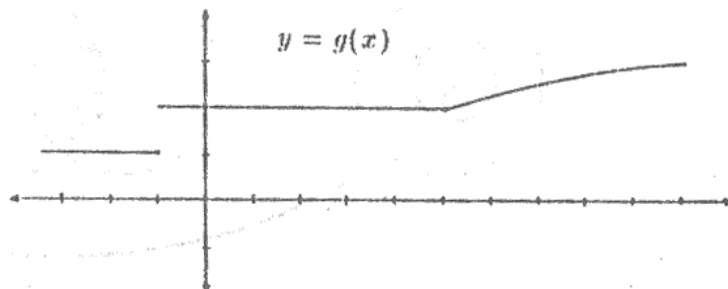
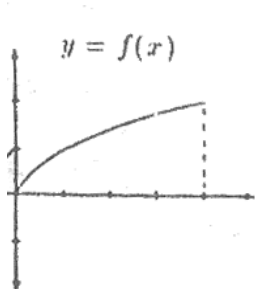
$$\begin{aligned} (f+g)(x) &= \sqrt{2-x} |2-x| + |x-2| & x \leq 2 \\ (f-g)(x) &= \sqrt{2-x} |2-x| - |x-2| & x \leq 2 \\ (fg)(x) &= \sqrt{2-x} (2-x)^2 & x \leq 2 \\ (f/g)(x) &= \frac{\sqrt{2-x} |2-x|}{|x-2|} & \\ &= \sqrt{2-x} & x < 2 \end{aligned}$$

Note que si  $g$  es una función constante tal que  $g(x) = c$  para todo  $x$  y si  $f$  es cualquier función, entonces  $cf$  denota el producto de  $g$  y  $f$ ,

$$(cf)(x) = cf(x), \quad \forall x \in \text{Dom} f$$

**Ejemplo 116** Sean  $f$  y  $g$  las funciones que se definen a continuación

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -2 < x < 0 \\ \sqrt{x}, & 0 \leq x < 4 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq -1 \\ 2, & -1 < x \leq 5 \\ \sqrt{x-1}, & x > 5 \end{cases}$$



(ver figura)

Determine  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $fg$ ,  $f/g$  y además gráfíquelas.

**Solución:** Es claro por la definición que

$$\begin{aligned}\text{Dom}(f+g) = \text{Dom}(f-g) = \text{Dom}(fg) &= \text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) \quad \text{pues } g(x) \neq 0 \\ &= \text{Dom}f \cap \text{Dom}g \\ &= ]-2, 4[ \cap \mathbb{R} = ]-2, 4[ \end{aligned}$$

Puesto que  $f$  y  $g$  son funciones definidas por partes debemos analizar los posibles casos de acuerdo a las intersecciones posibles de dominios.

1. Sea  $x \in ]-2, 0[ \cap ]-\infty, -1]$ , es decir,  $x \in ]-2, -1]$ , entonces

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 1$$

luego,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x + 2 \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = x \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) = x + 1 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = x + 1\end{aligned}$$

2. Sea  $x \in ]-2, 0[ \cap ]-1, 5]$ , es decir,  $x \in ]-1, 0[$ , entonces

$$f(x) = x + 1, \quad g(x) = 2$$

luego,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = x + 3 \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = x - 1 \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) = 2x + 2 \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{2}\end{aligned}$$

3. Sea  $x \in [0, 4[ \cap ]-1, 5]$ , es decir,  $x \in [0, 4[$ , entonces

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = 2$$

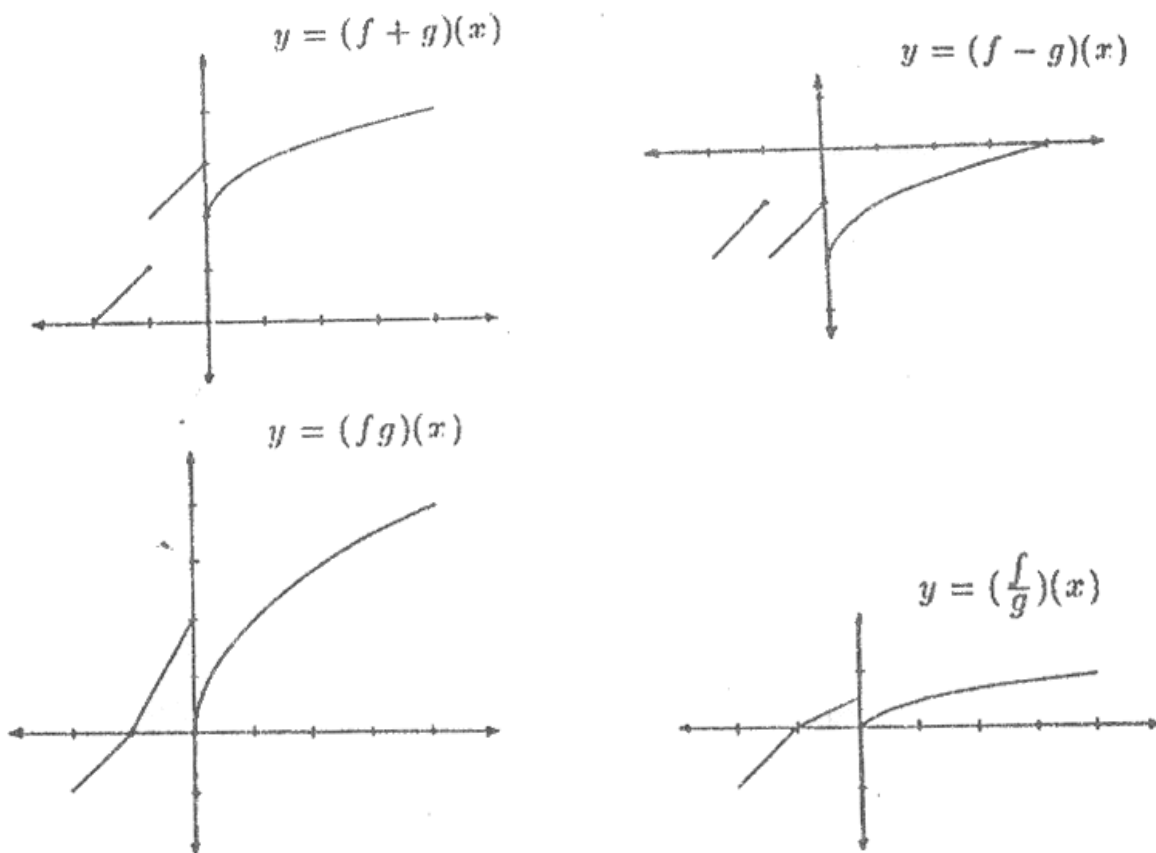
luego,

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \sqrt{x} + 2 \\ (f-g)(x) &= f(x) - g(x) = \sqrt{x} - 2 \\ (fg)(x) &= f(x)g(x) = 2\sqrt{x} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x}}{2}\end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}(f+g)(x) &= \begin{cases} x+2 & -2 < x \leq -1 \\ x+3 & -1 < x < 0 \\ \sqrt{x}+2 & 0 \leq x < 4 \end{cases} \\ (f-g)(x) &= \begin{cases} x & -2 < x \leq -1 \\ x-1 & -1 < x < 0 \\ \sqrt{x}-2 & 0 \leq x < 4 \end{cases} \\ (fg)(x) &= \begin{cases} x+1 & -2 < x \leq -1 \\ 2x+2 & -1 < x < 0 \\ 2\sqrt{x} & 0 \leq x < 4 \end{cases} \\ \left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \begin{cases} x+1 & -2 < x \leq -1 \\ \frac{x+1}{2} & -1 < x < 0 \\ \frac{\sqrt{x}}{2} & 0 \leq x < 4 \end{cases}\end{aligned}$$

(gráficas en figuras siguientes)



### 2.5.1 Composición de funciones

Definiremos una nueva función que se construye a partir de otras dos funciones  $f$  y  $g$  pero, en este caso, nos basaremos en las propiedades algebraicas del conjunto de llegada.

**Definición 2.4** Sean  $A$ ,  $B$  y  $C$  conjuntos de números reales. Sea  $f$  una función de  $A$  en  $B$  y sea  $g$  una función de  $C$  en  $D$ , es decir,

$$A \xrightarrow{f} B \quad \wedge \quad C \xrightarrow{g} D$$

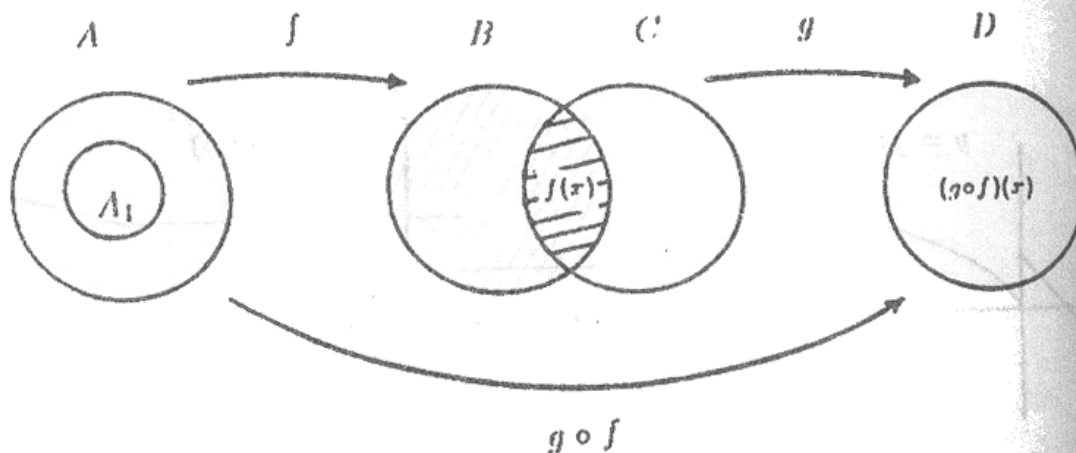
Si  $\text{Rec}f \cap C \neq \emptyset$ , es decir, el recorrido de  $f$  y el dominio de  $g$  tienen elementos en común, entonces es posible usar  $f$  y  $g$  para definir una función de  $A_1 \subseteq A$  en  $D$

Tal función se denomina composición de  $g$  con  $f$ , y se denota por  $g \circ f$  y se define por:

$$\begin{aligned} g \circ f : A_1 &\longrightarrow D \\ x &\longrightarrow g(f(x)) \end{aligned}$$

donde  $\text{Dom}(g \circ f) = A_1 = \{x \in A : f(x) \in C\}$ , si  $\text{Rec}f \cap \text{Dom}g \neq \emptyset$ , es decir,

$$\text{Dom}(g \circ f) = A_1 = \{x \in \text{Dom}f : f(x) \in \text{Dom}g \cap \text{Rec}f\}$$



(ver en figura ).

<sup>6</sup> En particular si  $\text{Rec}f \subseteq \text{Dom}g$ , entonces  $\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}f$ .

**Ejercicio 117** Sean

$$f : [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \sqrt{x-1} + 2$$

y

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto (x-2)^2$$

Determinemos  $g \circ f$ .

**Solución:** Puesto que  $\text{Rec}f \subseteq \mathbb{R} = \text{Dom}g$ , entonces  $\text{Dom}(g \circ f) = [1, \infty[$  y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x-1} + 2) = (\sqrt{x-1} + 2 - 2)^2 = x - 1$$

luego,

$$g \circ f : [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto x - 1$$

Ahora determinemos  $f \circ g$ . En este caso debemos determinar  $\text{Rec}g$ . Claramente  $\text{Rec}g = [0, \infty[$  y  $\text{Rec}g \not\subseteq \text{Dom}f$ , sin embargo  $\text{Rec}g \cap \text{Dom}f = [1, \infty[ \neq \emptyset$  luego.

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \text{Dom}g : g(x) \in \text{Dom}f\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 \in [1, \infty[\} \end{aligned}$$

Pero

$$\begin{aligned} (x-2)^2 \in [1, \infty[ &\iff (x-2)^2 \geq 1 \\ &\iff |x-2| \geq 1 \\ &\iff x \geq 3 \vee x \leq 1 \end{aligned}$$

luego,

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \text{Dom}g : g(x) \in \text{Dom}f\} \\ &= ]-\infty, 1] \cup [3, \infty[ \\ &= \mathbb{R} - ]1, 3[ \end{aligned}$$

Además,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f((x-2)^2) = \sqrt{(x-2)^2 - 1} + 2$$

<sup>6</sup> Algunos textos ponen como condición necesaria  $\text{Rec}f \subseteq \text{Dom}g$  para definir la compuesta  $g \circ f$  pero como se ve este es un caso particular de la definición dada aquí.

luego,

$$\begin{aligned} f \circ g : \mathbb{R} - ]1, 3[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \sqrt{(x-2)^2 - 1} + 2 \end{aligned}$$

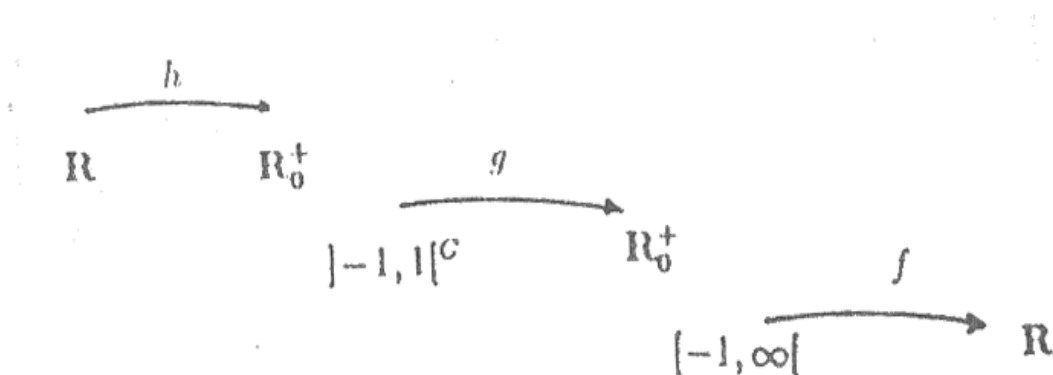
Note que  $f \circ g \neq g \circ f$ , es decir, no se cumple la propiedad de conmutatividad para la composición de funciones. Sin embargo se verifica la asociatividad

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$$

En el ejemplo siguiente se verifica esta igualdad en un caso

**Ejercicio 118** Sean  $f(x) = \sqrt{x+1} - 2$ ,  $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  y  $h(x) = x^2$  funciones definidas en sus dominios máximos. Determine  $(f \circ g) \circ h$  y  $f \circ (g \circ h)$ .

**Solución:** Claramente se ve que  $\text{Dom}h = \mathbb{R}$ ,  $\text{Rech} = \mathbb{R}_0^+$ ,  $\text{Dom}g = ]-1, 1[^C$ ,  $\text{Rec}g = \mathbb{R}_0^+$ ,  $\text{Dom}f = [-1, \infty[$ . Para hacer la compuesta es apropiado hacer el diagrama de la figura siguiente



$$\begin{aligned} \text{Dom}(g \circ h) &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in ]-1, 1[^C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\} \\ &= ]-1, 1[^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ g) &= \{x \in ]-1, 1[^C : \sqrt{x^2 - 1} \in [-1, \infty[\} \\ &= \{x \in ]-1, 1[^C : \sqrt{x^2 - 1} \geq -1\} \\ &= ]-1, 1[^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}((f \circ g) \circ h) &= \{x \in \text{Dom}h : x^2 \in \text{Dom}(f \circ g)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \in ]-1, 1[^C\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x^2 \geq 1\} \\ &= ]-1, 1[^C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dom}(f \circ (g \circ h)) &= \{x \in \text{Dom}(g \circ h) : (g \circ h)(x) \in \text{Dom}f\} \\ &= \{x \in ]-1, 1[^C : \sqrt{x^4 - 1} \in [-1, \infty[\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : \sqrt{x^4 - 1} \geq -1\} \\ &= ]-1, 1[^C \end{aligned}$$

Así, se tiene que tanto  $(f \circ g) \circ h$  como  $f \circ (g \circ h)$  son funciones con igual dominio en este caso.

Ahora a nivel de fórmulas calculemos  $((f \circ g) \circ h)(x)$ . Como

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(\sqrt{x^2 - 1}) \\ &= \sqrt{\sqrt{x^2 - 1} + 1} - 2 \end{aligned}$$

tenemos que

$$\begin{aligned}(f \circ g) \circ h)(x) &= (f \circ g)(x^2) \\ &= \sqrt{\sqrt{x^4 - 1} + 1} - 2\end{aligned}$$

Por otra parte en el cálculo de  $(f \circ (g \circ h))(x)$  tenemos

$$\begin{aligned}(f \circ (g \circ h))(x) &= f((g \circ h)(x)) \\ &= \sqrt{(g \circ h)(x) + 1} - 2 \\ &= \sqrt{\sqrt{(h(x))^2 - 1} + 1} - 2 \\ &= \sqrt{\sqrt{x^4 - 1} + 1} - 2\end{aligned}$$

Así,

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ya que tienen igual dominio, recorrido y “relación” (fórmula) que las define.

En los diagramas siguientes se visualizan los pasos hechos en el desarrollo.

$$\mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}_0^+, ] - 1, 1[ \xrightarrow{C} \mathbb{R}_0^+, [-1, \infty[ \xrightarrow{f} [-2, \infty[$$

Para  $f \circ (g \circ h)$

$$\begin{aligned}& ] - 1, 1[ \xrightarrow{g \circ h} \mathbb{R}_0^+, [-1, \infty[ \xrightarrow{f} [-2, \infty[ \\ & ] - 1, 1[ \xrightarrow{C^{f \circ (g \circ h)}} [-2, \infty[ \end{aligned}$$

y para  $(f \circ g) \circ h$

$$\begin{aligned}& \mathbb{R} \xrightarrow{h} \mathbb{R}_0^+, ] - 1, 1[ \xrightarrow{C} \mathbb{R}_0^+, [-2, \infty[ \\ & ] - 1, 1[ \xrightarrow{C^{(f \circ g) \circ h}} [-2, \infty[ \end{aligned}$$

**Ejercicio 119** Sean

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x > 1 \\ x^3, & x \leq 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2, & x > 0 \\ 2x+1, & x \leq 0 \end{cases}$$

Determine  $f \circ g$  y  $g \circ f$ .

**Solución:** En primer lugar determinemos  $(g \circ f)(x)$ .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(\sqrt{x-1}), & x > 1 \\ g(x^3), & x \leq 1 \end{cases}$$

Pero la función  $g$  tiene distintos valores dependiendo si  $\sqrt{x-1}$  y  $x^3$  son mayores o menores que cero. Como  $\sqrt{x-1} > 0$ , para todo  $x > 1$  se tendrá que

$$g(\sqrt{x-1}) = (\sqrt{x-1})^2, \quad \text{si } x > 1$$

Pero  $x^3$  tiene dos comportamientos en el intervalo  $] - \infty, 1]$ , a saber,  $x^3 > 0$  si  $x \in ]0, 1]$  y  $x^3 \leq 0$  si  $x \in ] - \infty, 0]$ . Así,

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} (\sqrt{x-1})^2, & x > 1 \\ (x^3)^2, & x \in ]0, 1] \\ 2(x^3) + 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

Finalmente calculemos  $(f \circ g)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} f(x^2), & x > 1 \\ f(2x+1), & x \leq 1 \end{cases}$$

Pero la función  $f$  tiene también distintos valores dependiendo si  $x^2$  y  $2x+1$  son mayores o menores que uno. Claramente  $x^2 > 1$  si  $x > 1$  y  $0 < x^2 \leq 1$  si  $0 < x \leq 1$ . Por otro lado  $2x+1 \leq 1$  si  $x \leq 0$ . Con toda esta información tenemos que

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} (x^2)^3, & 0 < x \leq 1 \\ \sqrt{x^2-1}, & x > 1 \\ (2x+1)^3, & x \leq 0 \end{cases}$$



### 2.5.2 Funciones Crecientes y Decrecientes

A continuación daremos unas definiciones que nos serán útiles para resolver inecuaciones, ya que ellas tienen que ver con lo que sucede al aplicar una función a ambos lados de una inecuación, por ejemplo elevar al cuadrado.

**Definición 2.5** Una función  $f : A \longrightarrow B$  se dice **creciente** en  $A$ , si es verdadera la siguiente implicación:

$$(\forall u, v \in A)(u < v \Rightarrow f(u) \leq f(v));$$

**decreciente** en  $A$ :

$$(\forall u, v \in A)(u < v \Rightarrow f(u) \geq f(v));$$

**estrictamente creciente** en  $A$ :

$$(\forall u, v \in A)(u < v \Rightarrow f(u) < f(v));$$

**estrictamente decreciente** en  $A$ :

$$(\forall u, v \in A)(u < v \Rightarrow f(u) > f(v)).$$

Es decir, una función  $f$  será estrictamente decreciente si invierte el orden, estrictamente creciente si conserva el orden.

**Ejemplo 120** La función  $f(x) = mx + b$  es estrictamente decreciente si  $m$  es negativo. En efecto, sean  $u, v \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} u < v &\Rightarrow mu > mv \\ &\Rightarrow mu + b > mv + b \\ &\Rightarrow f(u) > f(v) \end{aligned}$$

Claramente,  $f$  es creciente si  $m > 0$ . Si  $m = 0$  se tiene la función constante  $f(x) = b$  que es creciente y decreciente a la vez.

Gráficamente se interpreta como sigue: Una función será estrictamente creciente si estando parado en cualquier punto de la gráfica de la función se comienza a caminar sobre la gráfica en la dirección positiva del eje  $OX$ , necesariamente se comienza a subir en el gráfico. En el caso de creciente sólo se puede asegurar que no baja.

**Ejemplo 121** La función  $f(x) = \sqrt{x}$  es estrictamente creciente pues para todo  $x, y \in \mathbb{R}^+$

$$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}.$$

En general:

**Ejemplo 122** La función  $f(x) = \sqrt[n]{x}$  con  $n \in \mathbb{N}$  es estrictamente creciente.

En efecto en la sección de números reales se probó por el corolario 1.18 que

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)(x < y \Rightarrow \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y})$$

**Ejemplo 123** La función  $f(x) = [x]$  es creciente.

En efecto

$$(\forall x, y \in \mathbb{R})(x < y \Rightarrow [x] \leq [y])$$

pero no es estrictamente creciente pues si  $x = 1$ ,  $y = 1,5$

$$x < y \text{ pero } [x] = [y] = 1$$

**Ejemplo 124** La función  $f(x) = x^2$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}^+$ , pues si  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tal que  $x < y$  entonces  $x^2 < y^2$ ; pero no es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$ , puesto que existen  $x = -2 \in \mathbb{R}$ ,  $y = 1 \in \mathbb{R}$  tales que  $x < y$  pero  $x^2 \not< y^2$ .

Por otra parte, notemos que la función  $f(x) = -x^2$  es estrictamente decreciente en  $\mathbb{R}^+$ , pues si  $x, y \in \mathbb{R}^+$  tal que  $x < y$  entonces  $x^2 < y^2$  luego  $-x^2 > -y^2$ , es decir,

$$(\forall x, y \in \mathbb{R}^+)(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$

**Proposición 2.6** Si  $f$  y  $g$  son funciones estrictamente crecientes tales que  $\text{Rec}f \subset \text{Dom}g$  entonces  $g \circ f$  es una función estrictamente creciente definida en  $\text{Dom}f$ .

**Demostración:** Es claro que si  $\text{Rec}f \subseteq \text{Dom}g$  entonces  $\text{Dom}g \circ f = \text{Dom}f$ .

Sea  $x, y \in \text{Dom}g \circ f$  tal que  $x < y$  entonces, dado que  $f$  es estrictamente creciente tenemos

$$f(x) < f(y)$$

y puesto que  $g$  también es estrictamente creciente entonces

$$g(f(x)) < g(f(y))$$

en consecuencia

$$x < y \Rightarrow (g \circ f)(x) < (g \circ f)(y)$$

□

**Ejercicio 125** Pruebe que si  $f$  es una función creciente en  $D$  entonces  $-f$  es una función decreciente en  $D$ .

**Solución:** Sea  $x, y \in D$  tal que  $x < y$  entonces  $f(x) \leq f(y)$  pues  $f$  es creciente, multiplicando por  $-1$  se tiene

$$-f(x) \geq -f(y)$$

en consecuencia

$$x < y \Rightarrow -f(x) \geq -f(y)$$

Por lo tanto  $-f$  es decreciente en  $D$ .

**Ejercicio 126** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

1. Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $\text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \emptyset$ , entonces

$$\text{Rec}(f + g) = \text{Rec}f \cup \text{Rec}g.$$

2. Sean  $f, g$  y  $h$  funciones tales que  $D = \text{Dom}f = \text{Dom}g = \text{Dom}h \neq \emptyset$ , entonces

$$\begin{aligned} (f + g)h &= fh + gh \text{ en } D \\ h(f + g) &= hf + hg \text{ en } D \end{aligned}$$

3. Si  $\text{Rec}h \cap \text{Dom}(f + g) \neq \emptyset$  y  $D = \text{Dom}(f + g) \circ h$ , entonces

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \text{ en } D$$

4. Sea  $D = \text{Dom}g \cap \text{Dom}h \neq \emptyset$ . Si  $\text{Rec}(g + h) \subseteq \text{Dom}f$ , entonces

$$(f \circ (g + h))(x) = (f \circ g)(x) + (f \circ h)(x), \quad \forall x \in D$$

5. Si  $f$  y  $g$  son funciones decrecientes en  $\mathbb{R}$  entonces  $f \circ g$  es decreciente en  $\mathbb{R}$ .

6. Si  $f$  es creciente en  $] -\infty, a]$  y en  $]a, \infty[$  entonces  $f$  es creciente en  $\mathbb{R}$
7. Sea  $f$  una función con dominio  $D$  e  $Id$  la función identidad<sup>7</sup>, entonces

$$f \circ Id = Id \circ f = f$$

8. Sea  $f$  función, entonces existe  $g$  función tal que

$$g \circ f = Id, \quad \forall x \in Dom f$$

**Solución:**

1. **Falso.** Sean, por ejemplo,

$$\begin{array}{ll} f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} & g: [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow -1 & x \longrightarrow \sqrt{x-1} \end{array}$$

funciones.  $Rec f = \{-1\}$ ,  $Rec g = [0, \infty[$ . Luego

$$Rec f \cup Rec g = [0, \infty[ \cup \{-1\}$$

Por otra parte,

$$\begin{array}{ll} f + g: [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \sqrt{x-1} - 1 \end{array}$$

cuyo recorrido es  $[-1, \infty[$ .

2. **Verdadero.** Sea  $x \in D$ , entonces,

$$\begin{aligned} ((f+g)h)(x) &= (f+g)(x)h(x) \\ &= (f(x)+g(x))h(x) \\ &= f(x)h(x)+g(x)h(x) \\ &= (fh)(x)+(gh)(x) \\ &= (fh+gh)(x) \end{aligned}$$

luego,

$$((f+g)h)(x) = (fh+gh)(x) \quad \forall x \in D$$

de donde

$$(f+g)h = fh + gh$$

Análogamente si  $x \in D$ ;

$$\begin{aligned} (h(f+g))(x) &= h(x)(f+g)(x) \\ &= h(x)(f(x)+g(x)) \\ &= h(x)f(x)+h(x)g(x) \\ &= (hf)(x)+(hg)(x) \\ &= (hf+hg)(x) \end{aligned}$$

luego,

$$(h(f+g))(x) = (hf+hg)(x) \quad \forall x \in D$$

de donde

$$h(f+g) = hf + hg \text{ en } D$$

---

<sup>7</sup>En realidad el símbolo  $Id$  está denotando el concepto de *función identidad*, pero generalmente serán funciones distintas, dependiendo del Dominio de definición. Asíhay  $Id_{\mathbb{R}}$ ,  $Id_{[0,1]}$  etc.

3. **Verdadero.** Sea  $x \in D$ , entonces;

$$\begin{aligned} ((f + g) \circ h)(x) &= (f + g)(h(x)) \\ &= f(h(x)) + g(h(x)) \\ &= (f \circ h)(x) + (g \circ h)(x) \\ &= (f \circ h + g \circ h)(x) \end{aligned}$$

luego,

$$((f + g) \circ h)(x) = (f \circ h + g \circ h)(x) \quad \forall x \in D$$

de donde

$$(f + g) \circ h = f \circ h + g \circ h \text{ en } D$$

4. **Falso.** Considere las siguientes funciones

$$f(x) = x + 1 \quad g(x) = x^2 \quad h(x) = 2x$$

entonces  $\text{Dom}(g + h) = \text{Dom}g \cap \text{Dom}h = \mathbb{R} \neq \emptyset$  y  $\text{Rec}(g + h) \subseteq \mathbb{R} = \text{Dom}f$ , además

$$\begin{aligned} (f \circ (g + h))(x) &= f((g + h)(x)) \\ &= f(g(x) + h(x)) \\ &= f(x^2 + 2x) \\ &= x^2 + 2x + 1 \end{aligned}$$

Pero  $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x^2 + 1$  y  $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = 2x + 1$ , luego,

$$(f \circ g)(x) + (f \circ h)(x) = x^2 + 2x + 2,$$

por lo tanto

$$f \circ (g + h) \neq f \circ g + f \circ h$$

5. **Falso.** Las funciones  $f$  y  $g$  tal que

$$f(x) = g(x) = -x$$

son decrecientes en  $\mathbb{R}$ , sin embargo

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(-x) = x$$

función creciente.

6. **Falso.** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in ]-\infty, 1] \\ x - 3 & \text{si } x \in ]1, \infty[ \end{cases}$$

$f(x) = x$  es creciente en  $] - \infty, 1]$  y  $f(x) = x - 3$  es creciente en  $]1, \infty[$ .

Sin embargo  $f$  no es creciente  $] - \infty, 1] \cup ]1, \infty[ = \mathbb{R}$  pues (por ejemplo), existe  $x = 0 \in \mathbb{R}$ ,  $y = 2 \in \mathbb{R}$  tales que  $x < y$  pero  $0 = f(x) \not\leq f(y) = -1$ .

7. **Verdadero.** Sea  $x \in D$

$$(f \circ Id)(x) = f(Id(x)) = f(x) \quad \forall x \in D$$

y

$$(Id \circ f)(x) = Id(f(x)) = f(x) \quad \forall x \in D$$

luego,

$$f \circ Id_D = Id_{\text{Rec}f} \circ f = f$$

ó

$$f \circ Id = Id \circ f = f$$

8. **Falso.** Sea  $f$  una función definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 1 \end{aligned}$$

y supongamos que existe una función  $g$  tal que  $\text{Rec}f \subseteq \text{Dom}g$  y  $g \circ f = \text{Id}$ , entonces

$$(g \circ f)(x) = x, \quad \forall x \in \text{Dom}f = \mathbb{R}$$

Si  $x = 1$  se tiene que

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = g(1) = 1$$

Si  $x = 2$ , se tiene que

$$(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(1) = 2,$$

es decir,  $g(1)$  tiene dos valores 1 y 2 de donde  $g$  no es función, lo que contradice el supuesto.

Análogamente, si  $f$  es función de  $A$  en  $B$  no necesariamente existe una función  $g$  tal que

$$f \circ g = \text{Id}_B, \quad \forall x \in \text{Dom}g.$$

Sin embargo, bajo ciertas condiciones es posible que esto ocurra, es decir, que para una función  $f$  de  $A$  en  $B$  exista  $g$  de  $B$  en  $A$  (llamada la función inversa de  $f$ ) tal que

$$f \circ g = \text{Id}_B$$

y

$$g \circ f = \text{Id}_A$$

Veremos más adelante que una función tiene inversa si y sólo si es “inyectiva” y “epiyectiva”.

El concepto de *inyectividad*<sup>8</sup> indica que a todo elemento del recorrido de  $f$  le corresponde una única preimagen en el dominio de  $f$ . El de *epiyectividad* indica que a todo elemento del conjunto de llegada le corresponde por lo menos una preimagen, en otras palabras, el conjunto de imágenes de  $f$  (recorrido de  $f$ ) debe ser igual al conjunto de llegada.

**Definición 2.7** Una función  $f : A \longrightarrow B$  se dice **inyectiva** si y sólo si

$$(\forall u, v \in A)(f(u) = f(v) \Rightarrow u = v)$$

**Ejemplo 127** Sea  $f$  la función definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} - \{1\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{2x+1}{x-1} \end{aligned}$$

Probemos que  $f$  es una función inyectiva.

**Solución:** En efecto: Sean  $u, v \in \mathbb{R} - \{1\}$  tales que  $f(u) = f(v)$ . Se tiene:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{f(u)}{\frac{2u+1}{u-1}} &= \frac{f(v)}{\frac{2v+1}{v-1}} \\ \Rightarrow \quad (2u+1)(v-1) &= (2v+1)(u-1) \\ \Rightarrow \quad 2uv - 2u + v - 1 &= 2vu - 2v + u - 1 \\ \Rightarrow \quad u &= v \end{aligned}$$

luego,

$$f(u) = f(v) \Rightarrow u = v, \quad \forall u, v \in \mathbb{R} - \{1\}$$

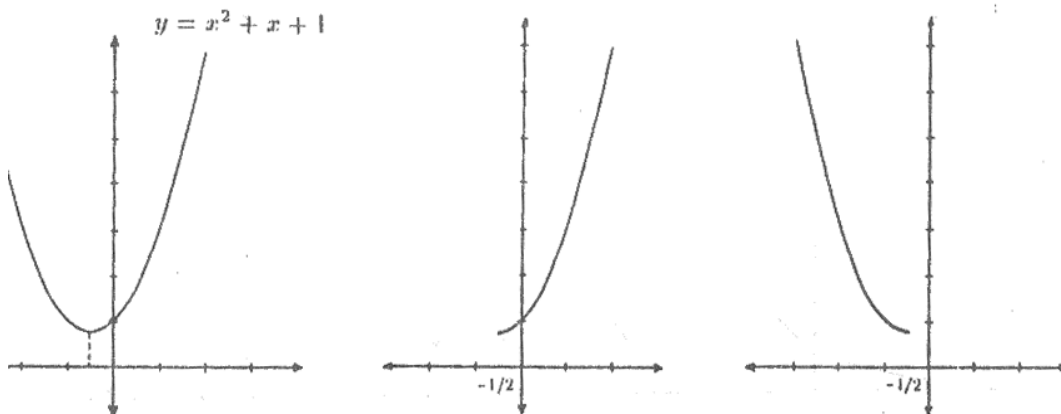
<sup>8</sup>Otro nombre utilizado en la literatura como sinónimo de inyectiva es 1-1 (se lee *uno a uno*).

**Ejercicio 128** Sea  $f$  la función definida por

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

Determine si  $f$  es una función inyectiva

**Solución:**  $f$  no es inyectiva, en efecto  $f(1) = f(-2) = 3$ , pero  $1 \neq -2$ . Es decir a  $y = 3 \in \text{Rec}f$  le corresponden dos preimágenes: 1, -2. Observemos la gráfica de  $f$  en el primer gráfico siguiente



Notemos que al trazar una recta horizontal, ésta puede cortar a la curva en dos puntos (excepto en  $y = 3/4$  a quien sólo le corresponde la preimagen  $x = -1/2$ )

Claramente se observa que si se restringe la función al intervalo  $[-1/2, \infty[$  ó al intervalo  $] -\infty, -1/2]$ , entonces se obtienen funciones inyectivas, es decir,

$$\begin{aligned} f: [-1/2, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f: ] -\infty, -1/2] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

son ambas funciones inyectivas (gráficos central y derecho de figura anterior respectivamente).

Determinemos analíticamente en qué intervalo  $f$  es inyectiva Sean  $u, v \in \mathbb{R}$  tal que  $f(u) = f(v)$ . se tiene:

$$\begin{aligned} &f(u) = f(v) \\ \Leftrightarrow &u^2 + u + 1 = v^2 + v + 1 \\ \Leftrightarrow &u^2 - v^2 = v - u \\ \Leftrightarrow &(u - v)(u + v) + (u - v) = 0 \\ \Leftrightarrow &(u - v)(u + v + 1) = 0 \\ \Leftrightarrow &u = v \quad \vee \quad v + u + 1 = 0 \end{aligned}$$

Notemos que  $u = v \wedge u + v + 1 = 0$ , si  $u = v = -1/2$ .

Buscaremos un subconjunto  $D$  del dominio de  $f$  en el cual se cumpla:

$$u = v \text{ y } u + v + 1 \neq 0 \quad \forall u, v \in D - \{-\frac{1}{2}\}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} &u = v \wedge u + v + 1 \neq 0 \\ \Rightarrow &u = v \wedge (u + v + 1 > 0 \vee u + v + 1 < 0) \\ \Rightarrow &(u = v \wedge u + v + 1 > 0) \vee (u = v \wedge u + v + 1 < 0) \\ \Rightarrow &2u + 1 > 0 \vee 2u + 1 < 0 \\ \Rightarrow &u > -1/2 \vee u < -1/2 \end{aligned}$$

pero  $-1/2$  pertenece al dominio de inyectividad. Luego, podemos considerar como dominios de inyectividad:

$$D = ] - \infty, -1/2]$$

o bien

$$D = [-1/2, \infty[$$

Así,

$$\begin{array}{ccc} f|_D: [-1/2, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R} & & f|_D: ] - \infty, -1/2] \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow x^2 + x + 1 & & x \longrightarrow x^2 + x + 1 \end{array}$$

son ambas funciones inyectivas como ya se vio gráficamente<sup>9</sup>

**Ejercicio 129** Demuestre que  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   
 $x \longrightarrow x^3$

es una función inyectiva.

**Solución:** Sean  $u, v \in \text{Dom} f = \mathbb{R}$  tales que  $f(u) = f(v)$   
se tiene

$$\begin{aligned} f(u) &= f(v) \\ \Longleftrightarrow u^3 &= v^3 \\ \Longleftrightarrow u^3 - v^3 &= 0 \\ \Longleftrightarrow (u - v)(u^2 + uv + v^2) &= 0 \\ \Longleftrightarrow u = v \quad \vee \quad u^2 + uv + v^2 &= 0 \end{aligned}$$

Pero el discriminante de la ecuación de segundo grado  $u^2 + uv + v^2$  en la variable  $u$ , es

$$\Delta = v^2 - 4v^2 = -3v^2 < 0, \quad \forall v \in \mathbb{R} - \{0\}$$

luego,

$$u^2 + uv + v^2 > 0, \quad \forall u, v \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por lo tanto  $u = v$ .

Otra forma de ver que  $u^2 + uv + v^2 \neq 0$  es

$$u^2 + uv + v^2 = (u + \frac{1}{2}v)^2 + \frac{3}{4}v^2 > 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R} - \{0\}$$

**Ejercicio 130** Determine si

$$\begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x) = \frac{x}{x^2+5} \end{array}$$

es inyectiva. En caso de no serlo hacer las restricciones necesarias para que lo sea.

**Solución:** Sean  $u, v \in \text{Dom} g = \mathbb{R}$  tales que  $g(u) = g(v)$   
se tiene sucesivamente:

$$\begin{aligned} g(u) &= g(v) \\ \Longleftrightarrow \frac{u}{u^2+5} &= \frac{v}{v^2+5} \\ \Longleftrightarrow u(v^2+5) &= v(u^2+5) \\ \Longleftrightarrow uv^2+5u &= vu^2+5v \\ \Longleftrightarrow uv^2-vu^2 &= 5v-5u \\ \Longleftrightarrow uv(v-u) &= 5(v-u) \\ \Longleftrightarrow uv(v-u)-5(v-u) &= 0 \\ \Longleftrightarrow (v-u)(uv-5) &= 0 \\ \Longleftrightarrow u = v \quad \vee \quad uv-5 &= 0 \end{aligned}$$

Observemos que  $g$  no es 1-1 (inyectiva), pues  $g(1) = g(5) = 1/6$  y  $1 \neq 5$ .

---

<sup>9</sup>  $f|_D$  indica  $f$  restringida al dominio  $D$ .

Ahora determinemos un subconjunto  $D$  del dominio donde  $g$  sea inyectiva. Notemos que

$$u = v \quad \wedge \quad uv = 5$$

si

$$u = v = \sqrt{5} \quad \vee \quad u = v = -\sqrt{5}$$

Para determinar el dominio de inyectividad se debe verificar

$$u = v \wedge uv \neq 5. \quad \text{Ahora bien:}$$

$$\begin{aligned} u = v \wedge uv \neq 5 &\iff u = v \wedge (uv > 5 \vee uv < 5) \\ &\iff (u = v \wedge uv > 5) \vee (u = v \wedge uv < 5) \\ &\iff u^2 > 5 \vee u^2 < 5 \\ &\iff |u| > \sqrt{5} \vee |u| < \sqrt{5} \\ &\iff (u > \sqrt{5} \vee u < -\sqrt{5}) \vee (-\sqrt{5} < u \wedge u < \sqrt{5}) \\ &\iff u \in ]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5}, \infty[ \vee u \in ]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[ \end{aligned}$$

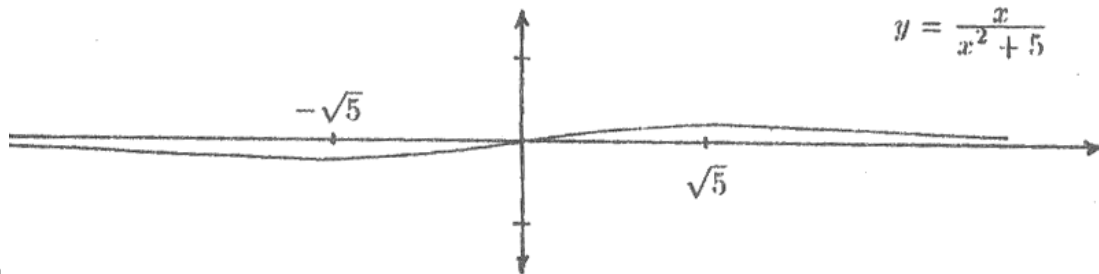
Pero  $-\sqrt{5}$  y  $\sqrt{5}$  pertenecen al dominio de inyectividad, luego,

$$\begin{aligned} g_1 : [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = \frac{x}{x^2+5} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g_2 : ]-\infty, -\sqrt{5}] \cup [\sqrt{5}, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow g(x) = \frac{x}{x^2+5} \end{aligned}$$

son ambas funciones inyectivas.



Observemos el gráfico de  $g$  en

**Ejercicio 131** Sean  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$  funciones y  $h = g \circ f$ . Demuestre que si  $f$  y  $g$  son inyectivas, entonces  $h$  también es inyectiva.

**Solución:** Sean  $u, v \in \text{Dom} h$  tales que  $h(u) = h(v)$ . Debemos demostrar que  $u = v$

$$\begin{aligned} h(u) &= h(v) \\ \iff (g \circ f)(u) &= (g \circ f)(v) \\ \iff g(f(u)) &= g(f(v)) \end{aligned}$$

Como  $g$  es 1-1 se tiene entonces que  $f(u) = f(v)$ , y siendo  $f$  inyectiva, resulta que  $u = v$  lo que demuestra la proposición

**Ejercicio 132** Sean  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$  funciones y  $h = g \circ f$ . Demuestre que si  $h$  es inyectiva, entonces  $f$  también lo es. **Solución:** Sean  $u, v \in \text{Dom} f = A$  tales que  $f(u) = f(v)$ . Debemos nuevamente demostrar que  $u = v$ . Como  $f(u) = f(v)$  y  $g$  es función tendremos que  $g(f(u)) = g(f(v))$  de donde  $h(u) = h(v)$ , pero como  $h$  es 1-1 se tiene que  $u = v$ .

**Proposición 2.8** Si  $f$  es una función estrictamente creciente o bien estrictamente decreciente, entonces  $f$  es inyectiva.



**Demostración:** Sin pérdida de generalidad (s.p.g.), supongamos que  $f$  es una función estrictamente creciente, es decir,

$$(\forall u, v \in \text{Dom} f)(u < v \Rightarrow f(u) < f(v)) \quad (2.9)$$

y supongamos además que  $f$  no es inyectiva, por lo tanto existirán  $u, v \in \text{Dom} f$  tales que

$$f(u) = f(v) \wedge u \neq v$$

de donde

$$u > v \vee u < v$$

lo que contradice 2.9. La demostración es análoga si  $f$  es estrictamente decreciente, queda para el lector reproducirla.  $\square$

Note que el recíproco de la proposición anterior no es cierto. Una función inyectiva no es necesariamente estrictamente creciente o estrictamente decreciente. Por ejemplo, considere la función  $y = 1/x$  representada por la gráfica de la hipérbola equilátera; esta función es inyectiva pero no es estrictamente creciente ni estrictamente decreciente

**Definición 2.9** Una función  $f : A \longrightarrow B$  se dice **epiyectiva** o **sobreyectiva** si y sólo si  $\text{Rec} f = B$ .

**Ejemplo 133** Consideremos la función  $f$  definida por

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

Esta función no es epiyectiva, pues  $\text{Rec} f = \mathbb{R}_0^+ \neq \mathbb{R}$ . Sin embargo, si se restringe el conjunto de llegada a  $\mathbb{R}_0^+$ , entonces

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{x} \end{aligned}$$

sí es una función epiyectiva.

Observe que una función  $f : A \longrightarrow \text{Rec} f$  es siempre epiyectiva.

**Ejemplo 134** Consideremos la función  $f$  definida por

$$\begin{aligned} f : ]-1, 1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Restringamos dominio y recorrido de modo que  $f$  sea inyectiva y epiyectiva.

**Solución:** Sean  $u, v \in \text{Dom} f = ]-1, 1[$  tales que  $f(u) = f(v)$  se tiene:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f(u) &= f(v) \\ \Rightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \\ \Leftrightarrow \quad \sqrt{1-v^2} &= \sqrt{1-u^2} \\ \Leftrightarrow \quad (v-u)(u+v) &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad u=v \quad \vee \quad u+v &= 0 \end{aligned}$$

Notemos que si  $u = 0$  entonces se verifica que  $u = v \wedge v + u = 0$ .

Es claro que los intervalos de inyectividad de  $f$  son  $[0, 1[$  y  $] -1, 0]$ , es decir, las funciones

$$\begin{aligned} f_1 : ]-1, 0] &\longrightarrow \mathbb{R} & f_2 : [0, 1[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

son ambas funciones inyectivas.

**Ejemplo 135** Consideremos  $f_2$  y determinemos su recorrido.

Sea  $x \in [0, 1[$  e  $y \in \mathbb{R}$  tal que  $y = f(x)$ , se tiene:

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \iff y &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad y > 0 \\ \iff y^2 &= \frac{1}{1-x^2} \\ \iff x^2 &= \frac{y^2-1}{y^2} \end{aligned}$$

ahora bien, como  $x \in [0, 1[$ , entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} < 1 && \text{con } y^2 - 1 \geq 0 \\ \iff 0 &\leq \frac{y^2-1}{y^2} < 1 \\ \iff 0 &\leq y^2 - 1 < y^2 \\ \iff 0 &\leq y^2 - 1 < y^2 \\ \iff 0 &\leq y^2 - 1 \wedge y^2 - 1 < y^2 \\ \iff 1 &\leq y^2 \wedge -1 < 0 \\ \iff y^2 &\geq 1 \end{aligned}$$

pero  $y > 0$ , luego,  $y \geq 1$ .

Así,

$$\begin{aligned} f: [0, 1[ &\longrightarrow [1, \infty[ \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

es una función inyectiva y sobreyectiva

**Definición 2.10** Una función  $f: A \longrightarrow B$  se dice **biyectiva** si y sólo si es inyectiva y sobreyectiva.

**Ejemplo 136** Las funciones siguientes son biyectivas

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^- \\ x &\longrightarrow f(x) = -\sqrt{x} \\ g: \mathbb{R}_0^- &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longrightarrow g(x) = x^2 \\ h: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow h(x) = x^3 \\ l: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow l(x) = \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

Note que, para  $f$  y  $g$ , se cumple:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) = f(g(x)) &= f(x^2) \\ &= -\sqrt{x^2} \\ &= -|x| = -(-x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^- \end{aligned}$$

y

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(-\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

es decir,

$$f \circ g = Id_{\mathbb{R}_0^-} \quad \wedge \quad g \circ f = Id_{\mathbb{R}_0^+}$$

Análogamente para  $h$  y  $l$

$$(h \circ l)(x) = x \quad , \quad (l \circ h)(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

de donde

$$h \circ l = l \circ h = Id_{\mathbb{R}}$$

Las funciones que cumplen con esta propiedad se dicen “invertibles”, según se explica a continuación.

**Propiedad 2.11** Si  $f : A \longrightarrow B$  es biyectiva, entonces existe una única  $f^{-1}$  de  $B$  en  $A$  tal que

a)  $f \circ f^{-1} = Id_B$  y  $f^{-1} \circ f = Id_A$

b)  $(f^{-1})^{-1} = f$

La función  $f^{-1}$  de la proposición anterior es única y puede definirse directamente como sigue:

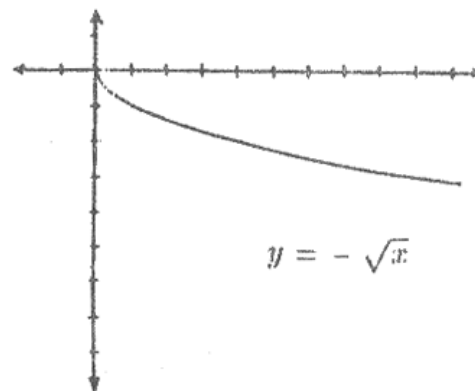
**Definición 2.12** Si  $f : A \longrightarrow B$  es una función biyectiva, entonces la **función inversa** de  $f$  se define como

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow A \\ y &\longrightarrow x = f^{-1}(y) \end{aligned}$$

donde

$$y = f(x) \quad \text{o} \quad x = f^{-1}(y)$$

En el ejemplo anterior la inversa de  $f$  es  $g$  y la inversa de  $h$  es  $l$ . Recíprocamente la inversa de  $g$  es  $f$  y la



inversa de  $l$  es  $h$ . Observemos las gráficas de  $f$  y  $g^{10}$  en la figura

Para obtener  $f^{-1}$  de una función  $f$  biyectiva debemos despejar  $x$  de la ecuación  $y = f(x)$ , como se explica en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 137** En el ejemplo 134 vimos que la función

$$\begin{aligned} f : [0, 1[ &\longrightarrow [1, \infty[ \\ x &\longrightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

es biyectiva y obtuvimos que;

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ \iff x &= \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} \end{aligned}$$

luego,

$$x = f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} f^{-1} : [1, \infty[ &\longrightarrow [0, 1[ \\ y &\longrightarrow f^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}} \end{aligned}$$

<sup>10</sup>Dada la gráfica de  $f$  en una hoja transparente, para conocer la gráfica de su inversa basta rotar los ejes en  $45^\circ$  contra reloj y dar vuelta la hoja y mirar por detrás la figura; esta última corresponderá a la gráfica de la inversa de  $f$ .

Es costumbre reservar la letra  $x$  para los elementos del dominio de una función, luego, lo anterior se escribe

$$\begin{aligned} f^{-1}: [1, \infty[ &\longrightarrow [0, 1[ \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}} \end{aligned}$$

**Ejercicio 138** Sean

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}_0^+ &\longrightarrow [-1, \infty[ & g: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow f(x) = \sqrt{x} - 1 & x &\longrightarrow g(x) = x + 5 \end{aligned}$$

funciones.

- a) Pruebe que  $f$  es biyectiva y determine  $f^{-1}$ .  
b) Encuentre una función,  $h$  tal que  $h \circ f = g$ .

**Solución:** a.i) Probaremos que  $f$  es inyectiva.

Sea  $u, v \in \mathbb{R}_0^+$  tal que  $f(u) = f(v)$  entonces:

$$\begin{aligned} \sqrt{u} - 1 &= \sqrt{v} - 1 \\ \iff \sqrt{u} &= \sqrt{v} \\ \iff u &= v \end{aligned}$$

Luego  $f(u) = f(v) \Rightarrow u = v, \forall u, v \in \mathbb{R}_0^+$

ii) Sea  $x \in \mathbb{R}_0^+$  e  $y \in [-1, \infty[$  tal que  $y = f(x)$  entonces

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x} - 1 \\ \iff y + 1 &= \sqrt{x} ; y + 1 \geq 0 \\ \iff (y + 1)^2 &= x \end{aligned}$$

la expresión  $(y + 1)^2$  está definida para todo  $y$  en  $\mathbb{R}$ , pero  $y + 1 \geq 0$ ,

$$\text{Rec}f = [-1, \infty[$$

Por lo tanto  $f$  es epiyectiva.

Asípor (i) y (ii)  $f$  es biyectiva.

$$\begin{aligned} f^{-1}: [-1, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ x &\longrightarrow f^{-1}(x) = (x + 1)^2 \end{aligned}$$

b) Puesto que  $\text{Rec}f^{-1} = \mathbb{R}_0^+ \subseteq \text{Dom}g$  entonces existe  $g \circ f^{-1}$ . Luego, para despejar  $h$  aplicamos  $f^{-1}$  a la igualdad  $h \circ f = g$ ,  
es decir,

$$\begin{aligned} h \circ f &= g \\ \iff h \circ (f \circ f^{-1}) &= g \circ f^{-1} \\ \iff h \circ \text{Id} &= g \circ f^{-1} \\ \iff h &= g \circ f^{-1}. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\text{Dom}h = \text{Dom}g \circ f^{-1} = \text{Dom}f^{-1} = [-1, \infty[$  y

$$h(x) = g(f^{-1}(x)) = g((x + 1)^2) = (x + 1)^2 + 5$$

$$\begin{aligned} h: [-1, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow (x + 1)^2 + 5 \end{aligned}$$

**Ejercicio 139** Determine si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas

1. Si  $g$  es invertible, entonces  $g^{-1} = \frac{1}{g}$  (donde 1 indica la función constante 1).

2. Si  $g : A \longrightarrow B$  es invertible, entonces

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g$$

3. Si  $f : A \longrightarrow B$  y  $g : B \longrightarrow C$  son funciones invertibles, entonces  $g \circ f$  es también invertible y

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Solución:**

1. **Falso.** La función  $g$  definida por

$$\begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

es invertible y

$$\begin{array}{ccc} g^{-1} : & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

sin embargo,

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

luego

$$g^{-1} \neq \frac{1}{g}$$

2. **Falso.** Consideremos la biyección

$$\begin{array}{ccc} g : & [1, \infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R}_0^+ \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{x-1} \end{array}$$

y su inversa

$$\begin{array}{ccc} g^{-1} : & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & [1, \infty[ \\ & x & \longrightarrow & x^2 + 1 \end{array}$$

$$(g \circ g^{-1})(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+$$

en cambio

$$(g^{-1} \circ g)(x) = x \quad \forall x \in [1, \infty[$$

luego,  $g \circ g^{-1} \neq g^{-1} \circ g$  porque tienen distintos dominios.

3. **Verdadera.** Su comprobación queda de ejercicio para el lector.

## 2.6 Las funciones Exponenciales y Logarítmicas

Consideremos el siguiente problema:

*Si una bacteria en cierto cultivo se duplica en cada hora y el número de bacterias que habría al iniciar el experimento es una, entonces el número  $f(n)$  de bacterias que hay en el cultivo después de  $n$  horas es*

$$f(n) = 2^n$$

Note que la expresión anterior es una función cuyo dominio es  $\mathbb{N}$ , es decir

$$\begin{array}{ccc} f : & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \longrightarrow & 2^n \end{array}$$

Queremos extender la función  $f$  a una función más general, con dominio  $\mathbb{R}$ . Pero, ¿qué sentido tiene extender a la expresión  $2^x$  con  $x \in \mathbb{R}$ ?

Sabemos que si  $x \in \mathbb{N}$ , entonces

$$2^x = 2 \cdot 2 \cdots 2 \quad (x \text{ veces})$$

Si  $-x \in \mathbb{Z}^-$ ,  $x \in \mathbb{Z}^+$ , entonces

$$2^{-x} = \frac{1}{2^x}$$

Si  $x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ , entonces

$$2^x = \sqrt[n]{2^m}$$

Pero si  $x \notin \mathbb{Q}$ , es decir,  $x$  es un irracional, por ejemplo,  $x = \sqrt{2}$ , ¿qué significado tiene  $2^{\sqrt{2}}$ ?

Consideremos las aproximaciones decimales sucesivas e inferiores a  $\sqrt{2}$  y formemos el conjunto

$$A = \{2^{1,4}, 2^{1,41}, 2^{1,414}, 2^{1,4142}, \dots\}$$

Puesto que  $A$  es un conjunto acotado, entonces por axioma del supremo existe  $\text{Sup}A$ .

Sea  $\text{Sup}A =: 2^{\sqrt{2}}$ .

En general si  $b > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ , se define

$$b^x := \text{Sup}\{b^{x_0, x_1}, b^{x_0, x_1 x_2}, b^{x_0, x_1 x_2 x_3}, \dots\} \quad \text{si } b > 1$$

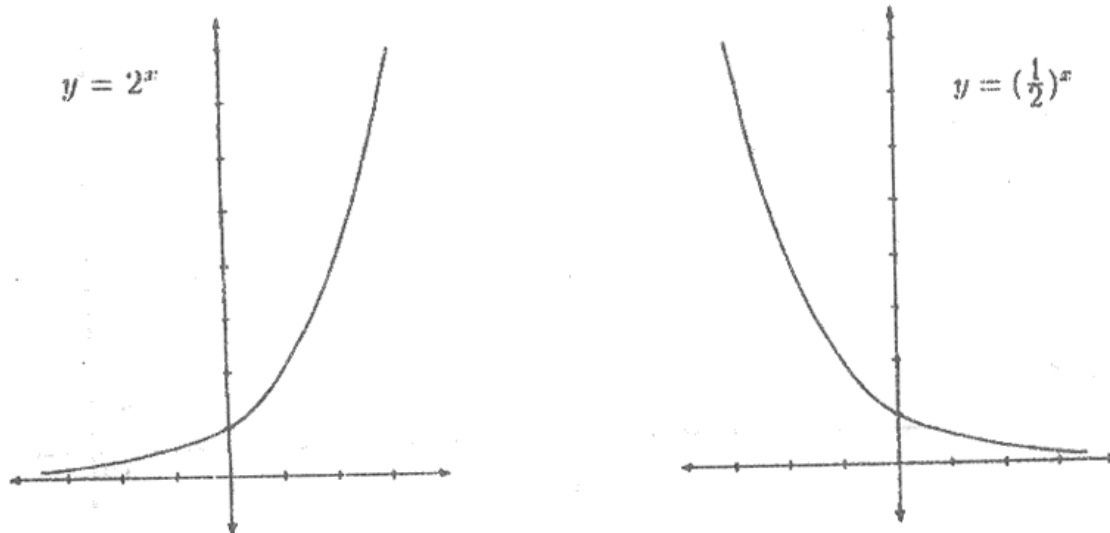
y

$$b^x := \text{Inf}\{b^{x_0, x_1}, b^{x_0, x_1 x_2}, b^{x_0, x_1 x_2 x_3}, \dots\} \quad \text{si } 0 \leq b \leq 1$$

donde  $x_0, x_1; x_0, x_1 x_2; x_0, x_1 x_2 x_3; \dots$  son las aproximaciones decimales sucesivas e inferiores a  $x \in \mathbb{R}$ . Luego podemos definir la función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow 2^x \end{aligned}$$

La representación gráfica de esta función es una curva de trazado continuo, como se ve en el gráfico derecho siguiente



Análogamente,  $g$  definida como

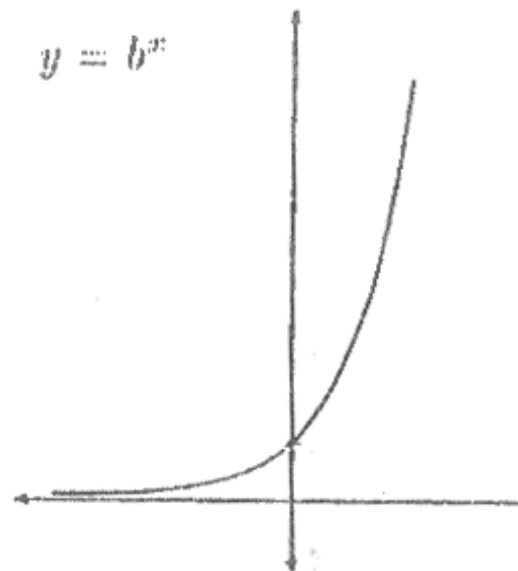
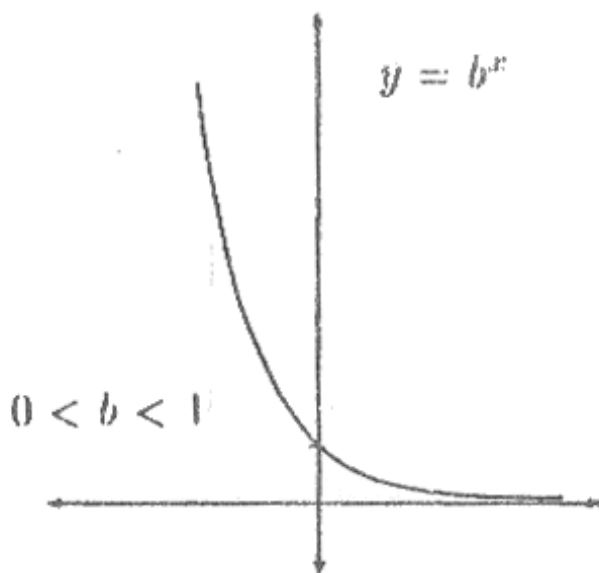
$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x \end{aligned}$$

se representa gráficamente por la curva de trazado continuo, como se puede ver en el gráfico derecho anterior, cuyo recorrido es  $\mathbb{R}^+$ .

En general podemos definir la **función exponencial en base  $b$**  con  $b > 0$  como

$$\begin{array}{ccc} \exp_b : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & b^x \end{array}$$

cuya representación gráfica está en la figura



Note que si  $b > 1$  la función  $\exp_b$  es estrictamente creciente y si  $0 < b < 1$ , la función  $\exp_b$  es estrictamente decreciente. En ambos casos es inyectiva y su recorrido es  $\mathbb{R}^+$ .

Observemos que la curva no corta el eje  $x$ , es decir, no corta a la recta  $y = 0$ .

Diremos que la recta  $y = 0$  es una **asíntota horizontal** de la función  $y = b^x$ . Esto significa que si  $b > 1$  y  $x$  decrece indefinidamente, las imágenes  $y = b^x$  tienden a cero.

En este caso escribiremos;

$$\text{Si } x \rightarrow -\infty, \text{ entonces } b^x \rightarrow 0$$

En cambio si  $0 < b < 1$  y  $x$  crece indefinidamente, entonces las imágenes  $y = b^x$  tienden a cero.

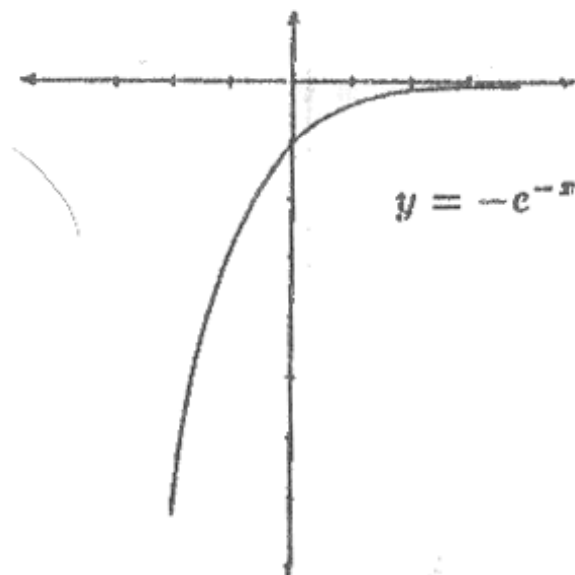
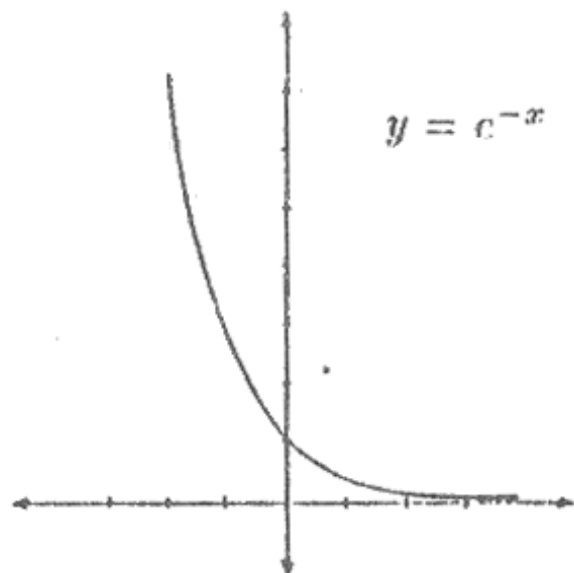
En este caso escribiremos

$$\text{Si } x \rightarrow \infty, \text{ entonces } b^x \rightarrow 0$$

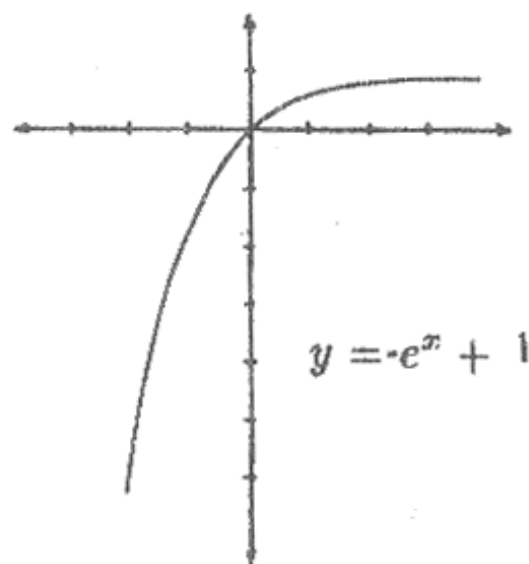
**Ejercicio 140** Grafique la función

$$y = 1 - e^{-x}$$

**Solución:** Observemos la gráfica de  $y = e^{-x}$  y de  $y = -e^{-x}$



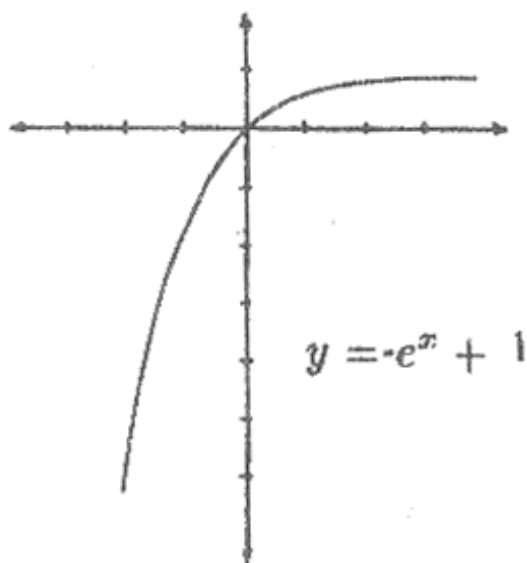
En este caso  $b = \frac{1}{e} < 1$ .



Así,  $y = 1 - e^{-x}$  es un traslación de  $y = -e^{-x}$  como se muestra en la figura

Note que la asíntota horizontal de  $y = 1 - e^{-x}$  es ahora  $y = 1$ , pues si  $x \rightarrow \infty$  entonces  $1 - e^{-x} \rightarrow 1$



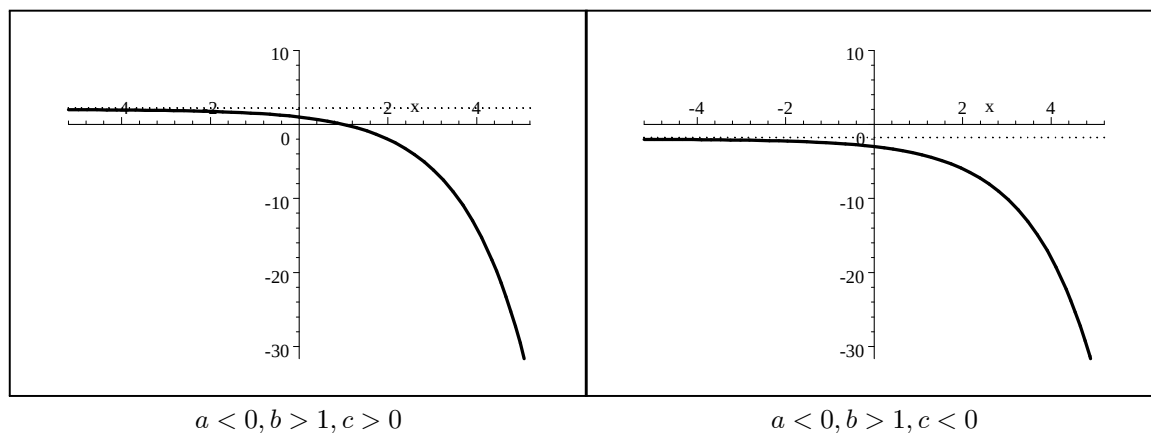


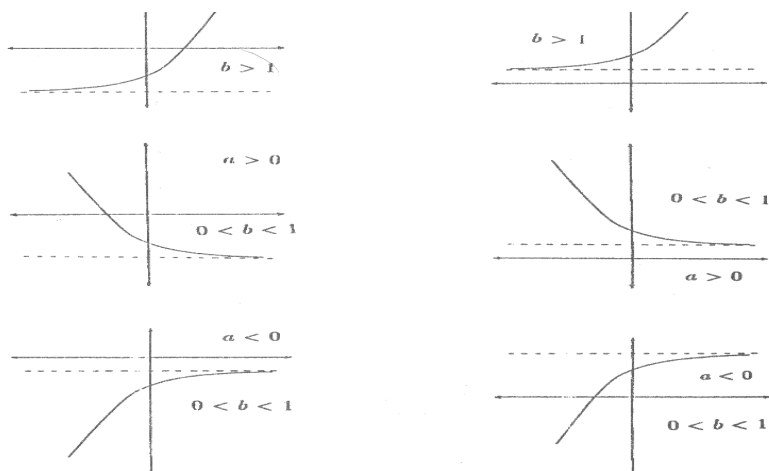
**Ejemplo 141** Determine la gráfica de la función

$$y = ab^x + c$$

para los diferentes valores posibles de  $a$ ,  $b$  y  $c$  en  $\mathbb{R}$

**Solución:** Consideraremos distintos casos que se muestran en las gráficas





**Propiedad 2.13** Si  $a \in \mathbb{R}^+$ ,  $b \in \mathbb{R}^+$  y  $x, y \in \mathbb{R}$ , entonces

i)  $a^x a^y = a^{x+y}$

ii)  $a^x b^x = (ab)^x$

iii)  $(a^x)^y = a^{xy}$

iv)  $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$

**Ejemplo 142** Resolvamos las siguientes ecuaciones exponenciales

1.  $5^x - 3^{x-1} = 3^{x+1} - 5^{x-1}$

2.  $2^{x+1} + 4^x = 80$

**Solución:**

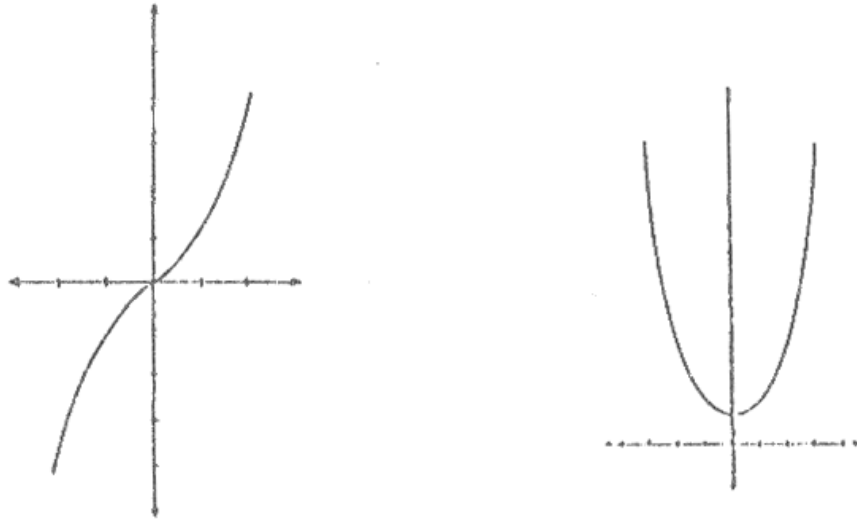
1.

$$\begin{aligned}
 5^x - 3^{x-1} &= 3^{x+1} - 5^{x-1} &\iff 5^x + 5^{x-1} &= 3^{x+1} + 3^{x-1} \\
 &&\iff 5^x \left(1 + \frac{1}{5}\right) &= 3^x \left(3 + \frac{1}{3}\right) \\
 &&\iff 5^x \frac{6}{5} &= 3^x \frac{10}{3} \\
 &&\iff \left(\frac{5^x}{3^x}\right) &= \left(\frac{5^2}{3^2}\right) \\
 &&\iff \left(\frac{5}{3}\right)^x &= \left(\frac{5}{3}\right)^2 \\
 &&\iff x &= 2
 \end{aligned}$$

luego,  $S = \{2\}$ .

2. Consideremos el cambio de variables  $u = 2^x$ , entonces

$$\begin{aligned}
 2^{x+1} + 4^x &= 80 &\iff 2^{x+1} + 4^x - 80 &= 0 \\
 &&\iff 2 \cdot 2^x + (2^x)^2 - 80 &= 0 \\
 &&\iff u^2 + 2u - 80 &= 0 \\
 &&\iff (u + 10)(u - 8) &= 0 \\
 &&\iff u = -10 \vee u = 8
 \end{aligned}$$

Figure 2.1:  $y = \sinh(x)$  ,  $y = \cosh(x)$ 

luego,  $S_1 = \{-10, 8\}$ , pero  $u > 0$ , luego,  $S = \{8\}$ , luego,

$$2^x = 8$$

de donde  $x = 3$

La base exponencial de uso más frecuente es  $e$ . Por su uso tan extenso, a la función  $f(x) = e^x$  se le llamará *función exponencial*.

En base a esta función podemos definir las siguientes funciones:

**Definición 2.14** Se define la función **seno hiperbólico** como;

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

y **coseno hiperbólico** como;

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \frac{e^x + e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

Las gráficas correspondientes son las que se muestran en la figura

Hemos visto que si  $b \neq 1$  la función  $\exp_b$  es una función inyectiva con recorrido  $\mathbb{R}^+$ , luego, la función

$$\begin{aligned} \exp_b : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\longrightarrow b^x \end{aligned}$$

es biyectiva. Por lo tanto existe su inversa  $\exp_b^{-1}$  que denominaremos la **función logaritmo en base  $b$**  y escribiremos

$$\exp_b^{-1} = \log_b$$

es decir, la función logaritmo en base  $b$  se define como

$$\begin{aligned} \log_b : \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longrightarrow \log_b(x) = y \end{aligned}$$

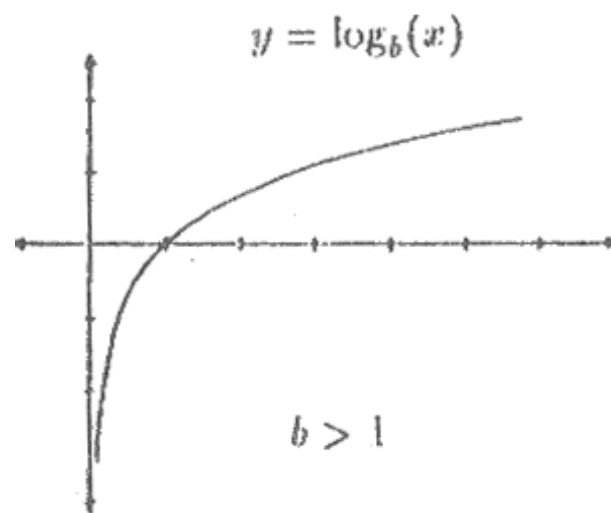
donde

$$y = \log_b(x) \iff x = b^y$$

**Ejemplo 143** 1.  $\log_2(4) = 2$  pues  $2^2 = 4$ .

2.  $\log_2(\frac{1}{4}) = -2$  pues  $2^{-2} = \frac{1}{4}$ .

3.  $\log_{\frac{1}{2}}(4) = -2$  pues  $(\frac{1}{2})^{-2} = 4$ .



La representación gráfica de la función logaritmo es la que muestra la figura

**Observación:**

1. Si  $b > 1$ , entonces  $\log_b$  es una función estrictamente creciente.
2. Si  $0 < b < 1$ , entonces  $\log_b$  es una función estrictamente decreciente. Además de la gráfica es claro que
3. Si  $b > 1$  y  $x > 1$ , entonces  $\log_b(x) > 0$ .
4. Si  $b > 1$  y  $0 < x < 1$ , entonces  $\log_b(x) < 0$ .
5. Si  $0 < b < 1$  y  $0 < x < 1$ , entonces  $\log_b(x) > 0$ .
6. Si  $0 < b < 1$  y  $x > 1$ , entonces  $\log_b(x) < 0$

Esta es una buena información para resolver *algunas* inecuaciones y graficar funciones relacionadas con funciones logarítmicas. Por ejemplo, el conjunto solución de la inecuación

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) \leq \log_2(x) + \sqrt{x-1} \quad (2.10)$$

es el intervalo  $[1, \infty[$ . En efecto, los términos en (2.10) tienen significado en  $\mathbb{R}$  si  $x > 0$  y  $x \geq 1$ , es decir,  $x \in [1, \infty[$  y como;

$$\log_2(x) \geq 0 \text{ y } \sqrt{x-1} \geq 0$$

para  $x \geq 1$ , entonces

$$\log_2(x) + \sqrt{x-1} \geq 0 \quad \forall x \in [1, \infty[$$

Por otra parte

$$\log_{\frac{1}{2}}(x) \leq 0$$

para  $x \geq 1$ , en consecuencia, la desigualdad 2.10 se cumple para todo  $x \in [1, \infty[$  luego

$$S = [1, \infty[$$

Observemos que en  $x = 0$  la función  $\log_b(x)$  no está definida. Diremos que la recta  $x = 0$  es una **asíntota vertical** para la función.

Una asíntota vertical  $x = x_0$  nos indica que para  $x$  cercanos a  $x_0$  las imágenes  $f(x)$  crecen o decrecen indefinidamente.

En algunos casos, para graficar aproximadamente la curva que representa a una función, es suficiente determinar el dominio, las asíntotas, las intersecciones con los ejes de coordenadas, y en qué intervalos la función es positiva (negativa). Por ejemplo

Grafiquemos la función  $y = f(x)$ , donde

$$y = \log_{\frac{2}{3}} ||x + 2| - 5|$$

**Solución:** Determinemos el dominio

$$\begin{aligned} \text{Dom} f &= \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - 5| > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : ||x + 2| - 5| \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3 \wedge x \neq -7\} \end{aligned}$$

Luego

$$\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{-7, 3\}$$

Las asíntotas verticales de la función pasan por aquellos puntos donde el argumento del logaritmo es cero, luego, las asíntotas son las rectas

$$x = 3, \quad x = -7$$

Ahora determinemos las intersecciones con los ejes coordenados

Si  $y = 0$ , entonces

$$\log_{\frac{2}{3}} ||x + 2| - 5| = 0$$

de donde

$$||x + 2| - 5| = 1$$

lo que equivale a

$$\begin{aligned} &|x + 2| - 5 = 1 \quad \vee \quad |x + 2| - 5 = -1 \\ \iff &|x + 2| = 6 \quad \vee \quad |x + 2| = 4 \\ \iff &x + 2 = 6 \vee x + 2 = -6 \quad \vee \quad x + 2 = 4 \vee x + 2 = -4 \\ \iff &x = 4 \vee x = -8 \quad \vee \quad x = 2 \vee x = -6 \end{aligned}$$

luego, la curva pasa por los puntos  $P_1(4, 0)$ ,  $P_2(-8, 0)$ ,  $P_3(2, 0)$ ,  $P_4(-6, 0)$ .

Si  $x = 0$ , entonces  $y = \log_{\frac{2}{3}} |-3| = \log_{\frac{2}{3}} 3$  luego, la curva pasa por  $P_5(0, \log_{\frac{2}{3}} 3)$ .

Nos falta determinar los intervalos donde la función es positiva y donde es negativa.

Las imágenes de la función serán positivas si

$$\log_{\frac{2}{3}} ||x + 2| - 5| > 0$$

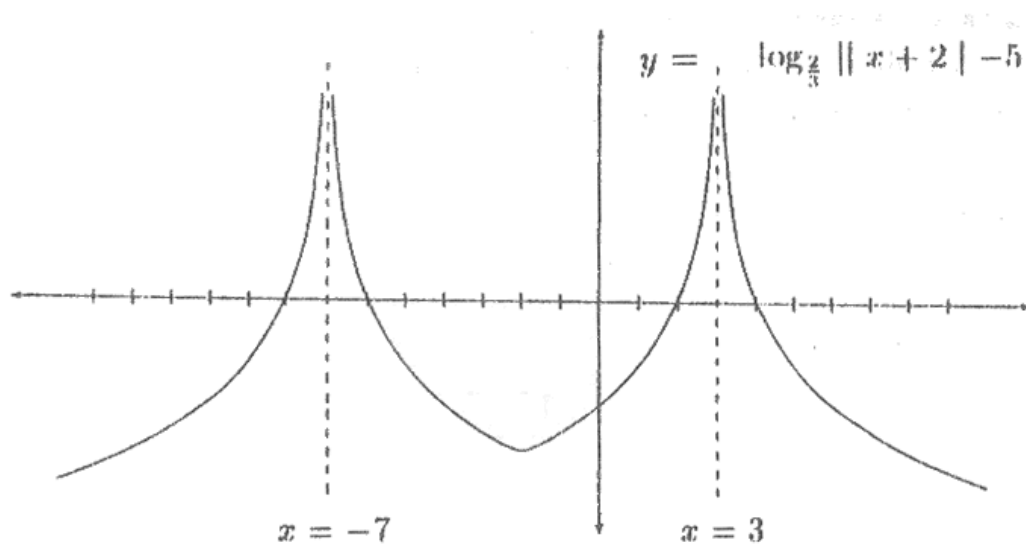
lo que es equivalente a

$$\begin{aligned} &0 < ||x + 2| - 5| < 1 \\ \iff &4 < |x + 2| \wedge |x + 2| < 6 \wedge x \neq 3 \wedge x \neq -7 \\ \iff &x \in ]-8, -6[ \cup ]2, 4[ - \{-7, 3\} \end{aligned}$$

Las imágenes de la función serán negativas si

$$\begin{aligned} \log_{\frac{2}{3}} ||x + 2| - 5| < 0 &\iff ||x + 2| - 5| > 1 \\ &\iff x \in ]-6, 2[ \cup ]4, \infty[ \cup ]-\infty, -8[ \end{aligned}$$

En base a la información obtenida se tiene la siguiente gráfica de la figura



$$y = \log_{\frac{2}{3}} ||x+2| - 5|$$

Dado que  $\log_b$  es la función inversa de  $\exp_b$  entonces la composición resulta ser la función identidad:

$$\log_b \circ \exp_b = Id_{\mathbb{R}} \quad \wedge \quad \exp_b \circ \log_b = Id_{\mathbb{R}^+}$$

es decir,

$$\begin{aligned} x &= \log_b(\exp_b(x)) = \log_b(b^x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ x &= \exp_b(\log_b(x)) = b^{\log_b x} & \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

luego se tienen las siguientes propiedades fundamentales:

**Propiedad 2.15** Sea  $b$  un número real positivo distinto de 1 entonces

$$\log_b b^x = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$b^{\log_b x} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

**Ejemplo 144** Determine para qué valores de  $a \in \mathbb{R}$  la inecuación

$$3 \left( \frac{1}{3} \right)^{5x+2+x^2} \leq 9^{ax^2-2x}$$

tiene como conjunto solución a  $\mathbb{R}$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} & 3 \left( \frac{1}{3} \right)^{5x+2+x^2} \leq 9^{ax^2-2x} \\ \iff & 3 \cdot 3^{-(5x+2+x^2)} \leq 3^{2(ax^2-2x)} \\ \iff & 3^{-x^2-5x-1} \leq 3^{2ax^2-4x} \end{aligned}$$

Como  $\log_3$  es un función estrictamente creciente, pues  $b = 3 > 1$ , entonces

$$\begin{aligned} & \log_3 3^{-x^2-5x-1} \leq \log_3 3^{2ax^2-4x} \\ \iff & -x^2 - 5x - 1 \leq 2ax^2 - 4x \\ \iff & (2a+1)x^2 + x + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

La inecuación tiene como solución a  $\mathbb{R}$  si

$$(1 - 4(2a+1) < 0 \wedge 2a+1 \neq 0) \quad \vee \quad (1 - 4(2a+1) = 0 \wedge 2a+1 > 0)$$

es decir

$$-\frac{3}{8} \leq a \quad \wedge \quad a > -\frac{1}{2}$$

$$a \in \left[-\frac{3}{8}, \infty\right[$$

**Ejercicio 145** Complete las siguientes frases

$$1. \text{ Sea } f: D \longrightarrow [3, \infty[ \text{ función, entonces el dominio máximo } D \text{ de } f \text{ es } \dots\dots\dots$$

$$x \longrightarrow e^{-x} - 1$$

2. El recorrido de

$$f: ]-1, 6] \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow \log_{1/2}(x+2) - \log_2(1/16)$$

es .....

$$3. \text{ Si } f(x) = \sqrt{x-2} \text{ y } g(x) = \log_2(9-|x|) + 1 \text{ son funciones entonces existe } f \circ g \text{ con dominio } \dots\dots\dots$$

$$\text{y } (f \circ g)(x) = \dots\dots\dots$$

$$4. \text{ La función inversa de la función biyectiva } f: \mathbb{R} \longrightarrow ]-2, \infty[ \text{ es } \dots\dots\dots$$

$$x \longrightarrow (1/2)^{x-1} - 2$$

**Solución:**

$$1. \text{ Dom } f = \{x \in \mathbb{R} : e^{-x} - 1 \geq 3\} \text{ pero}$$

$$e^{-x} - 1 \geq 3 \iff e^{-x} \geq 4$$

$$\iff -x \geq \ln 4$$

$$\iff x \leq -\ln 4$$

luego  $x \in ]-\infty, -\ln 4]$ .

Así,  $\text{Dom } f = ]-\infty, -\ln 4]$

$$2. \text{ Sea } x \in ]-1, 6] \text{ e } y \in \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$y = \log_{1/2}(x+2) - \log_2(1/16)$$

$$\iff y = \log_{1/2}(x+2) + 4$$

$$\iff y - 4 = \log_{1/2}(x+2)$$

$$\iff \left(\frac{1}{2}\right)^{(y-4)} = x+2$$

$$\iff x = \left(\frac{1}{2}\right)^{(y-4)} - 2$$

pero  $x \in ]-1, 6]$  luego

$$-1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{(y-4)} - 2 \leq 6 \quad / + 2$$

$$\iff 1 < \left(\frac{1}{2}\right)^{(y-4)} \leq 8 \quad / \log_{1/2}$$

$$\iff 0 > y - 4 \geq -3$$

$$\iff 4 > y \geq 1$$

en consecuencia  $\text{Rec } f = [1, 4[$ .

3.

$$\begin{aligned}
\text{Dom } g &= \{x \in \mathbb{R} : 9 - |x| > 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} : |x| < 9\} \\
&= ]-9, 9[. \\
\text{Dom } f &= \{x \in \mathbb{R} : x - 2 \geq 0\} = [2, \infty[. \\
\text{Dom}(f \circ g) &= \{x \in \text{Dom } g : g(x) \in \text{Dom } f\} \\
&= \{x \in ]-9, 9[ : \log_2(9 - |x|) + 1 \geq 2\}.
\end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
\log_2(9 - |x|) + 1 \geq 2 &\iff \log_2(9 - |x|) \geq 1 \\
&\iff 9 - |x| \geq 2 \\
&\iff |x| \leq 7 \\
&\iff -7 \leq x \leq 7
\end{aligned}$$

$$\text{Así } \text{Dom}(f \circ g) = ]-9, 9[ \cap [-7, 7] = [-7, 7].$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\log_2(9 - |x|) + 1) = \sqrt{\log_2(9 - |x|) - 1}$$

4. Sea  $x \in \mathbb{R}$  e  $y \in ]-2, \infty[$  tal que  $y = f(x)$  entonces

$$\begin{aligned}
y &= \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} - 2 \\
&\iff y + 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1} \\
&\iff \log_{1/2}(y + 2) + 1 = x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Así } f^{-1} : ]-2, \infty[ &\longrightarrow \mathbb{R} \\
x &\longrightarrow \log_{1/2}(x + 2) + 1
\end{aligned}$$

Resuelva la inecuación

$$\log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2 - 4)) > -2$$

**Solución:** Restringiendo tenemos

$$\begin{aligned}
&x^2 - 4 > 0 \wedge \log_5(x^2 - 4) > 0 \\
&\iff x^2 > 4 \wedge x^2 - 4 > 1 \\
&\iff |x| > 2 \wedge |x| > \sqrt{5}
\end{aligned}$$

Luego  $x \in ]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5}, \infty[$ , así,

$$\mathcal{R} = ]-\infty, -\sqrt{5}[ \cup ]\sqrt{5}, \infty[$$

Ahora resolvemos la inecuación con  $x \in \mathcal{R}$ 

$$\begin{aligned}
&\log_{\frac{1}{3}}(\log_5(x^2 - 4)) > -2 \\
&\iff \log_5(x^2 - 4) < \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} \\
&\iff x^2 - 4 < 5^9 \\
&\iff |x| < \sqrt{5^9 + 4} \\
&\iff -\sqrt{5^9 + 4} < x < \sqrt{5^9 + 4}
\end{aligned}$$

pero  $x \in \mathcal{R}$ .



**Ejercicio 146** Luego el conjunto solución es

$$S = ] - \sqrt{5^9 + 4}, \sqrt{5^9 + 4}[ \cap \mathcal{R} = ] - \sqrt{5^9 + 4}, -\sqrt{5}[ \cup ] \sqrt{5}, \sqrt{5^9 + 4}[$$

**Ejercicio 147** Resuelva la ecuación

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{27}{8}\right)^{(x-1)} = \frac{\log 4}{\log 8}$$

**Solución:** La inecuación equivale a

$$\begin{aligned} & \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \left(\frac{2}{3}\right)^{-3(x-1)} = \frac{2 \log 2}{3 \log 2} \\ \iff & \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} \left(\frac{2}{3}\right)^{3(1-x)} = \frac{2}{3} \\ \iff & 2x + 3(1-x) = 1 \\ \iff & x = 2 \end{aligned}$$

**Propiedad 2.16** Sean  $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $x, y \in \mathbb{R}^+$ ,  $r \in \mathbb{R}$ , entonces:

i)  $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$

ii)  $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$

iii)  $\log_b x^r = r \log_b x$

**Demostración:** Sea  $u = \log_b x$ ,  $v = \log_b y$ , entonces

$$b^u = x, \quad b^v = y$$

así,

$$\log_b(xy) = \log_b(b^u b^v) = \log_b b^{u+v} = u + v$$

luego,

$$\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$$

Por otra parte,

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b(b^u b^{-v}) = \log_b b^{u-v} = u - v$$

luego,

$$\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$$

Finalmente,

$$\log_b x^r = \log_b (b^u)^r = \log_b b^{ru} = ru$$

por lo tanto,

$$\log_b x^r = r \log_b x$$

lo que prueba finalmente la propiedad. □

Resuelva la ecuación

$$\log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1)$$

**Solución:** Note que la restricción es  $\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}$  pues los argumentos de los logaritmos son ambas sumas de números positivos, luego la ecuación se reduce a

$$\begin{aligned} & \log 2 + \log(4^{x-2} + 9) = 1 + \log(2^{x-2} + 1) \\ \iff & \log 2(4^{x-2} + 9) = \log 10(2^{x-2} + 1) \\ \iff & 2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1) \\ \iff & 2^{2x} - 20 \cdot 2^x + 64 = 0 \end{aligned}$$

Sea  $u = 2^x$ , reemplazando obtenemos la ecuación cuadrática

$$\begin{aligned} u^2 - 20u + 64 &= 0 \\ \Longleftrightarrow u &= 16 \vee u = 4 \\ \Longleftrightarrow 2^x &= 16 \vee 2^x = 4 \\ \Longleftrightarrow x &= 4 \vee x = 2 \end{aligned}$$

finalmente,

$$S = \{2, 4\}$$

**Ejercicio 148** Resuelva la inecuación

$$\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)) < 0$$

**Solución:** Restringiendo tenemos que:

$$R_1 \quad x^2 - 1 > 0 \text{ por lo tanto } x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[$$

$$R_2 \quad x + 1 > 0, \text{ por lo tanto } x \in ]-1, \infty[$$

$$R_3 \quad \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) > 0, \text{ luego debemod resolver la siguiente inecuación}$$

$$\begin{aligned} &\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) > 0 \\ \Longleftrightarrow &\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) > \log_{\frac{1}{2}}(x + 1) \\ \Longleftrightarrow &x^2 - 1 < x + 1 \\ \Longleftrightarrow &(x - 2)(x + 1) < 0 \\ \Longleftrightarrow &x \in ]-1, 2[. \end{aligned}$$

Finalmente, la restricción total es

$$\mathcal{R} = (]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[) \cap ]-1, \infty[ \cap ]-1, 2[ = ]1, 2[$$

Ahora la resolución. Si  $x \in \mathcal{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} &\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1) - \log_{\frac{1}{2}}(x + 1)) < 0 \\ \Longleftrightarrow &\log_9(\log_{\frac{1}{2}}(x - 1)) < 0 \\ \Longleftrightarrow &\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < 1 \\ \Longleftrightarrow &\log_{\frac{1}{2}}(x - 1) < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow &x - 1 > \frac{1}{2} \\ \Longleftrightarrow &x \in ]\frac{3}{2}, \infty[ \end{aligned}$$

Finalmente, la solución es

$$S = ]1, 2[ \cap ]\frac{3}{2}, \infty[ = ]\frac{3}{2}, 2[$$

Resuelva la inecuación

$$\frac{\log_2(x - \frac{1}{2})}{\log_2 x} < 2$$

**Solución:** Restringiendo, tenemos

$$x - \frac{1}{2} > 0 \wedge x > 0 \wedge x \neq 1$$

luego  $x \in ]\frac{1}{2}, \infty[ - \{1\}$ , así,

$$\mathcal{R} = ]\frac{1}{2}, \infty[ - \{1\}$$

Analicemos los siguientes casos:

**Caso 1:** Supongamos que  $x > 1$ , entonces  $\log_2 x > 0$  y

$$\begin{aligned} & \frac{\log_2(x - \frac{1}{2})}{\log_2 x} < 2 \\ \iff & \log_2(x - \frac{1}{2}) < 2 \log_2 x \\ \iff & \log_2(x - \frac{1}{2}) < \log_2 x^2 \\ \iff & x - \frac{1}{2} < x^2 \\ \iff & x^2 - x + \frac{1}{2} > 0 \end{aligned}$$

Como el discriminante de la ecuación de segundo grado

$$x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$

es  $\Delta = -1 < 0$ , entonces

$$x^2 - x + \frac{1}{2} > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Luego,

$$S_1 = ]1, \infty[ \cap \mathbb{R} \cap \mathcal{R}_1 = ]1, \infty[$$

**Caso 2:** Supongamos que  $0 < x < 1$  con  $x \in \mathcal{R}_1$ , es decir, supongamos que  $\frac{1}{2} < x < 1$ , entonces  $\log_2 x < 0$  y

$$\begin{aligned} & \frac{\log_2(x - \frac{1}{2})}{\log_2 x} < 2 \\ \iff & \log_2(x - \frac{1}{2}) > 2 \log_2 x \\ \iff & \log_2(x - \frac{1}{2}) > \log_2 x^2 \\ \iff & x - \frac{1}{2} > x^2 \\ \iff & x^2 - x + \frac{1}{2} < 0 \end{aligned}$$

Por los mismos argumentos del Caso 1 tenemos que en este caso

$$S_2 = \emptyset$$

Finalmente, la solución total de la ecuación es

$$S_T = S_1 \cup S_2 = ]1, \infty[$$

El siguiente teorema nos permite cambiar de base cuando sea necesario:

**Teorema 2.17 (Cambio de Base)** Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}^+$ , entonces

$$\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

**Demostración:** Sea  $u = \log_a x$ ,  $v = \log_b x$ , entonces  $a^u = x$  y  $b^v = x$ , así, tenemos:

$$\begin{aligned} & a^u = b^v \\ \iff & \log_a a^u = \log_a b^v \\ \iff & u = v \log_a b \\ \iff & \log_a x = \log_b x \log_a b \\ \iff & \log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b} \end{aligned}$$

lo que prueba finalmente el teorema. □

**Ejercicio 149 Resolver**

$$\log_x(5x^2)(\log_5 x)^2 = 1$$

**Solución:** Restringiendo tenemos que  $x > 0$  y  $x \neq 1$ , por lo tanto,

$$\mathcal{R}_1 = \mathbb{R}^+ - \{1\}$$

Resolviendo la ecuación tenemos

$$\begin{aligned} & \log_x(5x^2)(\log_5 x)^2 = 1 \\ \iff & (\log_x(5) + 2\log_x(x))(\log_5(x))^2 = 1 \end{aligned}$$

Como

$$\log_x 5 = \frac{1}{\log_5 x}$$

entonces, se tiene:

$$\left(\frac{1}{\log_5 x} + 2\right) \log_5^2 x = 1$$

Sea  $u = \log_5 x$ , entonces la ecuación anterior se transforma sucesivamente en

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{u} + 2\right) u^2 = 1 \\ \iff & (1 + 2u)u = 1 \\ \iff & 2u^2 + u - 1 = 0 \\ \iff & u = \frac{1}{2} \vee u = -1 \\ \iff & \log_5 x = \frac{1}{2} \vee \log_5 x = -1 \\ \iff & x = \sqrt{5} \vee x = \frac{1}{5} \end{aligned}$$

Luego,

$$S = \left\{\frac{1}{5}, \sqrt{5}\right\} \cap (\mathbb{R}^+ - \{1\}) = \left\{\frac{1}{5}, \sqrt{5}\right\}$$

### Ejercicio 150 *Resuelva*

$$\log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) \leq 2$$

**Solución:** El conjunto restricción de la inecuación es  $\mathcal{R} = \mathbb{R}^+ - \{1/3\}$ .  
Se tiene:

$$\begin{aligned} & \log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) \leq 2 \\ \iff & \frac{\log_3(9x)}{\log_3(3x)} + \log_3(x^3) \leq 2 \\ \iff & \frac{\log_3 9 + \log_3 x}{\log_3 3 + \log_3 x} + 3\log_3(x) \leq 2 \end{aligned}$$

Sea  $u = \log_3 x$ , entonces la inecuación equivale

$$\begin{aligned} & \frac{2+u}{1+u} + 3u \leq 2 \\ \iff & \frac{2u+3u^2}{1+u} \leq 0 \\ \iff & \frac{u(2+3u)}{1+u} \leq 0 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Resolviendo la inecuación ( 2.11), obtenemos que

$$\begin{aligned} & u \leq -1 \quad \vee \quad -\frac{2}{3} \leq u \leq 0 \\ \iff & \log_3 x \leq -1 \quad \vee \quad -\frac{2}{3} \leq \log_3 x \leq 0 \\ \iff & x \leq 3^{-1} \quad \vee \quad 3^{-\frac{2}{3}} \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

pero  $x > 0$  y  $x \neq \frac{1}{3}$  entonces

$$0 < x < 1/3 \vee \frac{1}{\sqrt[3]{3^2}} \leq x \leq 1$$

por lo tanto el conjunto solución es

$$S = ]0, \frac{1}{3}[ \cup [\frac{1}{\sqrt[3]{3^2}}, 1]$$

**Ejercicio 151** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas (justifique).

1. Sean  $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , entonces

$$\log_b a \leq \log_b a^2$$

2.  $\{x \in \mathbb{R} : \log_3 x^2 > 1\} = \{x \in \mathbb{R} : 2 \log_3 x > 1\}$

3.  $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,

$$\log_{\frac{1}{x}} y = \log_x \left( \frac{1}{y} \right)$$

4.  $\forall a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ ,

$$\log_a (b^{-1}) = (\log_a b)^{-1}$$

5. El conjunto solución de

$$5\sqrt{x-1} < \log_{\frac{1}{5}} x$$

es  $\emptyset$ .

**Solución:**

1. Falso. Consideremos  $a = \frac{1}{4}$ ,  $b = 2$

$$\log_2 \left( \frac{1}{4} \right) = -2, \quad \log_2 \left( \frac{1}{4} \right)^2 = -4$$

pero  $-2 \not\leq -4$ .

2. Falso. Dado que  $\log_3 (-3)^2 = 2 > 1$ , entonces

$$-3 \in \{x \in \mathbb{R} : \log_3 x^2 > 1\}$$

sin embargo,

$$-3 \notin \{x \in \mathbb{R} : 2 \log_3 x > 1\}.$$

3. Verdadero. Sean  $x, y \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$ , entonces

$$\begin{aligned} \log_{\frac{1}{x}} y &= \frac{\log_x y}{\log_x \left( \frac{1}{x} \right)} \\ &= \frac{\log_x y}{-1} \\ &= -\log_x y \\ &= \log_x y^{-1} \\ &= \log_x \left( \frac{1}{y} \right) \end{aligned}$$

4. Falso. Sean  $a = 2$  y  $b = 2$

$$\log_a b^{-1} = \log_2 2^{-1} = -1$$

pero

$$(\log_a b)^{-1} = (\log_2 2)^{-1} = 1$$

5. Verdadero. Las expresiones  $\sqrt{x-1}$  y  $\log_{1/5} x$  tienen significado en  $\mathbb{R}$  si  $x > 1$ , pero  $\log_{1/5} x < 0$  y  $5^{\sqrt{x-1}} > 0$  para  $x > 1$  de donde es claro que el conjunto solución de la inecuación es  $\phi$

En base a la función exponencial y logaritmo natural podemos definir otra función de gran interés

**Definición 2.18** Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que  $\text{Dom}f \cap \text{Dom}g \neq \phi$ .

Si  $f(x) > 0$  en algún subconjunto  $A$  de  $\text{Dom}f$  entonces se define la función  $h$  como

$$h(x) = f(x)^{g(x)} =: e^{g(x) \ln f(x)}$$

con dominio  $D = A \cap \text{Dom}g$ , es decir,

$$D = \text{Dom}f^g = \{x \in \text{Dom}f \cap \text{Dom}g : f(x) > 0\}$$

**Ejemplo 152** El dominio de la función  $h(x) = x^x$  es

$$\text{Dom}h = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Notemos que la expresión  $x^x$  también está definida en  $\mathbb{R}$  si  $x$  pertenece a los enteros negativos, por ejemplo si  $x = -2$  entonces  $-2^{-2} = \frac{1}{(-2)^2} = \frac{1}{4} \in \mathbb{R}$ , pero en este caso  $x^x$  no se puede interpretar como  $e^{x \ln x}$  pues la definición anterior exige que  $f(x)$  sea positivo.

**Ejercicio 153** Según la definición anterior, determine el dominio de las siguientes funciones

1.  $h(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$
2.  $h(x) = (x+1)^{\sqrt{x}}$

**Solución:**

1.  $\text{Dom}h = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0 \wedge 1 + \frac{1}{x} > 0\}$

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{x} > 0 &\iff \frac{x+1}{x} > 0 \\ &\iff (x+1 > 0 \wedge x > 0) \vee (x+1 < 0 \wedge x < 0) \\ &\iff (x > -1 \wedge x > 0) \vee (x < -1 \wedge x < 0) \\ &\iff (x > 0 \vee x < -1) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\text{Dom}h = \mathbb{R} - [-1, 0]$

- 2.

$$\begin{aligned} \text{Dom}h &= \{x \in \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ : x+1 > 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^+ : x > -1\} \\ &= \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

## 2.7 Ejercicios Propuestos

### 2.7.1 Ejercicios de Dominio y Recorrido

1. Determine  $\text{Dom}f$ ,  $\text{Rec}f$  para cada una de las siguientes funciones reales

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x} & b) f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1} \\ c) f(x) = \sqrt{(x+1)^2 - (2x+3)^2} & d) f(x) = \sqrt{\sqrt{x+1} + 2} \\ e) f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{2x+1}} & f) f(x) = \sqrt{|x+1| - 1} \\ g) f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}} & h) f(x) = \frac{x}{x-3} \end{array}$$

2. En cada caso, determine  $A \subset \mathbb{R}$  de modo que la relación sea una función

$$\begin{array}{lll} a) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & [1, 3[ \quad ; \quad f(x) = \sqrt{1-x} \\ b) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & ]\infty, -1] \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x-2} \\ c) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & [1, 9[ \quad ; \quad f(x) = 2\sqrt{x-7} \\ d) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & [1, 7[ \quad ; \quad f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-2} \\ e) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & [10, \infty[ \quad ; \quad f(x) = \sqrt{1-|x|} \\ f) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \quad ; \quad f(x) = \frac{(x-5)(x+3)}{(x^2+x+1)(x^2-4)} \\ g) & f: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow & [0, 3] \quad ; \quad f(x) = 3 - \sqrt[4]{1-x^2} \end{array}$$

3. Determine  $\text{Rec}f$ , para cada una de las siguientes funciones

$$\begin{array}{lll} a) & f: ]-\infty, -3] \longrightarrow & \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{1-x} \\ b) & f: ]1, \infty] \longrightarrow & \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x+2} \\ c) & f: ]9, \infty] \longrightarrow & \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = 2\sqrt{x-7} \\ d) & f: ]0, 1] \longrightarrow & \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x} \\ e) & f: ]-\infty, -3] \longrightarrow & \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \sqrt{|x|-3} \end{array}$$

### 2.7.2 Ejercicios de Gráfica

1. Graficar las siguientes funciones (considerando su dominio máximo) y determinar el recorrido.

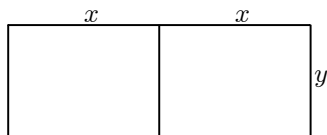
$$\begin{array}{lll} a) & f(x) = \sqrt{x-2} & b) & f(x) = |x-1| & c) & f(x) = \sqrt{x-1} + 5 \\ c) & f(x) = \sqrt{x-1} + 5 & d) & f(x) = |x-1| + |2x-3| & e) & f(x) = |x-1||x+3| - 1 \\ e) & f(x) = |x-1||x+3| - 1 & f) & f(x) = \left[\frac{2x}{3}\right] & g) & f(x) = \left[\frac{2x}{3} + 1\right] \\ g) & f(x) = \left[\frac{2x}{3} + 1\right] & h) & f(x) = \left[\frac{2x}{3}\right] + 1 & i) & f(x) = x + [x] \\ i) & f(x) = x + [x] & j) & f(x) = 2|x| + [x] \end{array}$$

2. Graficar las siguientes funciones

$$\begin{array}{ll} (a) & f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x+1 & x < 0 \end{cases} \\ (b) & f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ \sqrt{x} & x > 0 \end{cases} \\ (c) & f(x) = \begin{cases} [x] & x \geq 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases} \\ (d) & f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-|x|} & |x| \leq 1 \\ 2 & |x| > 1 \end{cases} \\ (e) & f(x) = \begin{cases} 3x-1 & -3 < x < 1 \\ e^x & 1 < x < 8 \\ \sqrt{x+1} & 8 < x < 15 \end{cases} \\ (f) & f(x) = \begin{cases} \ln(1-x) & x < 1 \\ e^{x+1} & x \geq 1 \end{cases} \end{array}$$

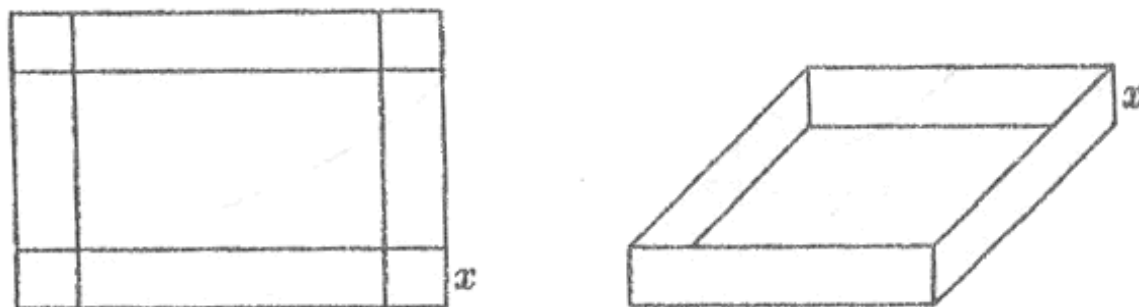
### 2.7.3 Ejercicios de Modelación Matemática

1. En una parcela, se desea encerrar dos porciones de terreno de igual área (como en la figura) con una malla de longitud  $L$ . Expresar el área de la parcela en función de  $x$ .



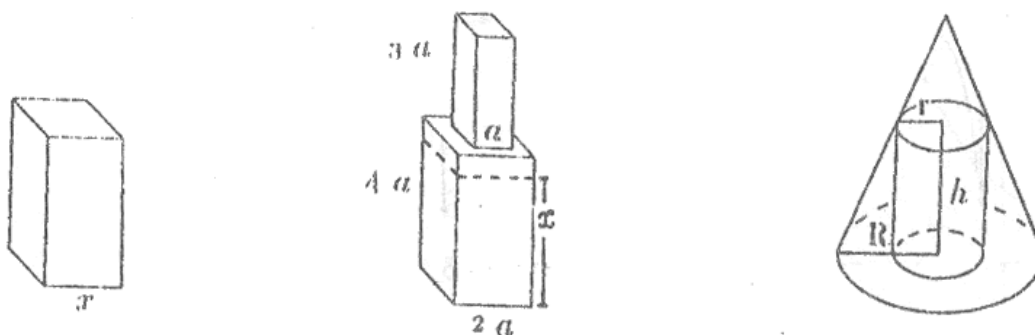
2. El área de una piscina rectangular con bordes es de  $18 m^2$ . Si el borde superior e inferior miden  $\frac{1}{3}m$  y los bordes laterales miden  $\frac{1}{4}m$ . Expresar el área comprendida entre los bordes en función de uno de los lados de la piscina.
3. Un hombre se encuentra en una lancha, a cuatro millas del punto  $P$  más cercano de la costa, que es recta y desea llegar a un punto  $Q$ , que está a 10 millas del punto  $P$  a lo largo de la costa. La lancha puede desplazarse a 18 millas/hrs y en cualquier punto  $R$  de la costa podrá abordar un automóvil que puede viajar a 30 millas/hrs en dirección de  $Q$ . Sea  $t$  el tiempo requerido para recorrer la distancia hasta  $Q$ . Expresar  $t$  en función de  $x$ , donde  $x$  es la distancia desde  $P$  a  $R$ .
4. En la ribera de un río de 3 km de ancho hay una planta eléctrica, en la otra ribera 4 km corriente arriba hay una fábrica. El costo de tender un cable por tierra (línea aérea) es de \$ 30 por metro y de \$ 50 por metro, si se tiende bajo el agua (cable submarino). Determine la función costo del tendido de cable de la planta eléctrica a la fábrica (en función de  $x$  Ver figura).
5. Un mayorista en abarrotes vende latas de tamaño número 2 de un cierto vegetal en lotes de cajas de acuerdo con la siguiente lista de precios.
  - \$ 2.50 por cajas en la compra de 20 cajas o menos
  - \$ 2.00 por cajas en la compra de más de 20 cajas pero menos de 50 (o igual)
  - \$ 1.75 por cajas para órdenes que incluyen más de 50 cajas pero menos de 100 cajas (o igual).
  - \$ 1.50 por cajas para órdenes de más de 100 cajas.
 Si  $y$  es el precio total y  $x$  es la cantidad de cajas. Expresar  $y$  en función de  $x$ .
6. Una papelería vende tarjetas navideñas a 10 centavos cada una o bien \$ 1.00 por caja que contiene 12 tarjetas. Si  $y$  denota el precio y  $x$  el número de tarjetas navideñas. Expresar  $y$  en función de  $x$ .
7. La librería de un colegio puede obtener del editor un libro a un costo de \$ 2.000 la unidad y ha estado ofreciéndolo a \$ 8.000. A este precio usualmente ha vendido 200 ejemplares por mes. La librería planea rebajar el precio para estimular las ventas y estima que por cada \$ 500 de reducción en el precio se venderán 20 libros más. Determine la función beneficio, en términos de  $x$  donde  $x$  indica el número de veces que se reduce el precio en \$ 500.
8. Un individuo puede disponer de hasta 24 horas de ocio por día y un ingreso no proveniente del trabajo de \$ 1.200 diarios. Por cada hora dedicada al trabajo recibe \$ 100. Si su grado de satisfacción se podría medir por la función  $U = I \cdot R$  (donde  $I$ = ingreso;  $R$ = horas de ocio). Determine  $U$  en función de  $x$  (donde  $x$  horas de trabajo).
9. Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y de 21 cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los lados hacia arriba.





Expresar  $V$  (volumen de la caja) como una función de la variable  $x$ , donde  $x$  es la longitud del lado del cuadrado. Ver figura.

10. Se desea contruir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con  $M \text{ cm}^2$  de material. Determinar la función volumen en términos de  $x$ , donde  $x$  indica la longitud de un lado de la base (ver figura ★ a ).
11. Considere la figura ★-b. Sea  $A(x)$  el área de la superficie exterior (incluyendo las bases) del solido hasta la altura  $x$ . Exprese  $A(x)$  como función de  $x$ , donde  $x$  es la altura medida desde la base.
12. Un cilindro circular recto de radio  $r$  y altura  $h$  está inscrito en un cono de altura 12 y radio de la base 4.(ver figura ★-c)  
Exprese el volumen  $V$  del cilindro como una función de  $r$ .



Figuras ★ a,b,c

13. Un campo petrolero tiene ocho pozos que producen un total de 1600 barriles de crudo al día. Por cada pozo nuevo que se tiene, la producción media por pozo disminuye en 10 barriles diarios. Determine la función que permite obtener la producción  $P$  de crudo al día en términos de  $x$ , donde  $x$  es el número de pozos adicionales especificando claramente su dominio.
14. Una asociación desea rentar un tren para llevar a sus miembros a una ciudad. La compañía ferroviaria accede a rentar un tren si el mínimo de viajeros no es menor que 250 personas. La tarifa por persona será de \$ 8. si viajan 250 y se reduce en un centavo (\$ 1 = 100 centavos) por cada viajero adicional (así, si viajan 300 persona la tarifa se reduce a \$ 7.50).  
Si  $x$  es el número de personas adicionales y el tren tiene capacidad para 700 personas. Determine el ingreso  $I$  para la compañía889 ferroviaria en función de  $x$  e indique el dominio del problema.

15. Un entusiasta de la salud desea tener un mínimo de 36 unidades de vitamina A al día, 28 unidades de vitamina C y 32 de vitamina D. La marca 1 cuesta 3 dólares y proporciona 2 unidades de vitamina A, 2 de vitamina C y 8 de vitamina D. La marca 2 cuesta 4 dólares y da 3 unidades de vitamina A, 2 de C y 2 de D. ¿Cuál es la combinación de costo más bajo que garantiza las necesidades diarias? Formule el modelo matemático.
16. Un fabricante de juguetes produce dos juegos: A y B el margen de beneficios sobre A es de \$ 300 y el de B de \$ 200. A requiere 6 horas de elaboración, 4 horas de montaje y 5 horas de embalaje. Por su parte B necesita 3 horas de elaboración, 6 horas de montaje y 5 horas de embalaje. Si se dispone de 54 horas para la elaboración, 48 horas para ensamblaje y 50 horas para el embalaje. Formule el modelo matemático que permita obtener la producción máxima de beneficios.
17. La Cía. REDY MIKKS es dueña de una pequeña fabrica de pinturas, produce pinturas de interior y exterior para casa, que son distribuidas al por mayor. Dos materias primas básicas, A y B, son usadas para la composición de estas pinturas. La disponibilidad máxima de A es de 6 toneladas al día; y la de B es de 8 toneladas. Los requerimientos diarios de pintura de interior y exterior están resumidas en la siguiente tabla

| MATRIZ TECNOLÓGICA |                                            |          |                          |
|--------------------|--------------------------------------------|----------|--------------------------|
|                    | Tons. de Mat. Comp.<br>por Ton. de Pintura |          | Disponib<br>Máxima(Ton.) |
|                    | Exterior                                   | Interior |                          |
| Mat.Comp. A.       | 1                                          | 2        | 6                        |
| Mat.Comp. B.       | 2                                          | 1        | 8                        |

Un estudio de mercado ha establecido que la demanda diaria para pintura de interior no puede exceder en más de 1 tonelada a la pintura de exterior. El estudio también mostró que la demanda máxima para pintura de interior está limitada a 2 toneladas/día .

El precio de venta al por mayor es de U\$ 3000 para la pintura de exterior y de U\$ 2000 para la de interior, por tonelada.

¿Cuántas toneladas de ambas pinturas debe producir la empresa para maximizar ingresos?

18. Una empresa armadora de vehículos motorizados que entrega 50 automóviles y 45 camionetas al mes, decide fabricar utilizando sus instalaciones, una pieza de la carrocería (C) de los automóviles que ella arma y un tipo de mecanismo (M) que utilizan sus camionetas. Dichos artículos tienen un precio bastante elevado y se encuentran disponibles en el mercado en forma constante.

Ambas piezas son fabricadas mediante procesos que constan de dos etapas. Las primeras operaciones se efectúan en la sección I. El tiempo unitario de producción de carrocerías (C) es de 1 hora y el de mecanismos (M) de 2 horas. El tiempo total que esta sección puede destinar a su fabricación es de 100 horas al mes.

Las operaciones finales se realizan en la sección II y los tiempos unitarios de producción para C y M son de 2 y 1.5 horas respectivamente. El total de horas aprovechables para la fabricación de estos productos en la sección II es de 121 horas al mes.

Estudios realizados por la empresa han permitido concluir que la "contribución unitaria" (precio de mercado - costos variables de producción) de C sería de \$ 200, en tanto que la de M es de \$ 100.

Los datos de este problema se resumen en la siguiente tabla:

| sección          | I   | II  | Cant.<br>Máx. |
|------------------|-----|-----|---------------|
| artículo         |     |     |               |
| C                | 1   | 2   | 50            |
| M                | 2   | 1.5 | 45            |
| Tiempo destinado | 100 | 121 |               |

se quiere determinar el número de piezas C y M a fabricar de tal manera de maximizar la contribución.

a) Formule el modelo matemático correspondiente, y encuentre el óptimo.

b) Suponga que se desea incrementar en 9 el número de horas de la sección II. ¿Cambia la solución óptima?

### 2.7.4 Ejercicios de Compuesta de funciones

1. Determine cuál de las siguientes funciones son biyectivas

- a)  $f: [2, \infty[ \longrightarrow [2, \infty[$  ;  $f(x) = \sqrt{x+2}$   
 b)  $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\}$  ;  $f(x) = \frac{x-3}{x-1}$   
 c)  $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{4\}$  ;  $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$   
 d)  $f: ]11, \infty[ \longrightarrow ]0, 1/7]$  ;  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}+4}$   
 e)  $f: ]-\infty, -1] \longrightarrow [-1, 0[$  ;  $f(x) = \frac{1}{x}$   
 f)  $f: ]4, 7] \longrightarrow ]\frac{1}{2}, \frac{2}{\sqrt{7}}]$  ;  $f(x) = \frac{\sqrt{|x|-3}}{\sqrt{x}}$

2. Determine  $A, B \subset \mathbb{R}$ , máximo de modo que  $f$  sea función biyectiva y explicitar  $f^{-1}(x)$  para

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f: A \longrightarrow B & \text{b) } f: A \longrightarrow B \\ x \longrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x^2-x}} & x \longrightarrow \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \end{array}$$

3. Hallar en cada caso  $\text{Dom}(g \circ f)$ ,  $\text{Dom}(f \circ g)$  y exprese claramente las compuestas

- a)  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = 2x + 3$   
 $g: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [-1, \infty[$  ;  $g(x) = \sqrt{x} - 1$   
 b)  $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = 2\sqrt{x} - 7$   
 $g: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow [-1, \infty[$  ;  $g(x) = \sqrt{x} - 1$   
 c)  $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = x^2 + 6x$   
 $g: [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  ;  $g(x) = \sqrt{x-1}$   
 d)  $f: [9, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  ;  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-2}$   
 $g: [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $g(x) = \frac{1}{x+1}$   
 e)  $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = \sqrt{1-|x|}$   
 $g: [1, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  ;  $g(x) = \frac{1}{2x-1}$

4. Sea  $g$  una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida por:

$$\begin{array}{ll} g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow g(x) = \begin{cases} 3x+7 & x \leq 1 \\ \sqrt{x}-1 & x > 1 \end{cases} \end{array}$$

Determinar  $\text{Dom}(g \circ f)$ ,  $\text{Dom}(f \circ g)$  y exprese claramente las compuestas, para cada una de las siguientes funciones

- a)  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = 2x + 3$   
 b)  $f: \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = 2\sqrt{x} - 7$   
 c)  $f: \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = x^2 + 6x$   
 d)  $f: [9, \infty[ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$  ;  $f(x) = \sqrt{\sqrt{x}-2}$   
 e)  $f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$  ;  $f(x) = \sqrt{1-|x|}$

5. Sean  $f, g$  dos funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 3x+7 & x \leq 1 \\ \sqrt{x}-1 & x > 1 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 6x-3 & x \leq -1 \\ \sqrt{x+1} & x > -1 \end{cases}$$

Hallar  $\text{Dom}(g \circ f)$  y exprese claramente la compuesta

6. Sean  $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$   $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  funciones.  
 $x \longrightarrow x^2 + 3x$   $x \longrightarrow 3x + 1$

- (a) Demuestre que  $g$  es biyectiva.  
 (b) Encuentre una función  $h$  indicando su dominio tal que

$$g \circ h = f$$

- (c) ¿Es  $f$  biyectiva? Si no lo es restringir  $f$  de modo que sea biyectiva y encontrar  $f^{-1}$ .

7. Considere la función

$$h: A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_o^+ \\ x \longrightarrow h(x) = \sqrt{2^x - 4}$$

- (a) Determine  $A$  (dominio máximo de  $h$ )  
 (b) ¿Es  $h$  biyectiva? En caso de no serlo, hacer las restricciones necesarias para que lo sea y encuentre  $h^{-1}$ .

8. Considere la función

$$f: \text{Dom} f \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{|x| - x}}$$

- (a) Determine  $\text{Dom} f$   
 (b) Determine  $\text{Rec} f$   
 (c) ¿Es  $f$  creciente?

9. Sean  $f(x) = \log_{5/4}(5x - 4x^2)$   $g(x) = 1 - e^{-x}$

- (a) Determine dominio y recorrido de  $f$  y  $g$   
 (b) Encuentre  $f \circ g$  indicando dominio.  
 (c) ¿Es  $f$  inyectiva? Si no redefinir para que lo sea y encontrar  $f^{-1}$

### 2.7.5 Ejercicios de Logaritmos

1. Exprese como un solo logaritmo

- (a)  $\frac{1}{3} \log \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \log \frac{1}{2} - \log \frac{1}{5}$   
 (b)  $1 + \log_3 a + \frac{1}{2} \log_3 a^3 - 4 \log_3 a^6$   
 (c)  $2 \log y - \frac{1}{4} \log (c - x) + \frac{1}{2} \log (x - 2y + c)$

2. Encontrar  $x \in \mathbb{R}$  tal que

- (a)  $\log_{3x} 4 = 2$   
 (b)  $\log_2 (x - 4) = -2$   
 (c)  $\sqrt[3]{2} = 8$   
 (d)  $3^{x^2} = 1/3$   
 (e)  $\log_{x+5} 3 = 2$   
 (f)  $\log_{x^2} 2x = 4$   
 (g)  $\log_5 (2x + 1) + \log_5 (3x - 1) = 2$

3. Resolver las siguientes ecuaciones

- (a)  $\log x^5 + \log^2 x + 6 = 0$
- (b)  $(\log_2 x)(\log_2 x + 1) = 2$
- (c)  $\log(7x - 9)^2 + \log(3x - 4)^2 = 2$
- (d)  $\frac{1}{4 - \log x} + \frac{1}{3 + \log x} = 1$
- (e)  $3 \log_5 x - \log_5 32 = 2 \log_{25}(x/2)$
- (f)  $\log \sqrt{7 - x} = \log \sqrt{\log(100) + 10} - \log \sqrt{x + 1}$
- (g)  $25^x - 6 \cdot 5^x + 5 = 0$
- (h)  $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 = 0$
- (i)  $21^x = 2^{2x+1} \cdot 5^x$
- (j)  $5^{2x+2} + 1 = (10 + 5^x)5^x$
- (k)  $\frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}} = \frac{1}{4}$
- (l)  $\log(x + 1) + \log(2x + 1) = \log(x + 2) + \log(5x - 7)$
- (m)  $\log_5(5^x - 7) - \log_{25} 324 = 2 - x$
- (n)  $\log_4 x^2 - \log_2(x - 1) + \log_2 x = 2$
- (o)  $3^{2x} \cdot 5^{6x-7} = 9^{x-2} \cdot 7^{1-x}$
- (p)  $\log_{8x^2} 2x - \log_{4/x^2} x = 1$

4. Resolver las siguientes inecuaciones

- (a)  $\log_3(x^2 - 3x - 4) < 1$
- (b)  $\log_{1/2}(x^2 - 1) \leq 2$
- (c)  $\log_a(x - 3) + \log_a(x - 2) \leq \log_a(2x) \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- (d)  $\log_4 x + \log_4(x + 1) < \log_4(2x + 6)$
- (e)  $\log_{3x}(3/x) + \log_3^2 x \geq 1$
- (f)  $(1/2)^{\log_2 2x} \leq 2^{\log_4 x^2}$
- (g)  $|\log(2x + 6)| \geq \log(x + 1)$
- (h)  $\log_2(\log_{1/2}(x + 1)) > 1$
- (i)  $7^{2x} - 7^{x+1} - 8 \leq 0$
- (j)  $x^{\log_2(x)+1} > 4x$
- (k)  $\log_2(\log_{1/2}(x)) < 1$
- (l)  $\log_2 x + \log_8(x + 5)^3 > \log_2(x - 3)$
- (m)  $\log_{x/3}(x(4 - x)) \leq 1$
- (n)  $(\log_x 2)(\log_{1/3}(x - 1)) < 0$

5. Resolver los siguientes sistemas

- (a) 
$$\left| \begin{array}{l} \log_x(ay) = p \\ \log_y(bx) = q \end{array} \right|$$
- (b) 
$$\left| \begin{array}{l} \log x + \log y = 3 \\ 5x^2 - 3y^2 = 11300 \end{array} \right|$$
- (c) 
$$\left| \begin{array}{l} 3^{1-x-y} = 4^{-y} \\ 2^{2x-1} = 3^{3y-x} \end{array} \right|$$
- (d) 
$$\left| \begin{array}{l} x^{\frac{1}{x+y}} = 2 \\ 3^{x+y} \cdot x = 9 \end{array} \right|$$

$$\begin{array}{l}
\text{(e)} \quad \left| \begin{array}{l} \log_5 x + 3^{\log_3 y} = 7 \\ x^y \cdot x^y = 5^{12} \end{array} \right| \\
\text{(f)} \quad \left| \begin{array}{l} \log_2 (x+y) - \log_4 (x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{array} \right| \\
\text{(g)} \quad \left| \begin{array}{l} [\log_{12} x][\log_x^{-1} 2 + \log_2 y] = \log_2 x \\ \log_2 x \cdot \log_3 (x+y) = 3 \log_3 x \end{array} \right| \\
\text{(h)} \quad \left| \begin{array}{l} \log^2 x + \log^2 y = \frac{5}{2} \log^2 a \\ xy = a^2 \end{array} \right| \\
\text{(i)} \quad \left| \begin{array}{l} x^y - y^x = 0 \\ x^2 - y^3 = 0 \end{array} \right| \\
\text{(j)} \quad \left| \begin{array}{l} \log_2 (x+y) - \log_3 (x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{array} \right|
\end{array}$$

6. Resolver los siguientes problemas

- (a) En cierta región, el aumento neto de la población es del 5% anual. ¿Al cabo de cuántos años la población?
- i) se duplicará  
ii) se triplicará
- (b) ¿Que ganancia producirán \$ 10.000.- en 5 años al 8 % anual?
- (c) Un niño tiene 6 años de edad; su padre quiere colocar una cantidad C en un banco a nombre del niño, para que cuando cumpla 26 años disponga de un capital de \$ 2.000.000.- El interés que paga el banco es del 8 % anual ¿Qué cantidad debe depositar el padre?

7. Graficar las siguientes funciones (considerando su dominio máximo) y determinar el recorrido.

- a)  $f(x) = 1 - 2e^x$       b)  $f(x) = 2e^{x-1}$       c)  $f(x) = 2^{-x} + 1$   
c)  $f(x) = 2^{-x} + 1$       d)  $f(x) = 1 - 2^x$   
e)  $f(x) = \log_{1/4} (2 + |x|)$       f)  $f(x) = \log_{1/2} ||x-1| - 1|$       g)  $f(x) = \log_3 ||x-3| - 2|$   
g)  $f(x) = \log_3 ||x-3| - 2|$       h)  $f(x) = \log_{1/3} (1 - |x-1|)$       i)  $f(x) = 3 - \log_2 (2x-1)$   
i)  $f(x) = 3 - \log_2 (2x-1)$       j)  $f(x) = 1 + 2 \cdot 3^{|2x-1|}$

Part II

**Cálculo Diferencial**





# Chapter 3

## Sucesión

### 3.1 Conceptos Básicos y Ejemplos

Entre las funciones hay unas de particular importancia, llamadas sucesiones. Ellas aparecen naturalmente, por ejemplo en los algoritmos provenientes del análisis numérico, indicando ellas (en este caso) un proceso de iteración; también aparecen en el estudio de la estabilidad de ciertos puntos en la teoría de sistemas dinámicos.

Consideremos la función  $f(x) = x^2$  y veamos que ocurre si aplicamos reiteradas veces  $f$  a un punto  $x_0$ ,  $x_0 \in ]0, 1[$ , es decir, queremos ver que ocurre con  $x_0$ ,  $x_0^2$ ,  $(x_0^2)^2$ ,  $((x_0^2)^2)^2$ , ..., etc. Esto se puede ver gráficamente en la figura ★✕, gráfico izquierdo.

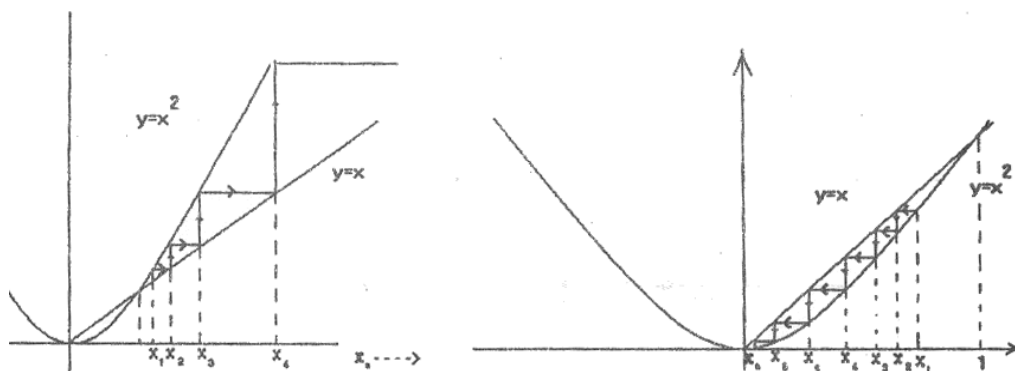


Figura ★✕

, donde están dibujadas la recta  $x = y$  y la parábola  $f(x) = x^2$ .

El objeto de dibujar la recta  $x = y$  es que la recta que une los puntos  $(0, f(x_0))$  y  $(x_0, f(x_0))$  corta a tal recta, la coordenada  $x$  de este corte nos indica geométricamente la posición de  $f(x_0)$  en el eje  $x$  (Domf), ubicación que necesitamos posteriormente para calcular  $f(f(x_0))$ . Este proceso se puede repetir varias veces y así se puede conocer al valor a que “tiende”  $f(f(\dots(f(x_0))\dots))$ . El proceso consiste en viajar desde la parábola a la recta  $y = x$ , paralelamente al eje  $x$ , (cuando llega a la recta  $y = x$ ) se viaja desde ese punto de corte a la parábola, pero ahora paralelamente al eje  $y$ .

En gráfico izquierdo de la figura ★✕ anterior vemos que si aplicamos  $f(x)$  reiterativamente a  $x_0 \in ]0, 1[$ , tenemos que el valor resultante de este proceso es 0, a diferencia del gráfico derecho de la figura anterior que nos muestra que el mismo proceso realizado a un punto  $x_0 > 1$ , tiende a un valor infinitamente grande.

Vea Ud. que ocurre en otros casos tales como  $x_0 \in ]-1, 0[$ ,  $x_0 < -1$ ,  $x_0 = 1$ , etc.

El proceso anterior se puede describir mediante una función de  $\mathbb{N}$  en  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} x &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longrightarrow x(n) = x_n \end{aligned}$$

donde  $n$  indica las veces que se ha aplicado la función  $f(x)$  y  $x_n$  indica la resultante, es decir,

$$\begin{aligned}x_1 &= f(x_0) \\x_2 &= f(f(x_0)) = f^2(x_0) \\x_3 &= f(f(f(x_0))) = f^3(x_0) \\x_4 &= f(f(f(f(x_0)))) = f^4(x_0), \dots, \text{ etc.}\end{aligned}$$

Volviendo a la notación de funciones, esta sucesión es:

$$\begin{aligned}x : \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\n &\longrightarrow \frac{1}{2^n}\end{aligned}$$

así los elementos de la sucesión son

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}, \dots$$

El décimo término es  $\frac{1}{20}$ , el cuarto término es  $\frac{1}{8}$ , el  $n$ -ésimo término es  $\frac{1}{2n}$ .

Si  $n$  es “super grande” ¿Cerca de qué valor se encuentra  $x_n$  ?

**Ejemplo 154**  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ . En extenso la sucesión es

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$$

El quinto término es  $\frac{5}{6}$ . Si  $n$  es “super grande” ¿Cerca de qué valor se encuentra  $x_n$  ?

**Ejemplo 155** En la sucesión

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \dots$$

el quinto término es  $\sqrt{5}$

¿Cerca de qué valor se acerca  $x_n$  cuando  $n$  es grandote?

**Ejemplo 156** Muchas veces las sucesiones son definidas en forma recursiva, por ejemplo

Sea  $x_0 \in ]0, 1[$  se define

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 \\x_n &= x_{n-1}^2 \text{ si } n > 1\end{aligned}$$

Si queremos esta sucesión como un listado, debemos calcular  $x_2, x_3, x_4, \dots$  etc.

Por ejemplo el cuarto término es

$$x_4 = (x_3)^2 = ((x_2)^2)^2 = (((x_1)^2)^2)^2 = (((x_0)^2)^2)^2 = x_0^8$$

Así la sucesión es

$$x_0, x_0^2, x_0^4, x_0^8, x_0^{16}, x_0^{32}, \dots$$

Si  $x_0 = \frac{1}{2}$  la sucesión es

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \dots$$

¿A qué valor “tiende”  $x_n$  si  $x_0 = \frac{1}{2}$ ?

La respuesta también fue dada en la figura ★❖ derecha.

**Ejemplo 157** Sea  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  definida recursivamente por

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_n &= \text{sen}(x_{n-1}) \text{ si } n > 1\end{aligned}$$

Mediante la técnica gráfica dada al inicio vea a que valor se acerca  $x_n$  cuando  $n$  es grande (es decir, grafique  $y = x$  e  $y = \text{sen}(x)$ ). Recuerde que  $1 < \frac{\pi}{2}$ .

¿Qué ocurre si  $x_1 = 1$  se cambia por  $x_1 = 10$ ?

## 3.2 Sucesiones

**Definición 3.1** Una sucesión de números reales<sup>1</sup> es una función cuyo dominio es el conjunto de los números naturales o subconjunto  $D$  de  $\mathbb{N}$  de la forma  $D = [a, \infty[ \cap \mathbb{N}$  y su recorrido es un subconjunto de los reales.

$$\text{Se escribe; } x: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{o} \quad x: D \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow x(n) = x_n \quad \quad \quad n \longrightarrow x(n) = x_n$$

Recordemos que una función es en particular una relación; así una sucesión  $x$  es un subconjunto de  $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ , es decir, la sucesión  $x$  es el conjunto

$$\{(1, x(1)), (2, x(2)), (3, x(3)), \dots (n, x(n)), \dots\}$$

pero a cambio de esto se anota simplemente

$$x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$$

donde  $x_n$  indica el valor de  $x(n)$  llamado  $n$ -ésimo término

**Notación:** Otras formas resumidas de anotar sucesiones son:

$$(x_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \{x_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad (x_n)_{n \geq 1}, \quad \{x_n\}_{n \geq 1},$$

o extremando la simplificación se anota simplemente  $(x_n)$ ,  $\{x_n\}$

**Ejemplo 158**  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{2n}\right)_{n=1}^{\infty}$ ,

**Observación:** No se debe confundir una sucesión con su recorrido. En el caso de la sucesión  $(x_n) = (-1)^n$ , es decir, la sucesión  $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \dots$  tiene como recorrido el conjunto  $\{-1, 1\} = \text{Rec}(x)$ . Una sucesión siempre tiene infinitos términos, el quinto término de esta es -1, el decimo término es 1.

**Definición 3.2** Diremos que una sucesión  $(x_n)$  es **acotada** si su recorrido es un conjunto acotado, i.e.,

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, |x_n| < K.$$

Análogamente se define sucesión acotada superiormente y acotada inferiormente.

**Definición 3.3** Diremos que una sucesión  $(x_n)$  es **creciente** si ella como función es creciente, es decir,

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4 \leq \dots$$

Análogamente se define **estrictamente creciente**, **decreciente**, **estrictamente decreciente**.  
De una manera más formal

1.  $(x_n)$  es una **sucesión creciente** si y sólo si

$$(\forall n \in D)(x_n \leq x_{n+1})$$

2.  $(x_n)$  es una **sucesión estrictamente creciente** si y sólo si

$$(\forall n \in D)(x_n < x_{n+1})$$

3.  $(x_n)$  es una **sucesión decreciente** si y sólo si

$$(\forall n \in D)(x_n \geq x_{n+1})$$

---

<sup>1</sup> En el caso de una sucesión de números *complejos* se cambia  $\mathbb{R}$  por  $\mathbb{C}$

4.  $(x_n)$  es una **sucesión estrictamente decreciente** si y sólo si

$$(\forall n \in D)(x_n > x_{n+1})$$

Diremos que una sucesión  $(x_n)$  es **monótona** si y sólo si es creciente o bien decreciente

**Definición 3.4** Sea  $(k_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión estrictamente creciente de números naturales y sea  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión arbitraria de números reales, la compuesta  $x \circ k$ , es decir,  $(x_{k_n})_{n=1}^{\infty}$  es llamada **subsucesión** de  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$

**Ejemplo 159** La sucesión  $(\frac{1}{n})$  es acotada pues existe  $k = 1 \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $n \in \mathbb{N}$  se tiene;  $|\frac{1}{n}| \leq 1$ . Por otra parte  $(\frac{1}{n})$  es estrictamente decreciente(monótona). En efecto:

Es claro que para todo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n < n+1$  entonces por propiedad de los números reales se tiene

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$$

luego  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n > x_{n+1}$

**Ejemplo 160** La sucesión  $(n)_{n=1}^{\infty}$  no es acotada pues no existe  $k$  en  $\mathbb{R}$  tal que  $|n| \leq K$  (Recordar que el conjunto de los números naturales  $\mathbb{N}$  no es acotado).

Sin embargo es claro que  $(n)$  es estrictamente creciente, pues

$$\forall n \in \mathbb{N}, n < n+1$$

**Ejemplo 161**  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{n}{n+1})_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada (1 es una cota superior) y monótona, (estrictamente creciente).

**Ejemplo 162**  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{n^2}{n+3})_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión no acotada superiormente sólo inferiormente,  $x_n$  es estrictamente creciente.

**Ejemplo 163**  $(x_n) = (\frac{(-1)^n}{2^n})$  es una sucesión acotada, no es monótona y tiene a  $(\frac{1}{16n^2})_{n=1}^{\infty}$  como subsucesión ya que la sucesión de números naturales  $(8n^2)_{n=1}^{\infty}$  es estrictamente creciente. Considerando la sucesión  $(3n)_{n=1}^{\infty}$  se tiene que  $(\frac{(-1)^{3n}}{6n})_{n=1}^{\infty}$  también es una subsucesión de  $x_n$ .

**Ejercicio 164** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

1. Toda sucesión acotada es monótona.
2. Toda sucesión monótona es acotada.
3. La sucesión  $(\frac{(-1)^n}{n})$  es monótona.
4. La sucesión  $(n)$  es una subsucesión de  $(\sqrt{n})$ .

**Solución:**

1. Falso. La sucesión  $((-1)^n)$  es acotada pero no es creciente ni decreciente.
2. Falso. La sucesión  $(n)$  es creciente luego es monótona pero no es acotada.
3. Falso. Sea  $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$  entonces  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2}$ ,  $x_3 = -\frac{1}{3}$ .
4. Luego  $x_1 < x_2$  pero  $x_2 > x_3$ . Así  $x_n$  no es creciente ni decreciente por lo tanto no es monótona.
5. Verdadero. Sea  $x_n = \sqrt{n}$  y sea  $k_n = n^2$ . Claramente  $(k_n)$  es una sucesión de naturales creciente y

$$(x \circ k)(n) = x(k_n) = x(n^2) = \sqrt{n^2} = n$$

luego  $((x \circ k)_n) = (n)_n$  es una subsucesión de  $(x_n)$ .

**Observación:** Observar que una sucesión  $(y_n)$  es una subsucesión de una sucesión  $(x_n)$  si  $(y_n)$  están incluidos<sup>2</sup> en los términos de la sucesión  $(x_n)$  y además existe una sucesión  $(k_n)$  de naturales creciente tal que  $(x \circ k)(n) = y_n$ .

Algunas sucesiones de interés en cursos posteriores son las que estudiaremos en los siguientes ejemplos.

**Ejemplo 165** Si  $r \in ]0, 1[$  entonces la sucesión  $(x_n) = (r^n)$  es acotada y estrictamente decreciente.

**Demostración:** Sea  $r \in ]0, 1[$  y  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $r > 0$  entonces  $r^n > 0$ , luego  $(r^n)$  está acotada inferiormente por 0. Ocupando el hecho que la función exponencial  $\exp_r$  es estrictamente decreciente se tiene que:

$$n > 0 \Rightarrow r^n < r^0$$

es decir  $r^n < 1$ . En consecuencia  $(r^n)$  está acotada superiormente por 1.

Por el mismo argumento se tiene que:

$$n < n + 1 \Rightarrow r^{n+1} < r^n$$

Por lo tanto  $(r^n)$  es estrictamente decreciente.

**Ejemplo 166** Si  $r > 1$  entonces  $(r^n)$  es estrictamente creciente, pero no es acotada.

**Demostración:** Sea  $n \in \mathbb{N}$ ,  $r > 1$

$$\begin{aligned} n < n + 1 &\Rightarrow \exp_r(n) < \exp_r(n + 1) \\ &\Rightarrow r^n < r^{n+1} \end{aligned}$$

luego  $(r^n)$  es estrictamente creciente.

Ahora probaremos que  $(r^n)$  no es acotada si  $r > 1$  (Por método del absurdo).

Supongamos que  $(r^n)$  es acotada luego, existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que

$$r^n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

pero

$$\begin{aligned} r^n \leq k &\iff r^n \leq r^{\log_r(k)} \\ &\iff n \leq \log_r(k) \end{aligned}$$

Así

$$n \leq \log_r k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

de donde  $\log_r(k)$  es cota superior del conjunto de los números naturales, lo cual es una contradicción (pues  $\mathbb{N}$  no es acotado).

**Observación:** Otra forma de probar que  $(r^n)$  no es acotado (si  $r > 1$ ) es la siguiente:

Como  $a$  se puede escribir  $a = 1 + h$  con  $h > 0$ , tenemos por el desarrollo del binomio que:

$$a^n = (1 + h)^n = 1 + nh + \cdots + nh^{n-1} + h^n$$

y como todos los sumandos son positivos obtenemos la desigualdad de Bernoulli

$$a^n > 1 + nh, \quad \forall n$$

como la sucesión  $(1 + nh)_{n=1}^\infty$  no es acotada, tampoco lo es  $(x_n) = (a^n)$  pues  $(x_n)$  es estrictamente creciente

En base a la sucesión anterior definamos una nueva sucesión:

---

<sup>2</sup>pensado como recorrido de la sucesión

**Ejemplo 167** Dado  $r \in ]0, 1[$ , se define la sucesión <sup>3</sup>  $(x_n)$  recursivamente como sigue

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 \\ x_n &= x_{n-1} + r^n, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

así la sucesión es

$$1, 1+r, 1+r+r^2, 1+r+r^2+r^3, \dots$$

El  $n$ -ésimo término es  $x_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \sum_{i=0}^n r^i$  que corresponde a la suma de  $n+1$  términos de una progresión geométrica de razón  $r$ , así que

$$x_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

**Observación:** La igualdad anterior se puede probar por inducción. Claramente se ve que  $(x_n)$  es estrictamente creciente y es acotada superiormente por  $\frac{1}{1-r}$ .

Como caso particular de la sucesión anterior tomemos  $r = \frac{1}{2}$ ; el término  $n$ -ésimo nos queda

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) < 2$$

quién es acotada por 2, es decir,  $|x_n| < 2$  para todo  $n$ .

**Ejemplo 168** Una sucesión muy utilizada en cálculo es la sucesión que tiene como  $n$ -ésimo término a

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$(x_n)_{n=1}^\infty$  es claramente creciente. Ella es acotada como se puede ver en la desigualdad

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + 2 = 3$$

ya que esta última sucesión es acotada (como se vió anteriormente).

**Ejemplo 169** Sea  $(y_n)_{n=1}^\infty$  la sucesión que tiene como término general (es decir,  $n$ -ésimo término)  $y_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Por el desarrollo de Binomio de Newton se tiene que

$$\begin{aligned} y_n &= 1 + n\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(3)(2)(1)}{n!}\left(\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\left(1 - \frac{3}{n}\right)\dots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Observemos que todos los factores de los sumandos del término  $y_n$  son positivos, además se tiene, en cada sumando, que el factor que acompaña  $\frac{1}{k!}$  es menor que 1, así comparando sumando por sumando con la sucesión  $x_n$  del ejemplo anterior, obtenemos que

$$y_n < x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y como  $(x_n)_{n=1}^\infty$  es acotado, se tiene que  $(y_n)_{n=1}^\infty$  es también acotada.

?‘ Es  $(y_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión creciente ?

**Ejemplo 170** La sucesión  $(z_n)_{n=1}^\infty = \sqrt[n]{n}$  es decreciente a partir de un  $n_0$  apropiado y claramente es acotada inferiormente por cero, también se puede ver que es acotada superiormente comparandola con  $(y_n)_{n=1}^\infty$

<sup>3</sup>No cambia la definición si se toma  $\mathbb{N}$  ó  $\mathbb{N}_0$  en la definición de sucesión

### 3.3 Límite de una Sucesión

En esta sección clarificaremos el significado de “ $x_n$  se acerca a  $L$ ”,  $L \in \mathbb{R}$ . Veamos los siguientes ejemplos

- $a_n = \frac{1}{n}$  se acerca a 0
- $b_n = (\frac{1}{2})^n + 1$  se acerca a 1
- $c_n = (-1)^n$  se acerca a 1 y a -1
- $d_n = \sum_{i=0}^n \frac{1}{2^i}$  se acerca a 2
- $e_n = n^3$  se acerca a infinito

Para esto necesitamos el concepto de vecindad

**Definición 3.5** Sea  $p \in \mathbb{R}$ . Una **vecindad** o **vecindad abierta** del punto  $p$  es simplemente un conjunto, que contiene a  $p$ , del tipo

$$V_{p,\varepsilon} = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - p| < \varepsilon\} \quad , \quad \text{donde } \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Desarrollando la inecuación que define a  $V_{p,\varepsilon}$  tenemos que la vecindad  $V_{p,\varepsilon}$  es el intervalo abierto que tiene como centro<sup>4</sup> a  $p$ , es decir,

$$V_{p,\varepsilon} = ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$$

**Ejemplo 171** Si  $p = 2$ , son vecindades de 2, los intervalos  $]1, 3[$ ;  $]1.9, 2.1[$ ;  $]1.99999, 2.00001[$  y en general  $]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$  representa todas las vecindades de 2, basta tomar  $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ . En el primer ejemplo  $\varepsilon = 1$ , despues  $\varepsilon = 0.1$  y en el último  $\varepsilon = 0.00001$ .

Esta última vecindad corresponde al tipo de vecindades que usaremos. La idea es tomar  $\varepsilon$  pequeño (super pequeño)

**Definición 3.6** Sea  $L \in \mathbb{R}$  y  $(x_n)_{n=1}^\infty$  una sucesión de números reales, diremos que  $x_n$  **converge a  $L$**  cuando  $n$  tiende a infinito o que el **límite de  $x_n$  es  $L$** , cuando  $n$  tiende a infinito o simplemente  $x_n$  converge a  $L$  si se tiene que para cualquier vecindad de  $L$ ,  $V_{L,\varepsilon}$ , que se tome (es decir, aún que  $\varepsilon$  sea “super pequeño”) siempre quedará sólo una cantidad finita de términos de la sucesión fuera de la vecindad  $V_{L,\varepsilon}$  (y por lo tanto todos los otros infinitos términos quedan adentro).

**Notación:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \quad \text{ó} \quad \lim_{\infty} x_n = L \quad \text{ó} \quad x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} L$$

En otras palabras;  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  si para toda vecindad de  $L$ ,  $V_{L,\varepsilon}$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que a partir de  $N$  (es decir, para  $n > N$ ) los términos  $x_n$  pertenece a  $V_{L,\varepsilon}$

En el caso de sucesiones crecientes o decrecientes se anota

$$x_n \nearrow_{n \rightarrow \infty} L \quad x_n \searrow_{n \rightarrow \infty} L$$

Para poder trabajar con la definición anterior llevemos esas frases a un lenguaje más formal

Como la vecindad  $V_{L,\varepsilon}$  está determinada por  $\varepsilon$ , decir, cualquier vecindad equivale a decir  $\forall \varepsilon, \varepsilon > 0$ .

---

<sup>4</sup>Se puede definir vecindad de  $p$  como intervalo abierto que contiene a  $p$ , no siendo necesariamente el punto  $p$  el centro de él. Ambas definiciones son equivalentes. Pruébalo

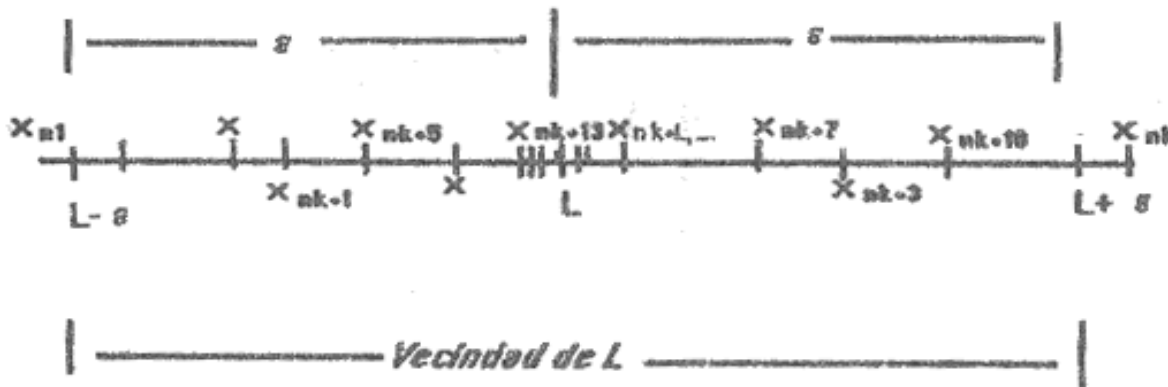


Figura ■▲

“Una cantidad finita de términos quedan afuera”; (ver figura ■▲); supongamos que  $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \dots, x_{n_k}$  con  $n_1 < n_2 < n_3 < n_4 < \dots < n_k$  son los términos ordenados que quedarán fuera de  $V_{L,\varepsilon}$ , entonces lo que ocurre es que los términos siguientes de  $x_{n_k}$ , es decir,  $x_{n_k+1}, x_{n_k+2}, x_{n_k+3}, \dots$  etc. todos están en el interior de la vecindad  $V_{L,\varepsilon}$ .

Así tenemos que hay un índice, (en este caso  $n_k$ ) tal que si tomamos un término  $x_n$  con índice  $n$  mayor que ese  $n_k$ , este término pertenece a  $V_{L,\varepsilon}$ .

Es natural pensar que si  $\varepsilon > \delta$  la cantidad de términos de la sucesión que quedan afuera de  $V_{L,\delta}$  es mayor, probablemente, a la cantidad de términos que quedan fuera de  $V_{L,\varepsilon}$ , por lo tanto el índice  $n_k$  mencionado anteriormente, a partir del cual todos los términos de la sucesión queda en  $V_{L,\delta}$  es mayor que el obtenido por  $V_{L,\varepsilon}$ . Esto nos ilustra la dependencia del  $n_k$  de la vecindad  $V_{L,\varepsilon}$  indicando esto por  $n_k(\varepsilon)$ .

Resumiendo todo lo anterior nos queda:

$$\forall \varepsilon, \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N(\varepsilon) \text{ se tiene } x_n \in V_{L,\varepsilon}$$

o equivalentemente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N \Rightarrow |x_n - L| < \varepsilon$$

**Definición 3.7** Una sucesión que tiene límite se dice **convergente** y en caso contrario, es decir, si no tiene límite, se dice **divergente**.

**Ejemplo 172** La sucesión constante ( $c$ ) es convergente a  $c$ , pues  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ .

La sucesión  $(2^n)$  es divergente, pues no existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n$ , ya que por el ejemplo anterior tenemos que es creciente y no acotada.

**Ejemplo 173** Recordemos la propiedad Arquimediana que satisfacen los números reales.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

Con esta propiedad se puede probar que la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\frac{1}{2n} + 1)_{n=1}^{\infty}$  es convergente ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Para probar esta última igualdad debemos tomar  $\varepsilon > 0$  arbitrario (ya que es  $\forall \varepsilon > 0$ ) y para ese número real debemos encontrar un  $N$  tal que si  $n > N$  se tenga que

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ lo que equivale a } -\varepsilon < \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

como  $\frac{1}{2n} > 0$ , debemos preocuparnos de probar que  $0 < \frac{1}{2n} < \varepsilon$  pero como  $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ , si logramos probar que  $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$  a partir de un  $N$  (es decir, si  $n > N$ ) obtenemos la desigualdad buscada.



**Por demostrar:**  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

Por propiedad Arquimediana tenemos

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } 0 < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

por lo tanto

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N$$

$$0 < \frac{1}{2n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

Así

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N, -\varepsilon < \frac{1}{2n} < \varepsilon$$

que es equivalente<sup>5</sup> a

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} (n > N \Rightarrow |x_n - 1| < \varepsilon)$$

Análogamente se prueba que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = 0$ , si  $h \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

#### Ejemplo 174

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \text{ con } 0 < r < 1$$

Ya que  $0 < r < 1$ ,  $\frac{1}{r} > 1$ ; por lo tanto existe  $h > 0$  tal que  $\frac{1}{r} = 1 + h$ , luego tenemos

$$\frac{1}{r^n} = (1 + h)^n = 1 + nh + \dots + h^n \geq nh$$

Así,

$$r^n = \frac{1}{1 + nh + \dots + h^n} \leq \frac{1}{nh}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = 0$  se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \text{ tal que } n > N \Rightarrow 0 < \frac{1}{nh} < \varepsilon$$

De esta forma

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N (\text{el mismo anterior}) \text{ tal que } n > N \Rightarrow |r^n - 0| < \frac{1}{nh} < \varepsilon$$

#### Ejemplo 175 Demuestre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5}{n + 1} = 2$$

**Demostración:** Tenemos que demostrar que

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow \left| \frac{2n - 5}{n + 1} - 2 \right| < \varepsilon)$$

Antes de comenzar con la demostración determinemos un real apropiado al cual aplicarle la propiedad arquimediana.

Notemos que

$$\left| \frac{2n - 5}{n + 1} - 2 \right| = \left| \frac{2n - 5 - 2n - 2}{n + 1} \right| = \left| \frac{-7}{n + 1} \right| = \frac{7}{n + 1} < \frac{7}{n} \quad (3.1)$$

Dado  $\varepsilon > 0$ , queremos probar que existe un natural  $N$  tal que para cualquier  $n \in \mathbb{N}$  con  $n > N$ , se tenga que

$$\left| \frac{2n - 5}{n + 1} - 1 \right| < \varepsilon \quad (3.2)$$

---

<sup>5</sup>Note que  $\varepsilon$  es arbitrario, pero se piensa siempre que es pequeño,  $\varepsilon = 1$  sería muy grande

Es claro por (3.1) que: si existe  $N$  tal que  $\frac{7}{n} < \varepsilon$  para  $n > N$ , tendremos la desigualdad (3.2). Por lo tanto busquemos tal  $N$ .

Observemos que  $\frac{7}{n} < \varepsilon$  equivale a  $\frac{7}{\varepsilon} < n$ . Entonces dado  $\varepsilon > 0$ , consideremos el real  $\frac{7}{\varepsilon}$  y usando la propiedad Arquimediana demostraremos (??).

**Demostración:** Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces por propiedad Arquimediana existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $N > \frac{7}{\varepsilon}$ .

Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > N$ , pero  $N > \frac{7}{\varepsilon}$ , luego  $n > \frac{7}{\varepsilon}$ , lo que equivale a  $\frac{7}{n} < \varepsilon$  pero

$$\frac{7}{n+1} < \frac{7}{n} \quad \text{y} \quad \left| \frac{2n-5}{n+1} - 2 \right| = \frac{7}{n+1}$$

por lo tanto  $\left| \frac{2n-5}{n+1} - 2 \right| < \frac{7}{n} < \varepsilon$ . Así, hemos probado (??).

**Ejemplo 176** Demuestre

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p/q}} = 0$$

dado  $p, q \in \mathbb{Z}^+$ .

Por demostrar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow \frac{1}{n^{p/q}} < \varepsilon)$$

**Demostración:** Sea  $\varepsilon > 0$ , entonces consideremos el real  $(\frac{1}{\varepsilon})^{q/p}$

Por propiedad Arquimediana existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que

$$N > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{q/p} \tag{3.3}$$

Sea  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $n > N$  entonces por (3.3)

$$n > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{q/p}$$

de donde

$$\varepsilon > \left(\frac{1}{n}\right)^{p/q} \text{ para } n > N$$

Así para  $\varepsilon > 0$  dado encontramos  $N$  tal que si  $n > N$  se tiene

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{p/q} < \varepsilon$$

Por consiguiente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p/q}} = 0$ .

**Ejemplo 177** La sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty} = ((-1)^n)_{n=1}^{\infty}$  diverge ya que si tomamos la vecindad  $V_{1, \frac{1}{4}}$ , es decir,  $L = 1$  y  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , deja infinitos términos de la sucesión fuera de ella (los términos con índice  $n$  impar); lo mismo ocurre con  $V_{-1, \frac{1}{4}}$  ver figura ■■■■



Figura ■■■■

Con este mismo ejemplo vemos la necesidad de demostrar que el límite de una sucesión es único por eso usamos "el" y no "los".

**Teorema 3.8 (Unicidad del Límite)** *El límite de una sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  es único, es decir,*

$$\lim x_n = a \wedge \lim x_n = b \Rightarrow a = b$$

**Demostración:** Procederemos por el absurdo, esto significa que supondremos que  $a \neq b$  y llegaremos a una contradicción.

Esencialmente haremos lo mismo que en el ejemplo anterior. Como  $a \neq b$  se tiene que el número  $\frac{|a-b|}{4} \neq 0$  y positivo. Ya que  $\lim x_n = a$ , para  $\varepsilon = \frac{|a-b|}{4}$  existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$ ,  $x_n \in V_{a, \varepsilon}$ ; por otra parte se tiene que  $\lim x_n = b$ , así para el mismo  $\varepsilon$  existe un  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $n > M$ ,  $x_n \in V_{b, \varepsilon}$ . Note que  $V_{a, \varepsilon} \cap V_{b, \varepsilon} = \emptyset$  (como en la figura  con  $a = -1$  y  $b = 1$ ), pero si tomamos  $n$  tal que  $n > N \wedge n > M$  se tiene que  $x_n \in V_{a, \varepsilon} \wedge x_n \in V_{b, \varepsilon}$ , es decir,  $x_n \in V_{a, \varepsilon} \cap V_{b, \varepsilon}$ , así  $V_{a, \varepsilon} \cap V_{b, \varepsilon} \neq \emptyset$ , lo cual nos lleva a una contradicción. □

Este teorema es muy útil para mostrar que una sucesión es divergente, por ejemplo

- $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (-1)^n (3 + \frac{1}{n})_{n=1}^{\infty}$  diverge
- $(x_n)_{n=1}^{\infty} = (\sin(\frac{\pi}{8}n))_{n=1}^{\infty}$  diverge

**Teorema 3.9** *Si la sucesión  $(x_n)$  converge a  $L$  entonces **toda** subsucesión de ella también converge a  $L$ .*

Notemos que es un teorema del tipo  $p \Rightarrow q$

**Demostración:** Sea  $(x_{k_n})$  una subsucesión de  $(x_n)$ .

Como  $k_n$  es una función creciente en  $\mathbb{N}$  se tiene

$$1 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq \dots \leq k_n \text{ con } n \leq k_n$$

Por lo tanto, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$  se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : n > N \Rightarrow x_n \in V_{L, \varepsilon}$$

luego

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : k_n > n > N \Rightarrow x_{k_n} \in V_{L, \varepsilon}$$

Así

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{k_n} = L$$

□

**Corolario 3.10** *Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  entonces para todo  $k \in \mathbb{N}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+k} = a$*

Lo que dice el corolario es que para estudiar la convergencia de una sucesión no importa lo que ocurra con los primeros términos (los  $k$  primeros términos)

**Ejemplo 178** *La sucesión*

$$x_n = \begin{cases} 2^n & n \leq 1000 \\ \frac{1}{n} & n > 1000 \end{cases}$$

*converge a cero (por Corolario 3.10).*

Aplicaremos el teorema anterior, en forma directa, para obtener el límite de sucesiones en los ejemplos que siguen

**Ejemplo 179**  $(\frac{1}{2n^2})_{n=1}^{\infty}$  *converge a cero ya que ella es una subsucesión de  $(\frac{1}{2n})_{n=1}^{\infty}$ .*

**Ejercicio 180** Calcular el

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2}$$

si se sabe que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = L$ .

**Solución:** Ya que  $\left(\frac{n^2+1}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$  y  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right\}$  forma una subsucesión de  $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$  (tomando  $n^2$  como la función creciente) entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2} = L$$

**Observación:** Una consecuencia del teorema es que si una sucesión tiene dos subsucesiones convergentes a límites distintos, entonces la sucesión inicial no tiene límite ya que se contradice la unicidad del límite

**Ejemplo 181** La sucesión

$$x_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ es impar} \\ \frac{n}{n+2} & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

no es convergente, pues la subsucesión  $x_{2n}$  formada por los términos de lugar par converge a 1, sin embargo la subsucesión  $x_{2n+1}$  formada por los términos de lugar impar converge a 0.

Análogamente se tiene

**Ejemplo 182** La sucesión  $((-1)^n)$  no converge pues existen las subsucesiones  $(x_{2n}) = (1)$  y  $(x_{2n+1}) = (-1)$  que convergen a 1 y  $-1$  respectivamente.

Observe que si  $(x_{k_n}) \rightarrow L$  no se tiene necesariamente que  $(x_n) \rightarrow L$ . Esto se puede visualizar con  $(x_n)_{n=1}^\infty = (\sin(\frac{n\pi}{2}))_{n=1}^\infty$ . La subsucesión  $(x_{2n})_{n=1}^\infty$  converge a 0 pero  $(x_n)_{n=1}^\infty$  diverge.

Así podemos notar que el teorema anterior es de la forma  $p \Rightarrow q$  y no  $p \Leftrightarrow q$ . Un teorema del mismo tipo es el siguiente.

**Teorema 3.11** Toda sucesión convergente es acotada

**Demostración:** Sea  $(x_n)_{n=1}^\infty$  convergente a  $L$ , para  $\varepsilon = 1$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$  se tiene que  $x_n \in V_{L,1}$  (es decir,  $L - 1 < x_n < L + 1$ ).

Sean

$$\alpha = \max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N, L + 1\}$$

y

$$\beta = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N, L - 1\}$$

así para todo  $n \geq 1$  se tiene  $x_n \in [\beta, \alpha]$  por lo tanto el conjunto  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  es acotado superiormente por  $\alpha$  e inferiormente por  $\beta$  por lo tanto  $(x_n)_{n=1}^\infty$  es acotada. □

El siguiente ejemplo muestra, que el teorema 3.11 es sólo de la forma  $p \Rightarrow q$ .

**Ejemplo 183** Sea  $(x_n)_{n=1}^\infty = (\cos(\frac{\pi n}{8}) + \frac{(-1)^n}{4})_{n=1}^\infty$  la sucesión  $(x_n)_{n=1}^\infty$  es acotada (acotada superiormente por  $\frac{5}{4}$  e inferiormente por  $-\frac{5}{4}$ ) pero no es convergente.

El siguiente teorema es importante y su demostración se apoya fuertemente en el axioma de completitud de los números reales.

El teorema más bien es de existencia del límite de una sucesión dada, a diferencia de los teoremas que permiten calcular un límite. Pero tiene importancia conocer este teorema ya que puede validar algún límite obtenido computacionalmente, ya que el límite obtenido es único y cualquier subsucesión tiene el mismo límite.

**Teorema 3.12** *Teorema convergencia monótona:*

*Toda sucesión monótona acotada es convergente*

**Demostración:** Recordemos que monótona puede significar creciente, decreciente, etc.

Sea  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión creciente y acotada (análogo para los otros casos, como decreciente, etc), así

$$x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \cdots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \cdots$$

Sea  $\alpha = \sup(A)$  donde  $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Por caracterización de supremo de  $A$  se tiene que para todo  $\varepsilon > 0$  existe un elemento de  $A$ ,  $x_N$  tal que

$$\alpha - \varepsilon < x_N \leq \alpha$$

pero si  $n > N$  se tiene  $x_N \leq x_n$  (creciente) y  $x_n \leq \alpha$  ( $\alpha = \sup A$ ). Así  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$ ,

$$\alpha - \varepsilon < x_N \leq x_n \leq \alpha < \alpha + \varepsilon,$$

es decir,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(n > N \Rightarrow x_n \in V_{\alpha, \varepsilon})$$

lo que significa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$  □

**Observación:** Si  $(x_n)$  es decreciente y acotada inferiormente entonces  $\lim x_n = \beta$  donde  $\beta = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Si  $(x_n)$  es creciente y acotada superiormente entonces  $\lim x_n = \alpha$  donde  $\alpha = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

**Ejemplo 184** La sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  con

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

es claramente creciente y acotada superiormente por 3 (analizada en detalle anteriormente), por lo tanto  $(x_n)$  converge a algún valor  $L$ .

Use la calculadora para ver cual sería el valor de  $L$ .

**Ejemplo 185** La sucesión  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  con

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

es creciente y acotada por 3 por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = S$  (existe).

Use la calculadora para obtener  $S$ . ¿Que relación existe entre  $S$  y  $L$  ( $L$  del ejemplo anterior).

## 3.4 Cálculo de límites

Los teoremas que veremos a continuación son principalmente utilizados para calcular límites

**Teorema 3.13 (Cero Aniquila)** Sea  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  e  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  una sucesión acotada entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

Por demostrar que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > N \Rightarrow |x_n y_n| < \varepsilon$$

**Demostración:** Como  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  es acotada, existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|y_n| < k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

Además como  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge a 0 se tiene que

$$\forall \bar{\varepsilon} > 0 \exists \bar{N} \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > \bar{N}(\bar{\varepsilon}), |x_n| < \bar{\varepsilon}$$

Luego, si  $|x_n| < \bar{\varepsilon}$  entonces  $|x_n y_n| < \bar{\varepsilon} k$ , por lo tanto; dado  $\varepsilon > 0$  basta tomar  $\bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{k}$  y para este valor tenemos que existe  $\bar{N}$  tal que  $n > \bar{N} \Rightarrow |x_n| < \frac{\varepsilon}{k}$ , así  $|x_n y_n| < k |x_n| < \varepsilon$ .

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \bar{N}\left(\frac{\varepsilon}{k}\right) \text{ tal que } n > N \Rightarrow |x_n y_n| < \varepsilon$$

□

**Ejemplo 186** Un ejemplo donde se puede utilizar este último teorema es en la sucesión

$$\{z_n\} = \left\{ \frac{1}{n} \left( \cos \left( \frac{nx}{n^2 + 20} \right) \right) \right\}$$

donde  $x$  es fijo.

Esta sucesión tiene como factores a las sucesiones  $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\}$  y  $\{y_n\} = \{\cos(\frac{nx}{n^2+20})\}$  que satisfacen las hipótesis del teorema, así que  $z_n \rightarrow 0$ .

**Ejemplo 187** Demostrar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen}(n)}{n} = 0$$

En efecto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$  y  $\{\text{sen}(n)\}$  es acotada, luego por teorema del cero aniquila tenemos la demostración.

Aparentemente este último teorema es sólo aplicable para cálculo de límites que sean cero, pero no es así por la siguiente proposición.

**Proposición 3.14**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \iff \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - L) = 0$$

**Ejemplo 188** Si  $a \in ]0, 1[$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \cdots + a^n) = \frac{1}{1-a}$

*Demostración:* Como  $1 + a + \cdots + a^n = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \cdots + a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$

Usando la proposición anterior, la demostración consiste en probar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right) = 0$$

Pero

$$\frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = -\frac{a^{n+1}}{1-a} = a^{n+1} \left( \frac{-1}{1-a} \right)$$

y como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{n+1} = 0 \text{ y } \left( \frac{-1}{1-a} \right) \text{ es una sucesión acotada,}$$

se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1-a^{n+1}}{1-a} - \frac{1}{1-a} \right) = 0$$

que es equivalente a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \frac{1}{1-a}$$

**Teorema 3.15 (Algebra de Límites)** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $\lim_n x_n = a$  y  $\lim_n y_n = b$ . Entonces

$$1) \lim_n (x_n + y_n) = \lim_n x_n + \lim_n y_n = a + b$$

$$2) \lim_n (x_n \cdot y_n) = \lim_n x_n \cdot \lim_n y_n = a \cdot b$$

$$3) \lim_n \left( \frac{x_n}{y_n} \right) = \frac{\lim_n x_n}{\lim_n y_n} = \frac{a}{b} \text{ si } b \neq 0 \wedge y_n \neq 0, \forall n$$

$$2') \lim_n (\beta x_n) = \beta \lim_n x_n = \beta a, \beta \in \mathbb{R}$$

(Basta tomar la sucesión constante  $(\beta)_{n=1}^{\infty}$  en 2 y se obtiene la igualdad)

$$1') \lim_n (x_n - y_n) = \lim_n x_n - \lim_n y_n = a - b$$

(Basta tomar  $\beta = -1$  en 2' y luego usar 1 para obtener la igualdad)

Si bien es cierto que el teorema se refiere a igualdades, debe tenerse en mente que el teorema también habla de la convergencia de las sucesiones  $(x_n + y_n)_{n=1}^{\infty}$ ,  $(x_n y_n)_{n=1}^{\infty}$ , etc, es decir, el teorema se refiere a la existencia de los límites puestos a la izquierda de las igualdades y además se refiere al valor que convergen.

**Demostración:** (1) Límite de la suma. Como  $x_n \rightarrow a$  es decir,

$$\forall \varepsilon_a > 0 \exists N_a \text{ tal que } n > N_a \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_a$$

Como  $y_n \rightarrow b$ ,  $\forall \varepsilon_b > 0 \exists N_b$  tal que  $n > N_b \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon_b$

$\forall \varepsilon > 0$  (tómalo  $\varepsilon_a = \varepsilon_b = \frac{\varepsilon}{2}$ )  $\exists N = \max\{N_a, N_b\}$  tal que

$$n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon_a \wedge |y_n - b| < \varepsilon_b.$$

Por otra parte  $|x_n + y_n - (a + b)| = |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b|$ . Así se tiene, por lo anterior, que si  $n > N$

$$|x_n + y_n - (a + b)| < \varepsilon_a + \varepsilon_b = \varepsilon$$

Por lo tanto,  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $n > N \Rightarrow |x_n + y_n - (a + b)| < \varepsilon$ .

(2) Límite del producto. Para mostrar 2 usaremos teorema y proposición anterior, así como la igualdad

$$\begin{aligned} x_n y_n - ab &= x_n y_n - x_n b + x_n b - ab \\ &= x_n (y_n - b) + (x_n - a)b \end{aligned}$$

Como  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  es convergente, ella es acotada. La sucesión constante  $(b)_{n=1}^{\infty}$  también es acotada.

Por proposición anterior  $\lim_n (y_n - b) = 0$  y  $\lim_n (x_n - a) = 0$ . Por teorema cero aniquila y límites de la suma

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n - ab) &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_n (y_n - b) + \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a)b \\ &= 0 + 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n y_n) = ab$$

(3) Límite del cociente. Consideremos la igualdad

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{bx_n - ay_n}{by_n} = (by_n - ax_n) \frac{1}{by_n}$$

y el hecho que  $(\frac{1}{y_n b})_{n=1}^{\infty}$  es una sucesión acotada.

Por (2')  $\lim_{n \rightarrow \infty} (bx_n - ay_n) = ba - ab = 0$  se tiene que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} \right) = 0$$

□

**Ejemplo 189** Calculemos el límite de la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  donde  $x_n = \frac{n^2+2}{5n^2+n}$ .

Como

$$x_n = \frac{n^2+2}{5n^2+n} = \frac{\frac{n^2}{n^2} + \frac{2}{n^2}}{\frac{5n^2}{n^2} + \frac{n}{n^2}} = \frac{1 + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{1}{n}}$$

y ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n^2}) = 1$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (5 + \frac{1}{n}) = 5$  se tiene que

$$\lim_n x_n = \frac{\lim(1 + \frac{2}{n^2})}{\lim(5 + \frac{1}{n})} = \frac{1}{5}$$

Observemos que para calcular este límite, no podemos usar directamente la parte (3) del teorema anterior pues no existen los límites  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5n^2 + n$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 2$ . (En este caso tenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 5n^2 + n = \infty$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 + 2 = \infty$  pero  $\infty \notin \mathbb{R}$ ).

En general, se puede demostrar usando el algebra de límites que:

$$1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \dots + b_0} = \frac{a_k}{b_k}$$

(en este caso multiplicando por  $\frac{1/n^k}{1/n^k}$ ).

$$2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} 0 & \text{si } l > k \\ \text{no existe} & \text{si } l < k \end{cases}$$

**Ejemplo 190** La sucesión  $\left\{ \frac{n^2+1}{n^3+2} \right\}$  converge a 0.

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} \cdot \frac{1/n^3}{1/n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n + 1/n^3}{1 + 2/n^3} \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (1/n + 1/n^3)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 2/n^3)} = \frac{0}{1} = 0 \end{aligned}$$

luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} = 0$ .

**Ejercicio 191** Demuestre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1}$  no existe

**Solución:** (Por el método del absurdo)

Supongamos que el  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1}$  existe y su valor es  $L \in \mathbb{R}$

Dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1}$  existe (por ejemplo anterior) entonces por algebra de límites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} \text{ existe}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n^3+2} = L \cdot 0 = 0$$

Así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} \quad (3.4)$$

Por otra parte, es claro que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1} \cdot \frac{n^2+1}{n^3+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \quad (3.5)$$

Así por (3.4) y (3.5) y por la unicidad del límite se tiene que  $0 = 1$  lo que es una contradicción. La contradicción se produjo al suponer que existía el límite, por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2}{n^2+1}$  no existe.

Calcular

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n + 5^n}{(-4)^{n+1} + 2(5)^n}$$

**Solución:**

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{-4}{5}\right)^n + 1}{(-4)\left(\frac{-4}{5}\right)^n + 2}$$



Pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{-4}{5})^n = 0$  pues  $|\frac{-4}{5}| < 1$   
 Luego por álgebra de límites

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\frac{-4}{5})^n + 1}{(\frac{-4}{5})^n + 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{-4}{5})^n + 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} ((\frac{-4}{5})^n + 2)} = \frac{1}{2}$$

**Proposición 3.16 (Mantención del signo del límite en una sucesión)** Si  $\lim_n x_n = L$ , con  $L \in \mathbb{R}^+$  se tiene que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$  entonces  $x_n \in \mathbb{R}^+$

**Demostración:** Como  $x_n \rightarrow L$  se tiene que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N}$$

tal que

$$n > N \Rightarrow x_n \in V_{L, \varepsilon}.$$

Así tomando un  $\varepsilon$  bien particular  $\varepsilon = \frac{L}{4} > 0$  se tiene que  $\exists N \in \mathbb{N}$  tal que  $x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$  por lo tanto si  $n > N$  se tiene

$$0 < \frac{3L}{4} = L - \frac{L}{4} = L - \varepsilon < x_n$$

□

**Corolario 3.17** Si  $x_n \rightarrow a$ ,  $y_n \rightarrow b$  y si se tiene la desigualdad  $x_n \leq y_n$  a partir de un índice  $N_0$ , entonces

$$\lim_n x_n \leq \lim_n y_n \text{ (o equivalentemente } a \leq b)$$

**Corolario 3.18 (Teorema del Acotamiento)** Sean  $x_n \leq z_n \leq y_n$  a partir de un índice  $N$  en adelante. Si  $\lim x_n = \lim y_n = L$  entonces  $\lim z_n = L$

**Demostración:** Como  $x_n \rightarrow L$ , se tiene que para  $\varepsilon_1 > 0$  existe  $N_1 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n - L| < \varepsilon_1$ , para todo  $n > N_1$ .

Como  $y_n \rightarrow L \iff \forall \varepsilon_2 > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N_2$  entonces  $|y_n - L| < \varepsilon_2$ ,  
 por lo tanto tomando  $N = \max\{N_1, N_2\}$  se tiene simultaneamente que si  $n > N$

$$L - \varepsilon_1 < x_n < L + \varepsilon_1 \wedge L - \varepsilon_2 < y_n < L + \varepsilon_2 \wedge x_n \leq z_n \leq y_n$$

así, usando la transitividad de la desigualdad se obtiene

$$L - \varepsilon_1 < x_n \leq z_n \leq y_n < L + \varepsilon_2 \text{ si } n > N$$

Tomando  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$  (inicialmente) se tiene que  $\exists N$  tal que si  $n > N$  entonces  $|z_n - L| < \varepsilon$ . conclusión que nos dice que

$$z_n \rightarrow L$$

□

**Ejemplo 192** Probar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{senn}(n)}{n} = 0$  usando el teorema de acotamiento

**Solución:** Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene;

$$-1 \leq \text{senn} n \leq 1$$

de donde

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{\text{senn} n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ , entonces por teorema del acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{senn} n}{n} = 0$$

En general, se tiene;

**Ejemplo 193** Si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$

**Solución:** Si  $\{x_n\}$  es una sucesión acotada entonces existe  $K \in \mathbb{R}^+$  tal que,  $|x_n| \leq k$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  luego;

$$-k \leq x_n \leq k \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que implica

$$-\frac{k}{n} \leq \frac{x_n}{n} \leq \frac{k}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{k}{n} = 0$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} = 0$ , por teorema del acotamiento se tiene entonces que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$

Calcular

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \operatorname{sen}(n)}{n - (-1)^n}$$

**Solución:**

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}}$$

pero para todo  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{-1}{n} \leq \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \frac{-1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n} \quad \wedge \quad \lim \frac{1}{n} = 0.$$

Luego por el teorema del acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n} = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Así, por álgebra de límite,

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\operatorname{sen} n}{n}}{1 - \frac{(-1)^n}{n}} = \frac{1}{1} = 1$$

**Ejemplo 194** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos(n)}{3^n}$$

**Solución:**

$$-\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{-2^n}{3^n} \leq \frac{n}{3^n} \leq \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$ , entonces por el teorema del acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} = 0.$$

Por otra parte

$$\frac{-1}{3} \leq \frac{\cos n}{3^n} \leq \frac{1}{3^n}$$

además  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$

Luego por teorema del acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{3^n} = 0$$

En consecuencia, por álgebra de límites

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + \cos n}{3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{3^n} = 0$$

**Ejemplo 195** Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  donde  $x_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$ .

**Solución:**

$$x_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n+1}) \frac{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$$

pero

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ , luego por teorema del acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = 0$$

y por consiguiente  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} - \sqrt{n+1} = 0$ .

**Ejemplo 196** Demostrar : Si  $|r| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$

**Solución:** Consideremos  $0 < r < 1$

Sea  $h = \frac{1}{r} - 1$

Para  $n \geq 2$ , se tiene

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2}h^2 + \dots + h^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$$

Luego

$$0 < nr^n = \frac{n}{(1+h)^n} \leq \frac{n}{n(n-1)/2} = \frac{2n}{n(n-1)}$$

pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n(n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n-1} = 0$$

Por teorema del acotamiento

**Ejemplo 197**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$$

2) Sea  $-1 < r \leq 0$

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$-|r|^n \leq r^n \leq |r|^n$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} n|r|^n = 0$  pues  $0 \leq |r| < 1$  entonces por teorema del acotamiento se tiene  $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ .

**Ejemplo 198** Retomemos los ejemplos 168 y 169

$$x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)(\dots)\left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

Como  $y_n \leq x_n \forall n$  y ambas convergen se tiene  $L_2 = \lim_n y_n \leq \lim_n x_n = L_1$ , por lo tanto  $L_2 \leq L_1$ .

Nuestro objetivo es probar que  $L_1 = L_2$  por lo tanto sólo nos falta ver que  $L_1 \leq L_2$

Para  $p$  fijo la sucesión  $(p_n)_{n=1}^{\infty}$  con

$$p_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)(\dots)\left(1 - \frac{p-1}{n}\right)$$

converge (por operatoria de límites) al término  $x_p$  cuando  $n$  tiende a  $\infty$ .

Pero para cada  $p$  fijo se tiene  $y_n \geq p_n$  (puesto que  $p_n$  contiene a los primeros  $p+1$  primeros de  $y_n$ ), tomando límite cuando  $n \rightarrow \infty$  se obtiene, mediante el uso del corolario 3.17, que  $L_2 \geq x_p$

Ahora podemos hacer tender  $p \rightarrow \infty$ , así

$$L_2 \geq \lim_{p \rightarrow \infty} x_p = L_1$$

por lo tanto

$$L_2 \geq L_1$$

Así, las sucesiones  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  convergen ambas al mismo valor, llamado  $e$  (Usando la calculadora y cualquiera de las sucesiones anteriores visualice que  $e = 2.7182818\dots$ )

**Observación:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k$$

Justificaremos sólo en parte<sup>6</sup> esta observación. Si  $k = \frac{1}{p}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ , la sucesión se puede ver como una subsucesión de  $x_m = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$  ya que

$$\left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{pn}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{1}{pn}\right)^{pn}\right)^{\frac{1}{p}},$$

donde  $m = pn$  y con ayuda del teorema 3.9 podemos obtener la observación

**Ejemplo 199** Calcular

$$a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{5n+4}\right)^n$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(1-\frac{1}{n})}{n(1+\frac{1}{n})}\right)^n \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \frac{e^{-1}}{e^1} \\ &= e^{-2} \\ b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{5n+4}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n(1-\frac{3}{2n})}{5n(1+\frac{4}{5n})}\right)^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1-\frac{3}{2n}\right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1+\frac{4}{5n}\right)^n} \\ &= 0 \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{4}{5}}} \\ &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 200** Suponiendo que la sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  converge. Calcular su límite, donde la sucesión  $x_n$  es definida recursivamente como sigue

$$x_1 > 0 \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) \quad a \in \mathbb{R}^+,$$

<sup>6</sup>En beneficio del cálculo, hemos desarrollado esta observación como técnica de cálculo de límites de sucesiones.

**Solución:** Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L \neq 0$  tomando límite en ambos lados de la desigualdad anterior se tiene

$$\begin{aligned}\lim_n x_{n+1} &= \frac{1}{2}(\lim_n x_n + \frac{a}{\lim_n x_n}) \\ L &= \frac{1}{2}(L + \frac{a}{L})\end{aligned}$$

así  $L^2 = \frac{1}{2}(L^2 + a)$ . Por lo tanto  $L^2 = a$  así  $L = \sqrt{a}$  ó  $L = -\sqrt{a}$ , pero como la sucesión es positiva  $L = \sqrt{a}$ . Note que: aún no sabemos si  $x_n \rightarrow \sqrt{a}$ , todo se basó en la convergencia de  $x_n$ . Por otra parte si  $x_1$  hubiese sido negativo  $x_n \rightarrow -\sqrt{a}$

**Ejemplo 201** Sea  $x_n = \sqrt[n]{a}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$ . Podemos ver que  $x_n$  converge, ya que si:

a)  $a > 1$  entonces  $x_n$  es decreciente y acotada inferiormente o bien si

b)  $a \in ]0, 1[$  entonces  $x_n$  es creciente y acotada superiormente.

Por lo tanto  $\sqrt[n]{a}$  converge, es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = L$  existe

Si  $a > 1$   $L = \inf\{\sqrt[n]{a} : n \in \mathbb{N}\}$  y si  $0 < a < 1$ ,  $L = \sup\{\sqrt[n]{a} : n \in \mathbb{N}\}$ .

Por ver que en ambos casos  $L = 1$ , claramente se ve que  $L \neq 0$ .

Como  $x_n = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$  tiene como subsucesión  $a^{\frac{1}{n(n+1)}}$  por teorema 3.9 tenemos que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}}$$

pero

$$a^{\frac{1}{n(n+1)}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot a^{-\frac{1}{n+1}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{a^{\frac{1}{n+1}}}$$

luego

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{\lim_n a^{\frac{1}{n}}}{\lim_n a^{\frac{1}{n+1}}} = \frac{L}{L} = 1$$

Así,  $L = 1$

Por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad \forall a \in \mathbb{R}^+$$

**Ejemplo 202** Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ .

**Solución:** Sabemos que  $y_n = \sqrt[n]{n}$  forma una sucesión decreciente (a partir del tercer término) y acotada inferiormente; por lo tanto converge.

Sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , claramente  $L \geq 1$ , como  $\sqrt[n]{2n}$  es una subsucesión de  $y_n$  se tiene que su límite también es  $L$

Por lo tanto tenemos

$$L^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{2n})^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (2n)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2} \sqrt[n]{n} = 1 \cdot L$$

luego  $L^2 = L$ , así  $L = 1$ , por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

**Proposición 3.19** Sea  $p \in \mathbb{Z}^+$   $p > 1$ . Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n > 0$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[p]{x_n} = \sqrt[p]{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$$

**Ejemplo 203** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}}$$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}} = \sqrt[3]{\lim_{n \rightarrow \infty} (8 + \frac{2}{n^3})} = \sqrt[3]{8} = 2$$

**Ejemplo 204** *Calcular*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + 1} + \frac{n}{\sqrt[3]{(2n)^3 + 2}}$$

**Solución:** Como

$$1 \leq \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} \leq 1 + \frac{1}{n} \quad n \geq 2$$

Puesto que  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n}) = 1$ , entonces por teorema de acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = 1$$

Por otra parte;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{(2n)^3 + 2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n \sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{8 + \frac{2}{n^3}}} = \frac{1}{2}$$

En consecuencia, por álgebra de límites:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} + \frac{n}{\sqrt[3]{(2n)^3 + 2}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

**Ejemplo 205** *Calcular*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n + 2} - n^2}{n + n!} \cos(n!)$$

**Solución:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n + 2} - n^2}{n + n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{(\sqrt{n^4 + 3n + 2} + n^2)(n + n!)}$$

pero,

$$0 < \frac{3n + 2}{(\sqrt{n^4 + 3n + 2} + n^2)(n + n!)} < \frac{3n + 2}{\sqrt{n^4 + 3n + 2} + n^2}$$

además

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 2}{\sqrt{n^4 + 3n + 2} + n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n^3} + \frac{2}{n^4}} + 1} = 0$$

Luego por teorema del acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 3n + 2} - n^2}{n + n!} = 0$$

y como la función coseno es acotada se tiene por teorema 3.13 que  $L = 0$

Es importante hacer notar algunos límites fundamentales (ya mencionados) que debemos tener presente para el cálculo de otros límites.

## Límites Fundamentales

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c, \quad c \in \mathbb{R}$
2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{nh} = 0, \quad h \in \mathbb{R}$
3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^{p/q}} = 0, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0, \quad \text{si } |r| < 1$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen} hn}{n} = 0, \quad h \in \mathbb{R}$
6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a \in \mathbb{R}^+$
7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1,$
8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$
9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{R}$
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right) = e$
11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + r + r^2 + \dots + r^n) = \frac{1}{1-r}, \quad \text{si } |r| < 1$
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_p n^p}{a_q n^q} = \begin{cases} 0 & \text{si } q > p \\ \frac{a_p}{a_q} & \text{si } q = p \\ \text{diverge} & \text{si } q < p \end{cases}$

Otro límite fundamental que demostraremos más adelante usando el teorema de enlace es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{k}{n}\right) = k \quad k \in \mathbb{R}$$

**Ejercicio 206** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cos(n)}{n+4} + \frac{2 \operatorname{sen}(3/n)}{1/n}$$

**Solución:** Sea  $a_n = \frac{\sqrt[3]{n} \cos(n)}{n+4}$ ,  $b_n = \frac{2 \operatorname{sen}(3/n)}{1/n}$

Calculemos  $\lim a_n$  y  $\lim b_n$ . (De existir, podemos aplicar álgebra límites)

Para todo  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene

$$0 < \frac{\sqrt[3]{n}}{n+4} < \frac{\sqrt[3]{n}}{n} < \sqrt[3]{\frac{1}{n^2}} < \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$$

como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n^2}} = 0$ , entonces por teorema de acotamiento

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+4} = 0$$

y como la sucesión  $(\cos n)$  es acotada entonces por el teorema del cero aniquila

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

Por otra parte, aplicando el límite fundamental

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}(k/n) = k$$

obtenemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \operatorname{sen}(3/n)}{1/n} = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}(3/n) = 2 \cdot 3 = 6$  luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 6$  y aplicando el álgebra de límites, se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = 0 + 6 = 6$$

**Ejercicio 207** Demuestre que si  $\lim x_n$  existe y  $\lim y_n$  no existe entonces  $\lim x_n + y_n$  no existe

**Solución:** (Por el método del absurdo) Supongamos que  $\lim x_n + y_n$  existe.

Dado que  $\lim x_n$  existe entonces por algebra de límites;

$$\lim(x_n + y_n) - x_n \quad \text{existe}$$

es decir

$$\lim y_n \quad \text{existe}$$

lo que contradice el hecho que  $\lim y_n$  no existe.

**Ejercicio 208** Determine si el siguiente límite existe;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4 + 5}} + \frac{n^3 + 2}{n^2 + 1}$$

**Solución:** Sea  $x_n = \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4 + 5}}$  y  $y_n = \frac{n^3 + 2}{n^2 + 1}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{\sqrt[4]{n^4 + 5}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{n\sqrt[4]{1 + 5/n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt[4]{1 + 5/n^4}} = 3$$

luego existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

Sin embargo por ejemplo 189  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  no existe por consiguiente aplicando el ejercicio anterior tenemos que el límite dado no existe.

**Ejercicio 209** Determine  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  tal que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$  donde,  $a_n = \frac{n!x^n}{n^n}$ .

**Solución:**

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(n+1)!x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!x^n} \right| = \frac{|x|n^n}{(n+1)^n}$$

entonces

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|n^n}{(n+1)^n} \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^n \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 + 1/n} \right)^n \\ &= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1 + 1/n)^n} = |x| \frac{1}{e} \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 &\iff |x| \frac{1}{e} < 1 \\ &\iff |x| < e \wedge x \neq 0 \\ &\iff -e < x < e \wedge x \neq 0 \\ &\iff x \in ]-e, e[ - \{0\} \end{aligned}$$

**Ejercicio 210** <sup>7</sup> Determine para qué valores de  $x$  en  $\mathbb{R} - \{0\}$  el límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$$

es menor que 1, siendo  $a_n = \frac{1}{n^2}(x+1)^n$

---

<sup>7</sup>Esta técnica es usada en lo que suele llamarse intervalos y radios de convergencia de series de potencias.



**Solución:** Como tenemos

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{1}{(n+1)^2} (x+1)^{n+1} \frac{n^2}{(x+1)^n} \right| = \frac{n^2}{(n+1)^2} |x+1|$$

luego

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} |x+1| \\ &= |x+1| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} \\ &= |x+1| \cdot 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

**Ejercicio 211**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1 &\iff |x+1| < 1 \wedge x \neq -1 \\ &\iff -1 < x+1 < 1 \wedge x \neq -1 \\ &\iff -2 < x < 0 \wedge x \neq -1 \\ &\iff x \in ]-2, 0[ \setminus \{-1\} \end{aligned}$$

**Ejercicio 212** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. Si  $\{a_n\}$  es acotada entonces  $\{a_n\}$  es convergente
2. Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|$  existe entonces  $\{a_n\}$  es convergente
3. Si  $\{a_n\}$  es acotada entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$
4. La sucesión  $\frac{(-2)^n}{2^n + 4^n}$  es acotada
5. Toda sucesión convergente es monótona.

**Solución:**

1. Falso. La sucesión  $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$  es acotada pero no convergente
2. Falso. Sea  $a_n = (-1)^n$ ,  $|a_n| = 1$   $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = 1$  pero  $\{a_n\}$  no es convergente.
3. Verdadero. Si  $\{a_n\}$  es acotada, entonces existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que  $|a_n| < k \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Luego

$$\frac{-k}{n^2} \leq \frac{a_n}{n^2} \leq \frac{k}{n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Por teorema del acotamiento, dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n^2} = 0$ , se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n^2} = 0$$

4. Verdadero. La sucesión  $a_n = \frac{(-2)^n}{2^n + 4^n}$  es convergente.  
En efecto;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n}{2^n + 4^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{1 + 2^n} = 0$$

Por teorema, toda sucesión convergente es acotada

5. Falso. Sea  $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$ , la sucesión  $\{a_n\}$  es convergente pero no es monótona.

**Ejercicio 213** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/n)^2 + (2/n)^2 + \cdots + (n/n)^2}{n}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}(1/n)^2 + (2/n)^2 + (3/n)^2 + \cdots + (n/n)^2 &= \frac{1}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \frac{3^2}{n^2} + \cdots + \frac{n^2}{n^2} \\ &= \frac{1+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^2}\end{aligned}$$

pero

$$1 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(esta última igualdad se puede demostrar por inducción)

Luego

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/n)^2 + (2/n)^2 + \cdots + (n/n)^2}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

**Ejercicio 214** *Calcular*

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1}}{5^n + n}$$

**Solución:**

La suma  $1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1}$  corresponde a una suma de una progresión geométrica de  $n$  términos y razón  $r = 5$ , luego

$$1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \cdots + 5^{n-1} = \frac{1 - 5^n}{1 - 5}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 5^n}{-4(5^n + n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1/5^n) - 1}{(-4)(1 + n/5^n)}\end{aligned}$$

pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{5})^n = 0$  (por ejemplo límites fundamentales 4)

Por otra parte como  $n < 2^n$ , para todo  $n$

$$(-\frac{2^n}{5^n} \leq \frac{n}{5^n} \leq \frac{2^n}{5^n}) \iff (-\frac{2}{5})^n \leq \frac{n}{5^n} \leq (\frac{2}{5})^n$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{5})^n = 0$ , por teorema de acotamiento  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{5^n} = 0$

En consecuencia por álgebra de límites tenemos  $L = 1/4$ .

**Ejercicio 215** *Determine si la siguiente sucesión  $\{a_n\}$  converge donde*

$$a_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{n^2 + j}$$

**Solución:**

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} + \frac{1}{n^2 + 2} + \frac{1}{n^2 + 3} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n}$$

Puesto que  $n^2 + k \geq n^2 + 1$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}$ , entonces

$$\frac{1}{n^2 + k} \leq \frac{1}{n^2 + 1}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Por lo tanto,

$$0 \leq a_n \leq \frac{n}{n^2 + 1}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/n}{1+1/(n^2)} = 0$   
se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

así la sucesión  $\{a_n\}$  converge.

**Ejercicio 216** Se define la sucesión de números reales positivos  $(x_n)$  como sigue

$$x_1 = 1 \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Estudie la convergencia de la sucesión  $(x_n)$ .

**Solución:** Basta probar que es acotada y creciente.  $x_1 = 1 \quad x_2 = \sqrt{3} \quad x_3 = \sqrt{3\sqrt{3}}$

i)  $(x_n)$  es una sucesión acotada superiormente por 3 En efecto:

a)  $n = 1 \quad x_1 = 1 \leq 3$

b) Supongamos  $x_k \leq 3$  (claramente  $x_k > 0$ ), por demostrar  $x_{k+1} \leq 3$

$$x_{k+1} = \sqrt{3 \cdot x_k} \leq \sqrt{3 \cdot 3} = 3$$

Luego por inducción  $x_n \leq 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ii) ¿ $(x_n)$  es creciente?

Como  $3 - x_k \geq 0$

$$x_n(3 - x_n) = x_{n+1}^2 - x_n^2 = (x_{n+1} + x_n)(x_{n+1} - x_n) \geq 0$$

Como  $x_{n+1} + x_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$  entonces  $x_{n+1} - x_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Por lo tanto  $x_{n+1} \geq x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Luego  $(x_n)$  es creciente.

Por Teorema 3.12 existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = L$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} L^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot x_n = 3 \cdot L \\ \Rightarrow L^2 - 3L &= 0 \\ \Rightarrow L(L - 3) &= 0 \\ \Rightarrow L = 0 \text{ ó } L &= 3 \end{aligned}$$

pero  $L > 0$ , luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 3$

**Ejercicio 217** Sea

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$$

Determine la función y grafique.

**Solución:** Para calcular este límite, debemos analizar para los distintos valores de  $x$ .

Caso 1. Si  $|x| < 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x^{2n} = 0$  luego, por álgebra de límites.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{2n} - 1)}{\lim_{n \rightarrow \infty} (x^{2n} + 1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

Caso 2. Si  $|x| > 1$  entonces;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^{2n}}}{1 + \frac{1}{x^{2n}}}$$

pero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{2n} = 0$  pues  $|\frac{1}{x}| < 1$ , luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 1$$

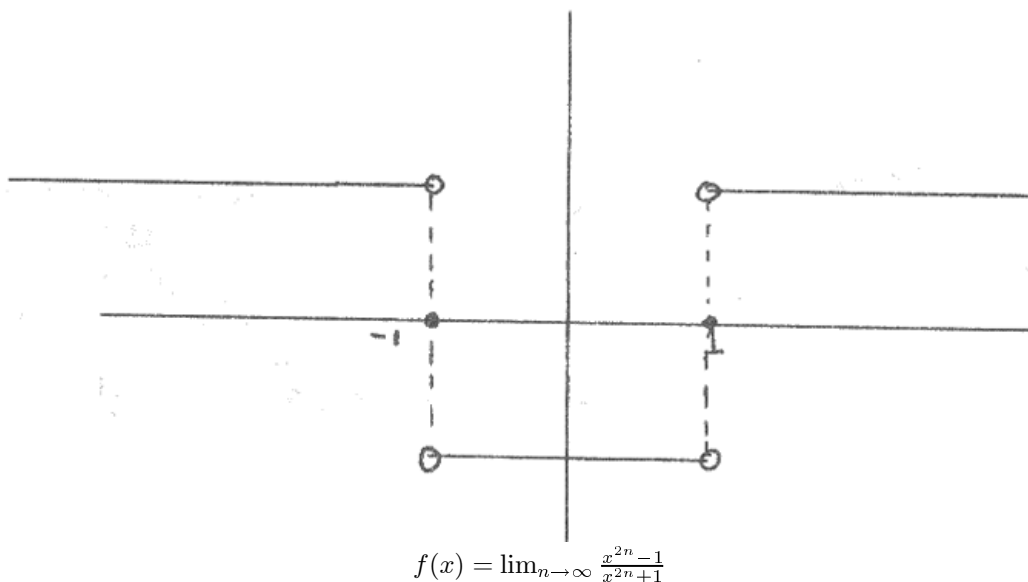
Caso 3. Si  $|x| = 1$  entonces  $x^{2n} = 1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1} = 0$$

En consecuencia

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x| < 1 \\ 1 & \text{si } |x| > 1 \\ 0 & \text{si } |x| = 1 \end{cases}$$

gráfica de  $f(x)$  en la figura



**Ejercicio 218** <sup>8</sup> Determinar  $a \in \mathbb{R}$  de modo que

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^a}{(2n^2 + a)^{\frac{3}{4}}} \text{ existe}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a (1 + \frac{1}{n})^a}{(n^2 (2 + \frac{a}{n^2}))^{\frac{3}{4}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a (1 + \frac{1}{n})^a}{n^{\frac{3}{2}} (2 + \frac{a}{n^2})^{\frac{3}{4}}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n^{a-3/2} \frac{(1 + \frac{1}{n})^a}{(2 + \frac{a}{n^2})^{\frac{3}{4}}} \end{aligned}$$

1. Si  $a - 3/2 > 0$  el límite no existe
2. Si  $a - 3/2 < 0$  el límite existe y vale cero
3. Si  $a - 3/2 = 0$  por álgebra de límite

**Ejercicio 219**

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \frac{1}{n})^{\frac{3}{2}}}{(2 + \frac{3}{2n^2})^{\frac{3}{4}}} = \frac{1}{2^{\frac{3}{4}}} = 2^{-\frac{3}{4}}$$

<sup>8</sup>Este problema y el anterior corresponde a lo que se llama cálculo del límite puntual de funciones, en este caso  $f(a)$

Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$$

**Solución:**

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

luego aplicando la propiedad telescópica se obtiene;

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Así,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1 - 0 = 1$$

**Ejercicio 220** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=c}^n ar^k, \text{ si } |r| < 1$$

**Solución:**

$$\sum_{k=c}^n ar^k = ar^c + ar^{c+1} + \dots + ar^n$$

esta sumatoria corresponde a la suma de una progresión geométrica, luego

$$\begin{aligned} \sum_{k=c}^n ar^k &= \frac{ar^c(1 - r^{n-c+1})}{1 - r} \\ &= \frac{ar^c}{1 - r} - \frac{ar^{n+1}}{1 - r} \end{aligned}$$

luego por algebra de límites y dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0$ , se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=c}^n ar^k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^c}{1 - r} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ar^{n+1}}{1 - r} \\ &= \frac{ar^c}{1 - r} - 0 \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=c}^n ar^k = \frac{ar^c}{1 - r}.$$

**Definición 3.20 (Límite infinito)** Diremos que una sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  tiende a infinito si para todo real positivo  $K$  grande, existe (nuevamente)  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > N$  se tienen que  $x_n > K$ .

**Notación:** Anotaremos esto de la siguiente forma

$$x_n \rightarrow +\infty \quad \text{ó también} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$$

Análogamente tenemos que  $x_n \rightarrow -\infty$  es equivalente a decir

$$\forall K \in \mathbb{R}^+ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que si } n > N \Rightarrow x_n < -K$$

Lo primero que debemos notar es que  $+\infty$  y  $-\infty$  no son números reales, por lo tanto no se puede ocupar álgebra de límite de este tipo

**Ejemplo 221** Sea  $x_n = n$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  en cambio si  $x_n = -n$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Ejemplo 222** Sea  $x_n = a^n$  si  $a > 1$  entonces  $x_n \rightarrow +\infty$

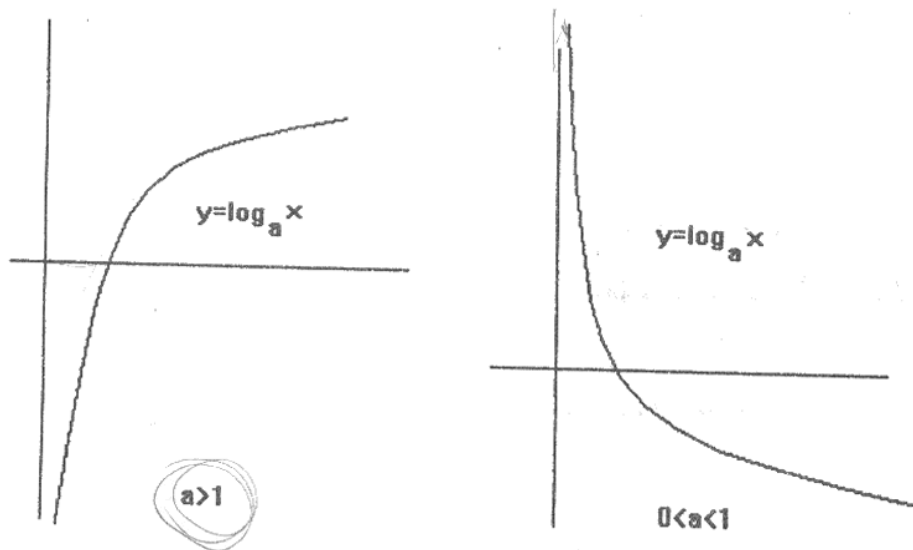
**Solución:** Como  $a > 1$  se puede escribir como  $a = 1 + h$  con  $h > 0$ ,

**Ejemplo 223** Por desarrollo del binomio a la  $n$  se tiene  $a^n = (1 + h)^n > 1 + nh$

**Ejemplo 224** Si  $b > 1$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} \log_b n = +\infty$

Si  $0 < b < 1$  entonces  $\log_b n = -\infty$ .

Podemos observar de la gráfica de  $y = \log_b x$  (ver figura )



que a medida que  $n$  crece indefinidamente las imágenes  $\log_b n$  también crece indefinidamente sin embargo, si  $0 < b < 1$ , las imágenes  $\log_b n$  decrecen indefinidamente.

### 3.5 Ejercicios Propuestos

**Ejercicio 225** Demuestre que

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n-1}{4n+2} = \frac{3}{4} \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n+1}{2n^2+n} = \frac{1}{2} \quad iii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2+1}{n^2+1} = 3$$

**Ejercicio 226** Demuestre que los siguientes límites no existen

$$i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2-1}{n+1} \quad ii) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^2+1}$$

**Ejercicio 227** Calcular los siguientes límites

- |                                                                                |                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3+3n+1}{3n^3+5n^2+3}$                 | 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2+1} - n$                       |
| 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+10}}$                    | 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3^n}$                          |
| 5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}(n)}{n}$               | 6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n-2^n}{2^n+2^n}$                |
| 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + \cos n}{3^n+4}$                 | 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+\operatorname{sen}(1/n)}{5+n}$ |
| 9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \operatorname{sen} n }{n+2}$ | 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^n+5^n}{(-4)^{n+1}+5^n}$     |
| 11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+2}(\sqrt{n+3}-\sqrt{n-2})$            | 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{2^n}$                    |

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + \operatorname{sen}(\frac{\pi n}{2})}{3^n + 2n}$
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{4n^4 + 6n - \cos n}{5n^4 + 5(-1)^n})(\sqrt{n^2 + 8n} - n)$
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + 2n + 2}$
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^4 + 3n + 2} - n^2) \cos(n!)}{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)}$
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n+1} \operatorname{sen}(\frac{\pi}{n})$
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+n!}{2n^2}$
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi(4+16+36+\dots+(2n)^2)}{n^3}$
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2})$
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} [\frac{1+3+5+7+\dots+(2n+1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2}]$
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n} + \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+5+5^2+5^3+\dots+5^n}{5^n+n}$

**Ejercicio 228** Calcule límite cuando  $n \rightarrow \infty$  de  $a_n$  (cuando corresponda)

1.  $a_n = (\frac{n \operatorname{sen}(n)}{n^2-1})$
2.  $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\sqrt{n}+\sqrt{n}}$
3.  $a_n = \frac{(2n+3)(3-2n^2)(n+1)}{n^4+3n+1}$
4.  $a_n = \frac{n^2}{10+n\sqrt{n}}$
5.  $a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$
6.  $a_n = \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{\sqrt{n}}$
7.  $a_n = \frac{\tan(\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n})}{n}$
8.  $a_n = \frac{n^2(\operatorname{sen} n!)}{n+2n^2}$
9.  $a_n = \frac{n^5}{n!}$
10.  $a_n = \frac{n}{2^n}$

**Ejercicio 229** Calcule límite cuando  $n \rightarrow \infty$  de  $a_n$  (cuando corresponda)

1. Sea  $a_n = P_n$ , donde  $P_n$  es el perímetro de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en una circunferencia de radio  $r$
2. Sea  $a_n = A_n$ , donde  $A_n$  es el área encerrada por el polígono de  $n$  lados del problema anterior
3. Sea  $a_n = \beta_n$ , donde  $\beta_n$  es el ángulo formado entre los lados adyacente del polígono regular del problema anterior
4. Sea  $a_n = x_1(n) + x_2(n)$  donde  $x_1(n)$  y  $x_2(n)$  son las soluciones de la ecuación de segundo grado  $nx^2 + bx + c = 0$  con  $b, c$  constantes y  $x_1 > x_2$

**Ejercicio 230** Establezca el valor de verdad de las siguientes afirmaciones

1. Si  $(x_n)$  es una sucesión con una subsucesión  $x_{n_k}$  acotada, entonces ella también lo es.
2. Si  $(x_{n_k})$  es una subsucesión monótona creciente entonces  $(x_n)$  es monótona creciente
3. Si  $(x_{n_k})$  es acotada superiormente,  $(x_n)$  también lo es
4. Si  $(|x_n|)$  es acotado entonces  $(x_n)$  también lo es.
5. Si  $(|x_n|)$  es monótona entonces  $(x_n)$  también lo es.
6. Si **toda**  $(x_{n_k})$  es acotada entonces  $(x_n)$  también lo es.
7. Sea  $x_n \leq y_n \forall n$  entonces  
 Si  $(x_n)$  es creciente  $(y_n)$  también lo es.  
 Si  $(y_n)$  es decreciente  $(x_n)$  también lo es.  
 Si  $(y_n)$  es acotada,  $(x_n)$  también lo es.  
 Si  $(x_n)$  es no acotada  $(y_n)$  también no lo es.

**Ejercicio 231** Sea  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  definida recursivamente por

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 1 \quad x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n+1})$$

es decir,  $x_n$  es el promedio de los dos anteriores

a) Calcular  $x_{2n}$  y  $x_{2n+1}$  y escribirlos como una suma de términos de una progresión geométrica.

b) Probar que  $x_n$  es acotada (usar a).

c) Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  y justificar su existencia

(Ayuda:  $x_{2n} \rightarrow 2/3$ ,  $x_{2n+1} \rightarrow 2/3$ )

**Ejercicio 232** Sean  $(x_n)$  y  $(y_n)$  sucesiones convergentes tal que

$$\exists N \in \mathbb{N} \wedge x_n \leq y_n, \forall n > N \text{ Probar que } \lim x_n \leq \lim y_n$$

(Ayuda: Use el hecho que si  $\lim z_n = L > 0 \Rightarrow \exists M \in \mathbb{N}$  tal que  $z_n > 0 \forall n > M$ )

**Ejercicio 233** Sea  $(x_n)$  convergente y  $\exists N \in \mathbb{N}$  y tal que  $x_n \geq a \forall n \in \mathbb{N}, n > N$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a$

**Ejercicio 234** Se define límite inferior ( $\liminf x_n$ ) y límite superior ( $\limsup x_n$ ) de una sucesión  $(x_n)$  acotada, de la siguiente forma

Sea  $A_n$  el siguiente conjunto

$$A_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} := \{x_k : k \geq n\}$$

Como  $(x_n)$  es una sucesión acotada, el conjunto  $A_n$  también lo es y por axioma de completitud en  $\mathbb{R}$  existe

$$s_n = \sup A_n, \quad i_n = \inf A_n$$

a) Usando el hecho que

$$A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots$$

indique por qué teorema se tiene la convergencia de  $(s_n)$  y  $(i_n)$

b) Se define  $\limsup x_n = \lim s_n \wedge \liminf = \lim i_n$  muestre que

$$\liminf x_n \leq \limsup x_n$$

c) Sea  $x_n = \frac{(1+(-1)^n)}{2}$  y  $y_n = \sin(\frac{\pi n}{8})$

Calcular  $\limsup x_n$ ,  $\liminf x_n$ ,  $\limsup y_n$ ,  $\liminf y_n$

d) En que caso se tiene la igualdad en (b)

**Ejercicio 235** a) Tomar  $(y_n)$  del problema anterior, encontrar una subsucesión de  $y_n$  convergente (note que  $y_n$  no converge)

b) Toda sucesión acotada  $(x_n)$  posee una subsucesión convergente (Muestre esta afirmación) Ayuda: Puede tomar una  $x_{n_k} \rightarrow \limsup x_n$  (o  $\liminf x_n$ )

**Ejercicio 236** Sea  $(x_n)$  sucesión acotada: Muestre la equivalencia

$$(x_n) \text{ converge} \iff \limsup x_n = \liminf x_n$$



## Chapter 4

# Límites de Funciones

### 4.1 Límites de Funciones

En esta sección veremos el concepto de “arbitrariamente próximo”, idea que ya fue desarrollada en límite de sucesiones, es decir, en funciones de  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , la diferencia en este estudio será principalmente en el dominio, que en esta oportunidad es un subconjunto de  $\mathbb{R}$ .

Recordemos que una vecindad de  $p$  es de la forma  $V_{p, \varepsilon} = ]p - \varepsilon, p + \varepsilon[$ , donde  $\varepsilon > 0$  (en general una vecindad de  $p$  es un abierto que contiene a  $p$ ).

#### 4.1.1 Punto de Acumulación

**Definición 4.1** Sea  $p \in \mathbb{R}$  y  $A \subset \mathbb{R}$  ( $p$  no necesariamente en  $A$ ).

Diremos que  $p$  es un **punto de acumulación** de  $A$  si toda vecindad de  $p$ ,  $V_p$ , contiene algún punto  $a \in A$  diferente de  $p$ . En notación más formal

$$\forall \varepsilon > 0, (V_{p, \varepsilon} - \{p\}) \cap A \neq \emptyset.$$

ó

$$\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A, 0 < |a - p| < \varepsilon.$$

El **conjunto derivado** de  $A$ , denotado por  $A'$ , es el conjunto de todos los puntos de acumulación de  $A$ , es decir,

$$A' = \{p \in \mathbb{R} : p \text{ es un punto de acumulación de } A\}.$$

**Ejemplo 237** Sea  $A = ]3, 7]$ . Como toda vecindad de 3 intersecta a  $A$  se tiene que 3 es un punto de acumulación de  $A$  (es decir,  $3 \in A'$ ). En forma fácil se puede ver que  $A' = [3, 7]$ .

**Ejemplo 238** Sea  $A = ]-1, 2[ \cup \{4\} \cup [5, 7[$ . 4 no es punto de acumulación de  $A$  pues existe  $V = ]3, 5[$  vecindad de 4 tal que  $(V - \{4\}) \cap A = \emptyset$ .

Una forma de visualizar los puntos de acumulación, está dada en la siguiente proposición

**Proposición 4.2** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío

$p \in A'$  si y solo si toda vecindad de  $p$  contiene infinitos puntos de  $A$

**Demostración:** ( $\Leftarrow$ ) Trivial

( $\Rightarrow$ ) Si tomamos vecindades de la forma  $V_{p, \frac{1}{n}} = V_n$  (es decir, con  $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ). Para  $n = 1$  existe  $x_1 \in A \cap (V_1 - \{p\})$  y existe  $n_2 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_1 - p| > \frac{1}{n_2}$ . Para  $n_2$  existe  $x_2 \in A \cap (V_{n_2} - \{p\})$  y existe  $n_3 \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_2 - p| > \frac{1}{n_3}$ , etc.

Por un proceso inductivo se puede garantizar la existencia de

$$x_1, x_2, x_3, \dots$$

todos puntos de  $A$ .

**Corolario 4.3** Sea  $A \subset \mathbb{R}$  no vacío

$$p \in A' \iff \exists (x_n)_{n=1}^{\infty}, x_n \in A - \{p\} \text{ y } x_n \rightarrow p$$

Esto se puede ver en la demostración de la proposición anterior

**Ejemplo 239**  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

Claramente se ve que  $0 \in A'$ , más aún  $A' = \{0\}$

**Ejemplo 240**  $B = \{\frac{(1-(-1)^n)n^2}{n^2+6n} : n \in \mathbb{N}\}$

$$B' = \{2\}$$

**Ejemplo 241**  $C = \{\sin(x) : 0 < x < \frac{\pi}{4}\} = \sin([0, \pi/4])$

$$C' = [0, \frac{\sqrt{2}}{2}]$$

**Ejemplo 242**  $D = ]3, 4[ \cup ]4, 7]$

$$D' = [3, 7]$$

**Ejemplo 243** Sea  $E = \mathbb{Q}$  entonces  $E' = \mathbb{R}$ , lo mismo ocurre con  $F = \mathbb{I}$  (irracionales),  $F' = \mathbb{R}$ . Estos resultados se deben al hecho que todo intervalo tiene infinitos racionales, en el primer caso, o infinitos irracionales, en el segundo caso

**Ejemplo 244** Sea  $G = \mathbb{Z}$ . Claramente se ve que ningún punto de  $\mathbb{Z}$  es punto de acumulación ya que tomando,  $p \in \mathbb{Z}$ , vecindad  $V_{p, \frac{1}{4}}$ , ella sólo tiene un punto en común con  $\mathbb{Z}$ , y si  $p \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$  siempre existe una vecindad que no contiene puntos de  $\mathbb{Z}$ . Luego tenemos  $G' = \emptyset$ .

**Definición 4.4** Un punto  $p$  en  $A$  se dice **aislado**, si existe una vecindad de  $p$ ,  $V_p$ , tal que  $(V_p - \{p\}) \cap A = \emptyset$

En el ejemplo anterior  $\mathbb{Z}$  está formado sólo por puntos aislados, lo mismo ocurre con  $\mathbb{N}$  y con  $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

**Observación:** Si  $p \in A'$ , tenemos la certeza que arbitrariamente cerca de  $p$  siempre hay elementos de  $A$ , esto no ocurre si  $p$  es un punto aislado de  $A$ .

### 4.1.2 Definición de límite de funciones

**Definición 4.5** Sean  $p \in A'$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  función y  $L \in \mathbb{R}$

Diremos que el **límite** de  $f(x)$  es  $L$  cuando  $x$  tiende a  $p$  si para toda vecindad de  $L$ ,  $V_L$ , existe una vecindad de  $p$ ,  $V_p$ , tal que<sup>1</sup>

$$f(V_p - \{p\}) = f((V_p - \{p\}) \cap A) \subset V_L,$$

es decir, los elementos arbitrariamente cercanos a  $p$  (los puntos de la vecindad  $V_p$ ), salvo el mismo  $p$ , que son tomados por  $f(x)$  (ya que deben estar en  $A = \text{Dom} f$ ) tiene sus imágenes arbitrariamente cercanas a  $L$  (ya que deben estar en  $V_L$ )

**Notación:**

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \text{ ó } \lim_p f(x) = L \text{ ó } f(x) \rightarrow L_{x \rightarrow p}$$

La definición anterior es necesario escribirla en un lenguaje que nos permita operar con ella.

Como las vecindades de  $L$  son de la forma  $V_{L, \varepsilon}$ , la frase para “toda vecindad de  $L$ ” equivale a tomar cualquier  $\varepsilon > 0$  ó  $(\forall \varepsilon > 0)$ ; lo mismo ocurre con las vecindades de  $p$ ,  $V_{p, \delta}$ , en este caso el cuantificador en la definición es existe,  $\exists \delta > 0$

<sup>1</sup>Se entiende que  $f(A) = f(A \cap \text{Dom} f)$ , ya que a los elementos de  $A$  que no están en el  $\text{Dom} f$ ,  $f$  les hace nada.

Por lo anterior tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

si y sólo si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, f((V_{p,\delta} - \{p\}) \cap A) \subset V_{L,\varepsilon} \quad (\text{ver figura } \blacktriangle\blacksquare\blacktriangle)$$

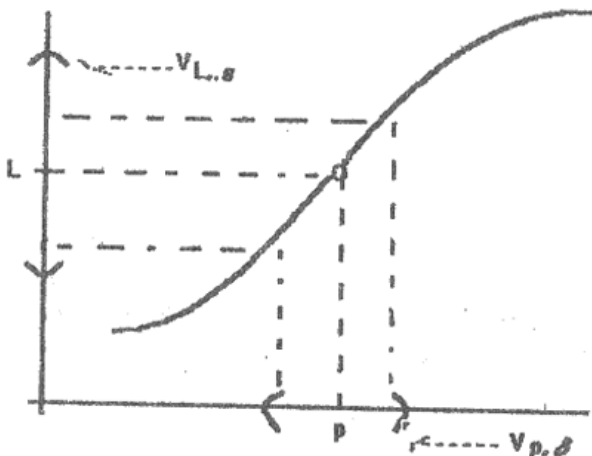


Figura  $\blacktriangle\blacksquare\blacktriangle$

Ahora recordando que

$$V_{p,\delta} = \{x \in \mathbb{R} : |x - p| < \delta\} \text{ y } V_{L,\varepsilon} = \{y \in \mathbb{R} : |y - L| < \varepsilon\},$$

se puede escribir:

**Definición Tradicional:**

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$$

si y sólo si

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((0 < |x - p| < \delta \wedge x \in \text{Dom} f) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Así, demostrar que  $\lim_p f(x) = L$  consiste en: encontrar un  $\delta > 0$  para un  $\varepsilon > 0$  dado (arbitrario) y que verifique la implicación

$$(0 < |x - p| < \delta \wedge x \in A) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

### 4.1.3 Demostración de Límite $\varepsilon - \delta$ .

**Ejercicio 245** Sea  $f(x) = 3x + 2$ . Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$

**Solución:** Ya que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\exists \delta (= \frac{\varepsilon}{3})$  tal que

$$\begin{aligned} 0 < |x - 1| < \delta &\iff 0 < |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \\ &\iff 0 < 3|x - 1| < \varepsilon \\ &\iff 0 < |3x - 3| < \varepsilon \\ &\iff 0 < |3x + 2 - 5| < \varepsilon \\ &\iff 0 < |f(x) - 5| \wedge |f(x) - 5| < \varepsilon \end{aligned}$$

Así,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{3}, (0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow |f(x) - 5| < \varepsilon).$$

¿Por qué tomamos  $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ ? Para que justamente se dé la desigualdad  $|f(x) - 5| < \varepsilon$  y no otra desigualdad.

Notemos que: El  $\delta$  buscado debe satisfacer:

$$f(V_{1,\delta} - \{1\}) \subset V_{5,\varepsilon} \text{ ó } f([1-\delta, 1+\delta]) \subset ]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[ \text{ (salvo } f(1) \text{)}$$

y como  $f(x)$  es creciente,  $\delta$  debe satisfacer

$$]3(1-\delta) + 2, 3(1+\delta) + 2[ \subset ]5-\varepsilon, 5+\varepsilon[ \text{ (salvo } f(1) \text{)}$$

o equivalentemente

$$5-\varepsilon \leq 3(1-\delta) + 2 \wedge 3(1+\delta) + 2 \leq 5+\varepsilon$$

de lo cual tenemos

$$-\varepsilon \leq -3\delta \wedge 3\delta \leq \varepsilon.$$

Así, para  $\varepsilon$  dado,  $\delta$  buscado debe cumplir  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$  (cualquier  $\delta$  positivo menor o igual que  $\frac{\varepsilon}{3}$ )

**Observación:** En general se tiene que si  $f(x) = ax + b$  con  $a \in \mathbb{R} - \{0\}$  y  $b \in \mathbb{R}$  y  $p \in \mathbb{R}$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow p} ax + b = ap + b$ . En este caso basta tomar  $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|}$  ya que  $a \neq 0$ .

Si  $a = 0$  se tiene que  $\lim_{x \rightarrow p} b = b$ .

**Ejercicio 246** Sea  $g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$ , (Ver figura más abajo). Demostrar que

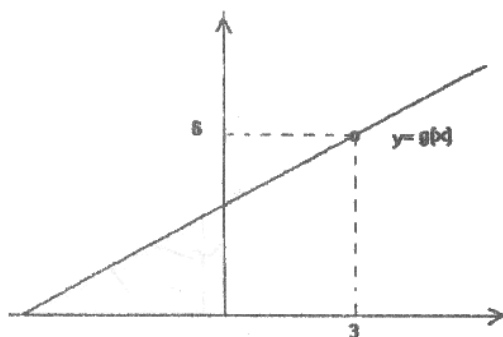
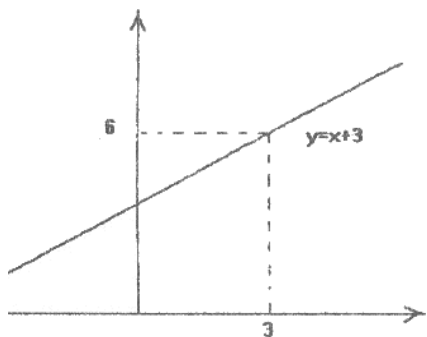
$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 6.$$

**Solución:** Notar que  $\text{Dom } g = \mathbb{R} - \{3\}$ . El límite es correcto ya que lo siguiente es verdadero:

Para cada  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta$ ,  $\delta = \varepsilon$  tal que:  $0 < |x - 3| < \delta \Rightarrow |g(x) - 6| < \varepsilon$ .

La implicación anterior es verdadera por la siguiente cadena:

$$\begin{aligned} 0 < |x - 3| < \delta &\iff 0 < |x + 3 - 6| < \varepsilon \\ &\iff 0 < |(x + 3)\frac{x-3}{x-3} - 6| < \varepsilon. \\ &\iff 0 < |g(x) - 6| < \varepsilon \end{aligned}$$



$$y = x + 3, g(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$$

**Ejercicio 247** Sea  $h(x) = x^2 + 2$ . Demostrar  $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 3$

**Solución:** Dado  $\varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$

$$\begin{aligned} 0 < |x - 1| < \delta &\Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \wedge |x - 1| < 1 \\ &\Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{3} \wedge |x + 1| < 3 \\ &\Rightarrow |x - 1||x + 1| < 3\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} 0 < |x-1| < \delta &\Rightarrow 0 < |(x+1)(x-1)| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 0 < |x^2-1| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 0 < |x^2+2-3| < \varepsilon \\ &\Rightarrow 0 < |h(x)-3| < \varepsilon \end{aligned}$$

Así,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\} (0 < |x-1| < \delta \Rightarrow |h(x)-3| < \varepsilon)$ .

La pregunta natural es: Para  $\varepsilon > 0$  ¿Cuál  $\delta$  tomar (cómo se obtiene un  $\delta$ ) apropiado para que todo quede como la definición tradicional? La técnica consiste en buscar una relación entre  $\varepsilon, \delta$ , esta se consigue buscando una relación entre

$$|x-p| \quad \text{y} \quad |f(x)-L|$$

En el ejemplo 245 se considera  $|x-1|$  y  $|3x+2-5|$ ; Dado que  $|3x+2-5| = |3x-3| = 3|x-1|$ , si queremos  $|3x+2-5| < \varepsilon$  (esto equivale a  $3|x-1| < \varepsilon$ ), necesitamos entonces tomar  $|x-1| < \frac{\varepsilon}{3}$  es decir, necesitamos tomar  $|x-1| < \delta$  con  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ .

En el ejemplo 246 se considera  $|x-3|$  y  $|\frac{x^2-9}{x-3}-6|$ . ¿Cómo está relacionado  $|x-3|$  con la segunda expresión? Para contestar esto necesitamos trabajar con la segunda expresión

$$\text{Si } x \neq 3, \left| \frac{x^2-9}{x-3} - 6 \right| = \left| \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} - 6 \right| = |x+3-6| = |x-3|$$

Por lo tanto, la segunda expresión es menor que  $\varepsilon$  si la primera también lo es, es decir,  $\delta$  debe ser igual a  $\varepsilon$ .

En el ejemplo 247 los términos a comparar son  $|x-1|$  y  $|x^2+2-3|$ . En este caso queremos que

$$|x^2+2-3| = |x^2-1| = |x-1||x+1| < \varepsilon.$$

Por lo tanto,  $|x-1| < \frac{\varepsilon}{|x+1|}$ , este último paso sugiere que  $\delta$  debe ser tomando como  $\frac{\varepsilon}{|x+1|}$ , pero esto no es correcto ya que  $\delta$  es un número positivo y no una función de  $x$ .

En este caso se acota superiormente  $|x^2+2-3|$  y esa cota se hace menor que  $\varepsilon$  con algún  $\delta$  apropiado. Note que si  $\delta = 1$  y

$$\begin{aligned} |x-1| < \delta &\Rightarrow -1 < x-1 < 1 \\ &\Rightarrow 1 < x+1 < 3 \\ &\Rightarrow |x+1| < 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $|x-1| < 1 \Rightarrow |x-1||x+1| < 3|x-1|$  y si  $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$  y a la vez  $\delta \leq 1$  ( $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ ) se tiene

$$|x-1| < \frac{\varepsilon}{3} \wedge |x+1| < 3$$

Por lo tanto

$$|x-1||x+1| < \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$$

Esta técnica se usa generalmente cuando  $|x-p|$  aparece sólo como un factor en  $|f(x)-L|$  y tal procedimiento es llamado **acotamiento**.

Veamos ahora un caso más complicado para un estudiante que tenga problemas con las desigualdades entre inversos. El ejemplo se verá diferente al anterior pero sólo usaremos la técnica de acotamiento.

**Ejercicio 248** Demostrar  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ .

Notemos que si  $f(x) = \sqrt{x}$  entonces  $\text{Dom} f = \mathbb{R}_0^+$

**Solución:** Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta = \varepsilon^2 > 0$  tal que

$$\begin{aligned} 0 < |x| < \delta \wedge x \in \mathbb{R}_0^+ &\iff 0 < x < \delta \\ &\iff 0 < x < \varepsilon^2 \\ &\iff 0 < \sqrt{x} < \varepsilon \\ &\rightarrow \sqrt{x} < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in \text{Dom} f \wedge 0 < |x| < \delta \rightarrow |\sqrt{x}| < \varepsilon).$$

**Observación:** En general, se puede demostrar que si  $a \in \mathbb{R}_0^+$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$

**Ejercicio 249** I) Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x-2} = 2$

Determine si la siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

II) Dado  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , existe  $\delta = \frac{1}{100}$  tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right| < \varepsilon$$

III) Dado  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , existe  $\delta = \frac{1}{3}$  tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right| < \varepsilon$$

**Solución:** I) Veamos como se encuentra  $|x - 1|$  en  $\left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right|$ .

Como

$$\left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right| = \left| \frac{x-3-2(x-2)}{x-2} \right| = \left| \frac{-x+1}{x-2} \right| = \frac{|x-1|}{|x-2|}$$

entonces debemos acotar  $\frac{1}{|x-2|}$  por un número

Si  $|x - 1| < \frac{1}{3}$  se tiene que:

$$-\frac{1}{3} < x - 1 < \frac{1}{3} \iff -\frac{4}{3} < x - 2 < -\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} < |x - 2| < \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-2|} < \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, dado  $\varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{\frac{1}{3}, \frac{2\varepsilon}{3}\}$  tal que

$$\begin{aligned} a) \quad 0 < |x - 1| < \delta < \frac{1}{3} &\Rightarrow \frac{1}{|x-2|} < \frac{3}{2} \\ b) \quad 0 < |x - 1| < \delta < \frac{2\varepsilon}{3} &\Rightarrow |x - 1| < \frac{2\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto por (a) y (b) tenemos

$$|f(x) - 2| < \varepsilon, \text{ si } 0 < |x - 1| < \delta$$

II) Verdadero.

Por lo anterior: Dado  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , existe  $\delta = \min\{\frac{1}{3}, \frac{2\varepsilon}{3}\} = \min\{\frac{1}{3}, \frac{1}{6}\} = \frac{1}{6}$  tal que

$$0 < |x - 1| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right| < \varepsilon$$

y como  $\delta = \frac{1}{100} < \frac{1}{6}$  entonces

$$0 < |x - 1| < \frac{1}{100} < \frac{1}{6} \Rightarrow \left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right| < \varepsilon$$

III) Falso.

Si  $\delta = \frac{1}{3}$  tenemos

$$0 < |x - 1| < \delta \iff 0 < |x - 1| < \frac{1}{3} \iff x \in ]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}[ - \{1\}$$

ahora si  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ , existe  $x = \frac{5}{4} \in ]\frac{2}{3}, \frac{4}{3}[ - \{1\}$  pero  $\left| \frac{x-3}{x-2} - 2 \right| \not< \varepsilon$

pues

$$\left| \frac{5/4-3}{5/4-2} - 2 \right| = \frac{1}{3} \not< \frac{1}{4}$$

**Ejemplo 250** Demostrar que  $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{4x+1}{2x-1} = \frac{1}{5}$

**Solución:** Necesitamos buscar el término (factor)  $|x + 1/3|$  (o equivalentemente el término  $\frac{|3x+1|}{3}$ ) en

$$\left| \frac{4x+1}{2x-1} - \frac{1}{5} \right|.$$

Ya que

$$\left| \frac{4x+1}{2x-1} - \frac{1}{5} \right| = \left| \frac{20x+5-2x+1}{5(2x-1)} \right| = \left| \frac{18x+6}{5(2x-1)} \right| = \frac{6|3x+1|}{5|2x-1|}$$

bastará acotar superiormente  $\frac{1}{|2x-1|}$ , por un número positivo  $k$ , puesto que si

$$\frac{1}{|2x-1|} \leq k$$

se tendría

$$\left| \frac{4x+1}{2x-1} - \frac{1}{5} \right| = \frac{6|3x+1|}{5|2x-1|} \leq \frac{6k}{5}|3x+1| = \frac{18k}{5} \frac{|3x+1|}{3}$$

así, bastaría tomar  $\delta = \frac{5\varepsilon}{18k}$  y se obtendría

$$\begin{aligned} |x + 1/3| &< \frac{5\varepsilon}{6 \cdot 3k} \quad \wedge \quad \left| \frac{1}{2x-1} \right| \leq k \\ \Rightarrow |x + 1/3| \cdot \frac{1}{|2x-1|} &< \frac{5\varepsilon}{6 \cdot k \cdot 3} \cdot k = \frac{5\varepsilon}{6 \cdot 3} \\ \Rightarrow \frac{6|3x+1|}{5|2x-1|} &< \varepsilon \\ \Rightarrow \left| \frac{4x+1}{2x-1} - \frac{1}{5} \right| &< \varepsilon \end{aligned}$$

Veamos si es posible acotar superiormente  $\frac{1}{|2x-1|}$  para  $x$  en una vecindad de  $-1/3$ .

$$\begin{aligned} |x + 1/3| < 1 &\iff -1 < x + 1/3 < 1 \\ &\iff -4/3 < x < 2/3 \\ &\iff 2(-4/3) - 1 < 2x - 1 < 2(2/3) - 1 \\ &\iff -11/3 < 2x - 1 < 1/3 < 11/3 \\ &\Rightarrow |2x - 1| < 11/3 \end{aligned}$$

Así, si  $|2x - 1| \neq 0$  se tiene  $\frac{1}{|2x-1|} > 3/11$  no es acotado superiormente. El problema en este caso es que la vecindad tomada en torno al  $-1/3$  incluye al valor  $x = 1/2$  quién anula a  $|2x - 1|$ . La vecindad debe excluir a  $1/2$  y cercano a él.

Por ejemplo la vecindad dada por  $\delta \leq 1/10$

$$\begin{aligned} |x + 1/3| < 1/10 &\Rightarrow -1/10 < x + 1/3 < 1/10 \\ &\Rightarrow -28/15 < 2x - 1 < -22/15 \\ &\Rightarrow 22/15 < |2x - 1| < 28/15 \\ &\Rightarrow 15/28 < \frac{1}{|2x-1|} < 15/22 \end{aligned}$$

luego si  $|x + 1/3| < 1/10 \Rightarrow \frac{1}{|2x-1|} < \frac{15}{22}$

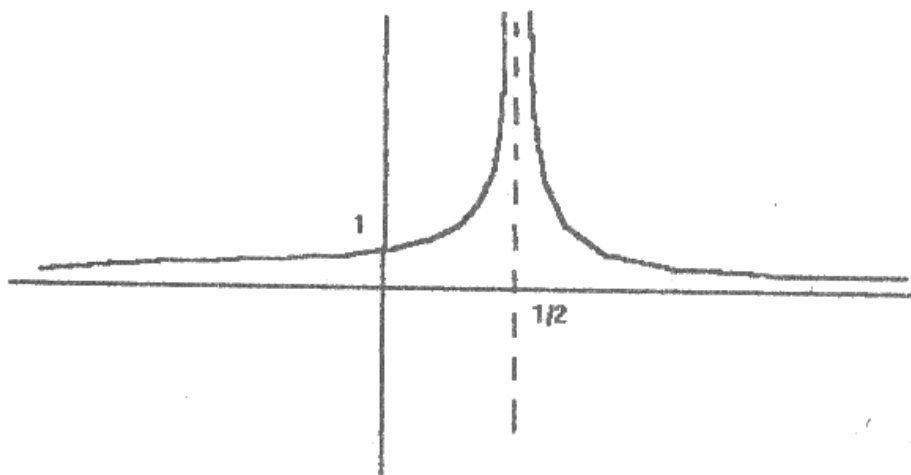
De esta forma, dado  $\varepsilon > 0$  basta tomar  $\delta = \min\{\frac{5\varepsilon}{18(\frac{15}{22})}, \frac{1}{10}\}$  ya que si  $\delta < \frac{1}{10}$  se tiene

$$|x + 1/3| < \delta < \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{1}{|2x-1|} < \frac{15}{22}$$

y además

$$\begin{aligned}
 |x + 1/3| < \delta &\Rightarrow |x + 1/3| < \frac{5 \cdot \varepsilon}{18(\frac{15}{22})} \\
 &\Rightarrow \frac{|x + 1/3|}{|2x - 1|} < \frac{15}{22} \frac{5\varepsilon}{18(15/22)} \\
 &\Rightarrow \left| \frac{4x - 1}{2x - 1} - \frac{1}{5} \right| < \varepsilon
 \end{aligned}$$

El acotamiento realizado en este problema consistió realmente en determinar en qué conjunto se encuentra el recorrido de la función  $g(x) = \frac{1}{|2x-1|}$  para valores cercanos a  $-1/3$ . Analizando el gráfico de  $g(x)$ , para una vecindad apropiada del  $-1/3$  se tiene naturalmente que  $g(x)$  será acotada; si la vecindad es grande como para contener a  $1/2$  no será acotada superiormente  $g(x)$  ya que es infinitamente grande cerca de  $1/2$  (ver figura )



$$g(x) = \frac{1}{|2x-1|}$$

**Ejemplo 251** Demuestre que

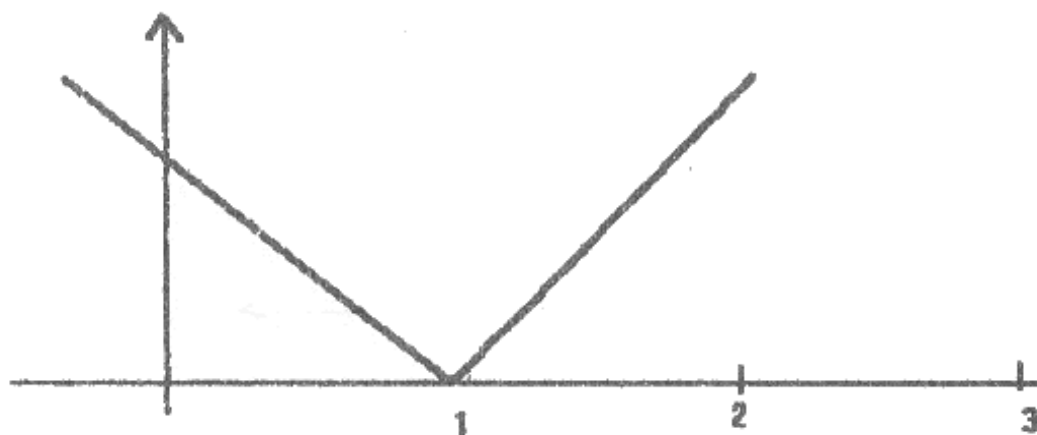
$$\lim_{x \rightarrow 2} 5x(x-3) = -10$$

**Solución:** Nuestro objetivo es buscar  $|x-2|$  en  $|5x(x-3) + 10|$ . Como

$$|5x(x-3) + 10| = 5|x-1||x-2|,$$

tendremos que acotar  $|x-1|$  en una vecindad del punto 2. Veamos esto gráficamente en la figura que sigue





$$g(x) = |x - 1|$$

donde  $g(x) = |x - 1|$

Naturalmente que  $g(x)$  es acotado, tomando una vecindad de 2 de radio 1 es decir,  $1 < x < 3$  se tiene por el gráfico que

$$g(1) < g(x) < g(3) \iff 0 < g(x) < 2$$

es decir, si  $V = \{x \in \mathbb{R} : |x - 2| < 1\}$ , entonces se tiene que:  $\forall x \in V, |x - 1| < 2$  y  $|5x(x - 3) + 10| < 5 \cdot 2|x - 1|$ .

De esta forma, dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta < \frac{\varepsilon}{10}$  y  $\delta < 1$  tal que

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 1| < 2 \quad (\text{ya que } \delta < 1 \Rightarrow x \in V)$$

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 1| < \frac{\varepsilon}{10} \quad (\text{ya que } \delta < \frac{\varepsilon}{10})$$

$$|x - 2| < \delta \Rightarrow |x - 1| < 2 \wedge |x - 2| < \frac{\varepsilon}{10}$$

Así,

$$\begin{aligned} & |x - 1||x - 2| < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{10} = \frac{\varepsilon}{5} \\ \Rightarrow & 5|x - 1||x - 2| < \varepsilon \\ \Rightarrow & |5x(x - 3) + 10| < \varepsilon \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, (|x - 2| < \delta \Rightarrow |5x(x - 3) + 10| < \varepsilon)$$

#### 4.1.4 Teoremas Básicos sobre Límites

A continuación veremos un teorema que es utilizado para probar la no existencia de límites, el teorema de unicidad

**Teorema 4.6 (de unicidad)** *El límite de una función (en un punto) es único*

Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  función,  $a \in A'$ . Si existe el límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow a$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  es único. Es decir,

$$\text{si } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2 \text{ entonces } L_1 = L_2$$

**Demostración:** Por el absurdo. Supongamos  $L_1 \neq L_2$ , entonces podemos tomar vecindades disjuntas  $V_{L_1}$  y  $V_{L_2}$ , es decir  $V_{L_1} \cap V_{L_2} = \emptyset$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$ , existe una vecindad de  $a$ ,  $V_1$ , tal que  $f(V_1 - \{a\} \cap A) \subset V_{L_1}$ , por otra parte se tiene  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_2$ , entonces existe una vecindad de  $a$ ,  $V_2$  tal que  $f(V_2 - \{a\} \cap A) \subset V_{L_2}$ .

Es claro que  $B = A \cap (V_2 - \{a\}) \cap (V_1 - \{a\}) \neq \phi$  (es imposible que sea vacía la intersección ya que ambas son vecindades de  $a$  y  $a$  es un punto de acumulación de  $A$ )

$$f(B) \subset V_{L_1} \quad \wedge \quad f(B) \subset V_{L_2}$$

por lo tanto

$$f(B) \subset V_{L_1} \cap V_{L_2} = \phi$$

pero  $f(B) \neq \phi$  contradicción. Así  $L_1 = L_2$

**Teorema 4.7**<sup>2</sup> Sea  $B \subset A \subset \mathbb{R}$ ,  $p \in B'$  (por lo tanto  $p \in A'$ ).

Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g = f|_B$ . Si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$  entonces  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$ .

Recíprocamente. Si  $B$  **contiene un intervalo abierto** que contiene a  $p$  se tiene que si  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$  entonces  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ .

**Demostración:** La demostración de la primera parte es basada en teoría de conjunto.

Si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$  se tiene que para toda vecindad  $V_L$  de  $L$  existe una vecindad  $V_p$  de  $p$  tal que

$$f((V_p - \{p\}) \cap A) \subset V_L$$

por lo tanto también se tiene

$$g((V_p - \{p\}) \cap B) \subset V_L$$

ya que

$$g((V_p - \{p\}) \cap B) \subset f((V_p - \{p\}) \cap A) \subset V_L$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$$

La otra parte del teorema realza el concepto de límite en el sentido que basta analizar los puntos cercanos a  $p$ .

**Ejemplo 252** Claramente se ve que  $\lim_{x \rightarrow 3} x^2 - 2 = 7$ . Aquí se está pensando en la función  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ .

El teorema anterior nos dice que  $f|_{]3, \infty[} = g : ]3, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x^2 - 2$  cumple que

$$\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 7$$

**Ejemplo 253** Sea  $f(x) = \frac{|x-2|}{x-2}$ ,  $x \neq 2$ ,

Probemos  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe (Por el absurdo).

Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe, es decir,  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = L$ . con  $L \in \mathbb{R}$  luego, si consideramos

$$g = f|_{]2, \infty[} \quad y \quad h = f|_{]-\infty, 2[}$$

entonces según el teorema anterior.

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = L \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = L \quad (4.1)$$

pero claramente  $g(x) = 1$  para todo  $x \in \text{Dom}g$  y  $h(x) = -1$  para todo  $x \in \text{Dom}h$ .

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = 1 \quad y \quad \lim_{x \rightarrow 2} h(x) = -1$$

lo que contradice 4.1

Por consiguiente  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe.

<sup>2</sup>Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  y  $B \subset A$ ,  $f|_B : B \rightarrow \mathbb{R}$  es la función  $f$  restringida a un dominio  $B$  y es llamada restricción de  $f$  a  $B$ .

**Ejemplo 254** En forma análoga se prueba la no existencia de  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ , donde  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ ,  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Sea

$$A = \left\{ \frac{1}{2n\pi} : n \in \mathbb{N} \right\}, B = \left\{ \frac{1}{2n\pi + \pi/2} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

ambos tienen a 0 como punto de acumulación

Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = L$ , por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} f|_A = L \quad \wedge \quad \lim_{x \rightarrow 0} f|_B = L \text{ (por teorema 4.7)}$$

Pero  $f|_A(a) = \sin(\frac{1}{a})$ ,  $a \in A$ , y  $\sin(\frac{1}{a}) = \sin\left(\frac{1}{\frac{1}{2n\pi}}\right) = \sin(2n\pi) = 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$   
por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} f|_A = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0, \text{ así } L = 0 \quad (4.2)$$

Por otra parte,  $f|_B(b) = \sin(\frac{1}{b})$ ,  $b \in B$  y como  $b = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$ , entonces

$$\sin \frac{1}{b} = \sin(2n\pi + \pi/2) = \sin \pi/2 = 1.$$

Así  $f|_B(b) = 1$ ,  $\forall b \in B$  de donde  $L = 1$ , lo que contradice 4.2

## 4.2 Límites Laterales

**Definición 4.8** El **límite lateral derecho** de  $f$  en  $a$  se entiende como el límite siguiente  $\lim_{x \rightarrow a} f|_{]a, \infty[}$  y se anota  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ . (si  $a$  es punto de acumulación de  $]a, \infty[ \cap \text{Dom} f \neq \emptyset$ )<sup>3</sup>

Análogamente se define **límite lateral izquierdo** como  $\lim_{x \rightarrow a} f|_{]-\infty, a[}$  y se denota como  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ . (si  $a$  es punto de acumulación de  $]-\infty, a[ \cap \text{Dom} f \neq \emptyset$ )

Por teorema anterior se tiene que:

Si  $f$  está **definida en un intervalo abierto** que contiene a  $a$  (no necesariamente definida en  $a$ ) entonces

i) Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y es igual a  $L$ , entonces ambos límites laterales existen y son iguales.

Por consiguiente usando la equivalencia  $p \Rightarrow q \iff \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$  tenemos:

ii) Si los límites laterales no existen o son diferentes entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  no existe. (insistimos en que siempre que  $f$  está definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ )

**Ejemplo 255** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+6x+8}{x+4} & x > -4 \\ \frac{x^2-16}{x^2+7x+12} & x < -4 \end{cases}$$

Calculemos los límites laterales en  $x = -4$ . Notemos que  $f$  está definida en  $\mathbb{R} - \{-4\}$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^2 - 16}{x^2 + 7x + 12} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{(x+4)(x-4)}{(x+3)(x+4)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x-4}{x+3} \\ &= \frac{-8}{-1} \\ &= 8 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>En caso contrario, no existe el límite (o no se puede calcular).

$$b) \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^2 + 6x + 8}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{(x+2)(x+4)}{x+4} = \lim_{x \rightarrow -4^+} x + 2 = -2$$

Por a) y b) se tiene  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$  luego  $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$  no existe.

**Ejemplo 256** Consideremos la función  $f(x) = \sqrt{x}$

Hemos visto en un ejemplo anterior que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$  existe y su valor es 0. Sin embargo no podemos afirmar que ambos límites laterales existan. En este caso, del  $\text{Dom} f = \mathbb{R}_0^+$ , luego  $f$  no está definida en todo un intervalo abierto que contenga a 0. Observamos la demostración del ejemplo 248 es claro que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$$

Sobre el límite lateral izquierdo se tiene que la proposición

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in \text{Dom} f \wedge -\delta < x < 0 \Rightarrow |\sqrt{x} - L| < \varepsilon)$$

es verdadera para todo  $L$  ( $L \in \mathbb{R}$ ) ya que no existe  $x$  en  $\mathbb{R}$  que cumple  $x \in \text{Dom} f \wedge -\delta < x < 0$ .

De esta forma aparentemente  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x} = L$  para todo  $L \in \mathbb{R}$

Pero 0 no es un punto de acumulación de  $] -\infty, 0[ \cap \text{Dom} f = \emptyset$ .

Por lo tanto el límite lateral izquierdo en  $x = 0$  no se puede calcular (no tiene sentido la expresión).

**Observación:** En términos de  $\delta$ ,  $\varepsilon$  la **definición de límite lateral derecho y lateral izquierdo** es:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L &\iff \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)((0 < x - a < \delta_1 \wedge x \in \text{Dom} f) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L &\iff \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)((-\delta_2 < x - a < 0 \wedge x \in \text{Dom} f) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora, supongamos que existen y son iguales los límites laterales de una función  $f$  en  $x = a$ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$$

Entonces podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

En efecto: Dado que existen los límites laterales entonces se tiene 4.3 y 4.4.

Sea  $\varepsilon > 0$  y consideremos  $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$  entonces se tiene

$$\begin{aligned} x \in \text{Dom} f \wedge 0 < x - a < \delta < \delta_1 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \\ x \in \text{Dom} f \wedge -\delta_2 > -\delta > x - a > 0 &\Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{aligned}$$

de donde:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(x \in \text{Dom} f \wedge -\delta < x - a < \delta \wedge x \neq a) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Hemos demostrado de esta forma el siguiente teorema.

**Teorema 4.9** Si los límites laterales en  $x = a$  existen (se pueden calcular) y ambos son iguales a  $L$  entonces se tiene que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ .

**Ejemplo 257** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 1}{x - 1} & x < 1 \\ \sqrt{9x} & x \geq 1 \end{cases}$$

Determinemos si existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + x + 1 = 3$$

$$\text{y } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{9x} = 3 \text{ entonces } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3.$$

Luego, por teorema anterior  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ .

**Ejemplo 258** Sea  $f(x) = x + \frac{|x-2|}{x-2}$ , verifiquemos que  $f(x)$  no tiene límite en 2.

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x+1) = 3$  y además

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x-1) = 1$ , se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  no existe.

**Ejemplo 259** Determinemos el valor de verdad de las siguientes proposiciones

i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-|1-x|}{x} = 0$ .

ii)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-|1-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-x}{x}$

iii)  $\lim_{x \rightarrow 1} [x]$  no existe.

iv) Si  $f(x) = \begin{cases} [x] & x \geq 1 \\ 2x-1 & x < 1 \end{cases}$  entonces el  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

v)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x} = 1$

**Solución:**

**Ejemplo 260** •

i) Falso. Si  $x \rightarrow 0$  entonces  $1-x > 0$  en una vecindad  $V$  del cero, luego  $|1-x| = 1-x$  en  $V$  por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-|1-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1$$

ii) Falso. Por lo anterior, se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-|1-x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1-|1-x|}{x} = 1$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1-|1-x|}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2-x}{x}$$

Note que  $1-x$  cambia de signo cerca del punto 1 y al tomar  $x$  tendiente a cero estamos tomando punto cerca de cero donde  $1-x$  tiene el valor positivo.

iii) Verdadero.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 1^+} [x] \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} [x]$ .

iv) Verdadero.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$  y

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x-1) = 1$  luego los límites laterales son iguales por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

iv) Falso.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^4+x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x} \sqrt{x^2+1}$ . Calculando los límites laterales tenemos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} \sqrt{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2+1} = 1$  y por la izquierda  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x}{x} \sqrt{x^2+1} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{x^2+1} = -1$

**Ejercicio 261** Determine  $a \in \mathbb{R}$  de modo que

$$L = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - |x-a| - a^2}{|x-a|} \text{ exista}$$

**Solución:** Notemos que  $|x - a| = x - a$  si  $x > a$  y  $|x - a| = -x + a$  si  $x < a$ , luego calculemos los límites laterales

$$\begin{aligned}
 L_+ &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - |x - a| - a^2}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - a^2 - (x - a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{x^2 - a^2 - (x - a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{(x - a)(x + a - 1)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^+} x + a - 1 \\
 &= 2a - 1
 \end{aligned}$$

Por otra parte

$$\begin{aligned}
 L_- &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2 - |x - a| - a^2}{|x - a|} = \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2 - a^2 + (x - a)}{-(x - a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{x^2 - a^2 + (x - a)}{-(x - a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{(x - a)(x + a + 1)}{-(x - a)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a^-} -(x + a + 1) \\
 &= -(2a + 1)
 \end{aligned}$$

Luego  $L$  existe si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , es decir,

$$2a - 1 = -2a - 1$$

de donde  $a = 0$ . Por lo tanto, el límite existe si y sólo si  $a = 0$ .

**Ejercicio 262** *Calculemos*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - |1 - 3x|}{x}$$

En este caso, notemos si “ $x$  tiende a cero” el factor  $1 - 3x$  es positivo, luego  $|1 - 3x| = 1 - 3x$  para todo  $x$  cerca de 0 y

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - |1 - 3x|}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - (1 - 3x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - 3x)}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{x} \\
 &= 3
 \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - |1 - 3x|}{x} = 3.$$

### 4.2.1 Álgebra de Límites

**Teorema 4.10** Sea  $X \subset \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \subset \mathbb{R}$ ,  $p \in X'$  y sean  $f$  y  $g$  tal que existan los límites  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$  entonces

a) *límite de la suma  $f + g$  también existe en  $p$  y se tiene*

$$\lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) + \lim_{x \rightarrow p} g(x)$$

b) límite del producto  $f \cdot g$  existe en  $p$  y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow p} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow p} g(x)$$

c) límite del cociente  $f/g$  existe en  $p$  cuando  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) \neq 0$  y se tiene

$$\lim_{x \rightarrow p} (f/g)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow p} f(x)}{\lim_{x \rightarrow p} g(x)}$$

**Demostración:** Usar resultado de algebra de límites de sucesiones y teorema del enlace, que veremos posteriormente.  $\square$

**Observación:** En particular de (b) se deduce que

Si  $\alpha \in \mathbb{R}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow p} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ .

**Observación:** Es importante enfatizar que para aplicar el algebra de límites, debemos estar seguros de que se verifiquen las hipótesis. Si no es así podemos obtener contradicciones como veremos a continuación.

Es claro que  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} 1 = 1$ .

Sin embargo, si escribimos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{1}{x-2}$$

y aplicamos el algebra de límites sin asegurarnos de que ambas límites existan podemos decir equivocadamente que.

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \frac{1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x-2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0 \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$$

de donde  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2} = 0$  lo que es una contradicción (y esto sucede porque  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-2}$  no existe).

**Observación:** Si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$  se tiene que

$$(\forall \varepsilon > 0) (\exists \delta > 0) ([x \in \text{Dom} f \wedge 0 < |x - p| < \delta] \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon).$$

Tomando, en particular,  $\varepsilon = 1$  se tiene que

$$\forall x \in (V_p - \{p\}) \cap \text{Dom} f, \quad L - 1 < f(x) < L + 1.$$

Es decir, que  $f$  es acotada superiormente por  $L + 1$  en la vecindad  $V_p - \{p\}$  y también acotada inferiormente por  $L - 1$  en el mismo conjunto.

**Teorema 4.11 (Acotamiento)** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $p \in A'$ ,  $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ . Sea  $V$  una vecindad de  $p$  tal que

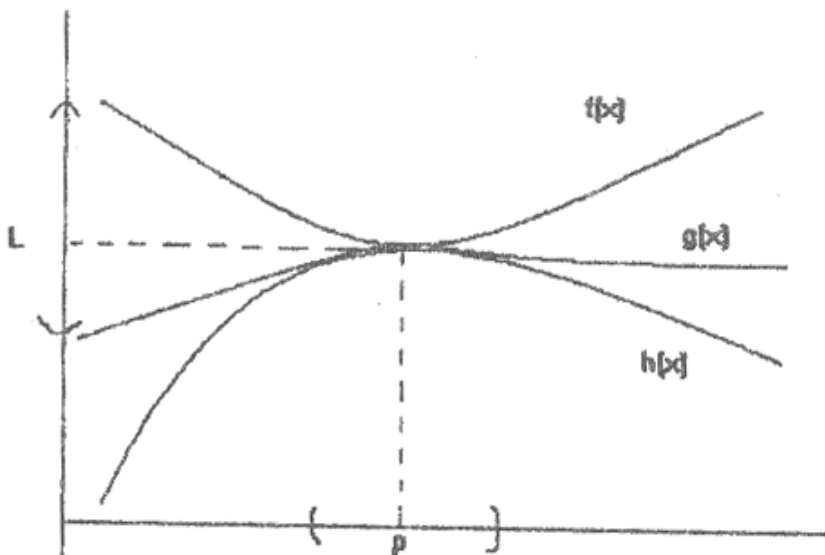
1)  $\forall x \in (V - \{p\}) \cap A$  se tiene:  $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

y además

2)  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \lim_{x \rightarrow p} h(x) = L$ ,

entonces

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$$



**Demostración:** (ver figura anterior) Dado  $\varepsilon$  tenemos para  $f$  y  $h$  lo siguiente

$$(\exists \delta_f > 0)(0 < |x - p| < \delta_f \wedge x \in A) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

$$(\exists \delta_h > 0)(0 < |x - p| < \delta_h \wedge x \in A) \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

pero

$$(|f(x) - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon) \text{ y}$$

$$(|h(x) - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon) \text{ así,}$$

$$\forall x \in V \cap \{x : |x - p| < \delta_f \wedge |x - p| < \delta_h\}$$

se tiene

$$L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon.$$

Por lo tanto,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min\{\delta_f, \delta_h\} (x \in A \wedge 0 < |x - p| < \delta) \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow p} g(x) = L$$

□

Lo siguiente está relacionado con la figura ♡. Cuando se define geométricamente la función  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  se utiliza la circunferencia de radio 1 como en la figura ♡, es así que las coordenadas del punto  $P$  son  $P = (\cos(x), \sin(x))$  donde  $x$  esta medido en radianes.



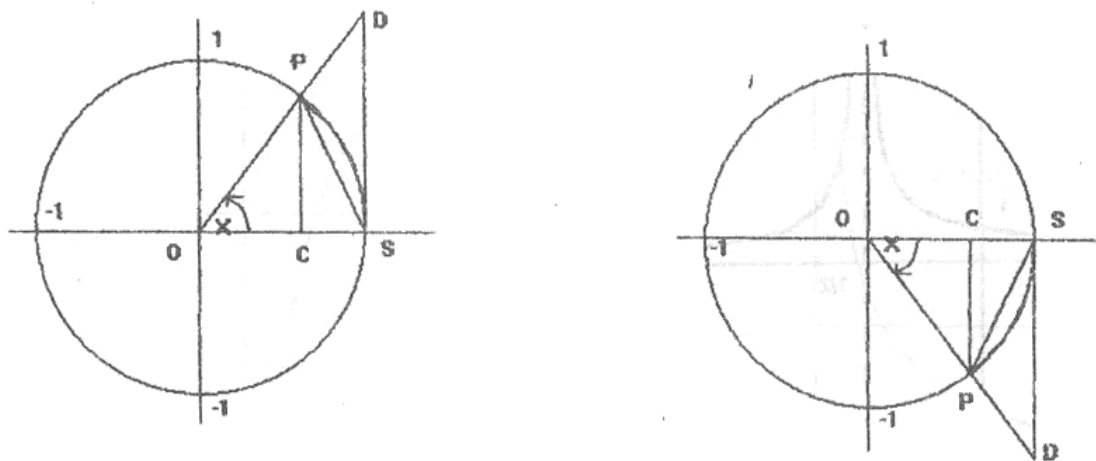


Figura ♡

Por otra parte, pensando en la definición de las funciones trigonométricas usando un triángulo rectángulo, se tiene que<sup>4</sup>

$$\tan x = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{DS}}{\overline{OS}}$$

De esta forma, las coordenadas del punto  $D$  son  $(1, \tan(x))$

Por el hecho que la circunferencia tiene radio 1 y el ángulo  $x$  está dado en radianes, se tiene que el arco de circunferencia de  $P$  a  $S$ ,  $\widehat{PS}$  es la longitud  $x$ .

Nota: en la figura el ángulo  $x$  satisface  $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ , pero claramente se puede ver que si  $x$  es negativo y mayor que  $-\frac{\pi}{2}$ , sólo hay que tener cuidado con el signo en las relaciones que a continuación damos para  $x$ ,  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ .

$$\begin{aligned} \widehat{PS} &= |x| \\ \overline{PC} &= |\sin(x)| \\ |\sin(x)| &\leq |x| \quad \text{ya que } \overline{PC} \leq \widehat{PS} \end{aligned}$$

Por lo tanto, para  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  se tiene la desigualdad

$$-|x| \leq \sin(x) \leq |x| \tag{4.5}$$

**Ejemplo 263** Por lo anterior se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ .

En efecto: Como

$$-|x| \leq \sin x \leq |x| \quad , \quad x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

y  $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ . entonces por teorema del acotamiento se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$$

También usando la figura ♡ se puede ver que cuando  $x$  tiende al ángulo cero, la hipotenusa del triángulo  $OCP$ ,  $\overline{OP}$  tiende al cateto adyacente  $\overline{OC}$ , del mismo triángulo, pero como  $\overline{OP}$  es siempre igual a 1 y  $\overline{OC} = \cos(x)$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1,$$

límite que justificaremos de otra forma mas adelante.

<sup>4</sup>Notación  $\overline{AB}$  indica la distancia entre  $A$  y  $B$  o longitud del trazo de recta de  $A$  a  $B$ .

**Ejemplo 264** Probemos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

Para resolver esto utilizaremos una relación existente entre dos áreas de la figura ♡

$$\text{área de sector circular OSP} \leq \text{área del triángulo OSD}$$

Calculando cada área<sup>5</sup> se tiene

$$\frac{x}{2} \leq \frac{1}{2} \tan(x) \quad , \quad \text{si } x \text{ positivo}$$

Multiplicando esta última desigualdad a ambos lados por el número positivo  $\frac{2 \cos(x)}{x}$  obtenemos

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

Utilizando el hecho que  $\cos(x)$  es una función par ( $\cos(x) = \cos(-x)$ ) y como  $\operatorname{sen}(x) \leq x$ , podemos fabricar la siguiente cadena apropiada para utilizar el teorema del acotamiento

$$\cos(x) \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq 1$$

desigualdad válida para  $x \neq 0$  y  $x \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$  (ya que la función  $\operatorname{sen}(x)$  y  $x$  son funciones impares y su cociente es par).

De esta forma por teorema 4.11 y utilizando que  $\cos(x) \rightarrow 1$  cuando  $x \rightarrow 0$  obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$$

**Ejercicio 265** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{3x + 4 \operatorname{sen} x}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{3x + 4 \operatorname{sen} x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - 2x}{3x + 4 \operatorname{sen} x} \cdot \frac{1/x}{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 2}{3 + 4 \frac{\operatorname{sen} x}{x}} \end{aligned}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3 + 4 \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 3 + 4 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 3 + 4 = 7 \neq 0.$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} - 2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} 2 = 1 - 2 = -1.$$

entonces por algebra de límites  $L = \frac{-1}{7}$ .

**Ejemplo 266** Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \operatorname{sen} \frac{a}{x}$  donde  $a \in \mathbb{R}$ .

**Solución:** Sabemos que

$$\left| \operatorname{sen} \frac{a}{x} \right| \leq 1 \tag{4.6}$$

Multiplicando por  $|x|$  la ecuación 4.6 obtenemos

$$\left| x \operatorname{sen} \frac{a}{x} \right| \leq |x| \tag{4.7}$$

---

<sup>5</sup>recuerde que  $x$  está en radianes.

Así,

$$-|x| \leq x \operatorname{sen}\left(\frac{a}{x}\right) \leq |x|.$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 0} -|x| = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  entonces por teorema del acotamiento se tiene  $\lim_{x \rightarrow 0^+} |x \operatorname{sen} \frac{a}{x}| = 0$

Este último caso se puede generalizar a funciones acotadas.

Recordemos que una función  $f$  se dice **acotada** en  $A$  si existe  $k \in \mathbb{R}^+$  tal que:

$$|f(x)| \leq k$$

**Teorema 4.12 (Cero Aniquila)** Sea  $f$  una función acotada en una vecindad de  $p$ ,  $V_p$  (no necesariamente definida en  $p$ ). Si  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow p} g(x)f(x) = 0$

**Demostración:** Como  $|f(x)| \leq k$  se tiene

$$|g(x)f(x)| \leq k|g(x)|$$

es decir,

$$-k|g(x)| \leq g(x)f(x) \leq k|g(x)|$$

y por teorema de acotamiento se obtiene lo requerido.

**Ejemplo 267** Demostrar

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) \cos \frac{2}{x-1} = 0 \quad (4.8)$$

En efecto  $\lim_{x \rightarrow 1} x-1 = 0$  y la función  $f(x) = \cos\left(\frac{2}{x-1}\right)$  es acotada, luego por teorema cero aniquila, se tiene 4.8.

**Ejercicio 268** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\frac{1}{x-3}}$$

**Solución:**  $L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right)}{\frac{1}{x-3}} = \lim_{x \rightarrow 3} (x-3) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-3}\right).$

Como  $\lim_{x \rightarrow 3} x-3 = 0$  y  $f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x-3}$  es acotada, entonces por teorema cero aniquila  $L = 0$ .

**Ejercicio 269** Demostrar usando el teorema anterior que

$$\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(a)$$

**Solución:** Basta demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a) = 0$ . Usando la identidad trigonométrica

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a = 2 \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

y el hecho que  $\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$  es acotado y  $\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen}\left(\frac{x-a}{2}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \operatorname{sen} u = 0$  donde  $\frac{x-a}{2} = u$ . Se tiene por teorema cero aniquilador que:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} a) = 0$$

En forma análoga se puede probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

**Ejercicio 270** Sean  $a > 0, b > 0$ , Demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left\lceil \frac{b}{x} \right\rceil = \frac{b}{a}$$

Ayuda: Usar la siguiente propiedad de la parte entera

$$x-1 \leq [x] \leq x, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

**Solución:** Por propiedad anterior tenemos

$$\frac{b}{x} - 1 \leq \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{x}$$

multiplicando por  $\frac{x}{a}$  con  $a > 0$ ,  $x > 0$  se tiene

$$\frac{x}{a} \left( \frac{b}{x} - 1 \right) \leq \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{x}{a} \frac{b}{x}$$

o equivalentemente

$$\frac{b}{a} - \frac{x}{a} 1 \leq \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor \leq \frac{b}{a}$$

puesto que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{a} - \frac{x}{a} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$  entonces por teorema de acotamiento

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{a} \left\lfloor \frac{b}{x} \right\rfloor = \frac{b}{a}$$

**Ejercicio 271** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(1/x)}{1/x} = 1$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -4} (x+4)[x] = 0$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} = 0$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$ .
5.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = 0$ .
6. No existe  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$ .
7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x \text{sen}(1/x) + \frac{\cos(x)}{x})$  no existe.
8. Si  $\lim_{x \rightarrow a} fg$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} f$  existe entonces  $\lim_{x \rightarrow a} g$  existe.
9. Si  $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} f$  no existe entonces  $\lim_{x \rightarrow a} g$  existe.

**Solución:**

1. **Falso.** Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(1/x)}{1/x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}(1/x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  y  $f(x) = \text{sen}(1/x)$  es acotada entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} x \text{sen}(1/x) = 0$  por teorema cero aniquila.
2. **Verdadero.** La función  $f(x) = [x]$  es acotada en una vecindad del  $-4$ , es decir,

$$-5 \leq [x] \leq -4 \quad \text{for all } x \in ]-5, -3[$$

y  $\lim_{x \rightarrow -4} (x+4) = 0$  luego por teorema cero aniquila

$$\lim_{x \rightarrow -4} (x+4)[x] = 0.$$

3. **Verdadero.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\text{sen } x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\text{sen}(x))/x} = \frac{1}{1} = 1$ .
4. **Falso.**  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \frac{\text{sen}(\pi)}{\pi} = 0$
5. **Verdadero.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{0}{\cos(0)} = 0$

6. **Verdadero.** Supondremos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x}$  existe y su valor es  $L$ . Dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} x$  existe por algebra de límites  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} x$  debe existir pero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} x = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

y por algebra de límites

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{x} \lim_{x \rightarrow 0} x = L \cdot 0 = 0$$

lo cual es una contradicción por la unicidad del límite. Por lo tanto el valor  $L$  no existe.

7. **Verdadero.**<sup>6</sup> Sabemos por (1) que;  $\lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sen}(1/x)$  existe (y su valor es cero) y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{x}$  no existe por (6)

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{sen} 1/x + \frac{\cos x}{x}) \quad \text{no existe.}$$

ya que de existir también debería existir (por límite de la suma)

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x \operatorname{sen} 1/x + \frac{\cos x}{x} - x \operatorname{sen}(1/x))$$

y esto último es falso por (6).

8. **Falso.** Sean  $f(x) = \operatorname{sen} x$ ,  $g(x) = \frac{1}{x}$ ,  
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)g(x)$  existe y su valor es 1, además  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe y su valor es cero, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  no existe.
9. **Falso.** Sean  $f(x) = \frac{1}{x}$  y  $g(x) = -\frac{1}{x}$  luego  $\lim_{x \rightarrow 0} (f+g)$  existe y su valor es cero, pero  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  no existe y  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x}$  no existe.

#### 4.2.2 Límite de funciones - sucesiones

El siguiente teorema nos permite usar los resultados obtenidos en sucesiones

**Ejemplo 272** Sea  $f(x) = x$ , la función identidad en  $\mathbb{R}$ . Se sabe que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = p$ .

Usemos el teorema anterior para probar que :

- a)  $\lim_{x \rightarrow p} x^2 = p^2$ .  
 b)  $\lim_{x \rightarrow p} \alpha \cdot x^k = \alpha \cdot p^k$  donde  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  
 c)  $\lim_{x \rightarrow p} q(x) = q(p)$ , donde  $q(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots + \alpha_n x^n$

**Solución:** a) Como  $x^2 = f(x)f(x)$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow p} x^2 = \lim_{x \rightarrow p} f(x) \lim_{x \rightarrow p} f(x) = p \cdot p = p^2.$$

Así,  $\lim_{x \rightarrow p} x^2 = p^2$

b) Esta se hará usando inducción en  $k$ .

Para  $k = 1$  es cierto ya que  $\lim_{x \rightarrow p} \alpha x = \lim_{x \rightarrow p} \alpha \lim_{x \rightarrow p} x = \alpha \cdot p$

Supondremos ahora que es válido para  $k$  y demostraremos que es válido para  $k + 1$

$$\lim_{x \rightarrow p} \alpha x^{k+1} = \lim_{x \rightarrow p} (\alpha x^k) x = \lim_{x \rightarrow p} (\alpha x^k) \lim_{x \rightarrow p} x = \alpha p^k p = \alpha p^{k+1}.$$

c) La tercera también se hará por inducción en  $k$

Para  $k = 1$ , se tiene  $\lim_{x \rightarrow p} \alpha_0 + \alpha_1 x = \alpha_0 + \alpha_1 p$ . Así por algebra se cumple para  $k = 1$ .

<sup>6</sup>Se verá en términos más generales en ejercicio 277.

Supongamos que el límite es válido para  $n = k$  demostraremos que es válido para  $k + 1$ . Usando algebra de límites se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow p} \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k + \alpha_{k+1} x^{k+1} = \lim_{x \rightarrow p} \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k + \lim_{x \rightarrow p} \alpha_{k+1} x^{k+1}$$

La existencia de este límite se garantiza por la hipótesis inductiva

$$\lim_{x \rightarrow p} \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k = \alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_k p^k$$

además por ejercicio anterior

$$\lim_{x \rightarrow p} \alpha_{k+1} x^{k+1} = \alpha_{k+1} p^{k+1}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow p} \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k + \alpha_{k+1} x^{k+1} = \alpha_0 + \alpha_1 p + \cdots + \alpha_k p^k + \alpha_{k+1} p^{k+1}$$

Por consiguiente

$$\lim_{x \rightarrow p} q(x) = q(p)$$

.

**Ejercicio 273** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1}.$$

**Solución:** Como  $\lim_{x \rightarrow 2} x + 1 = 3 \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x + 1 = 11$ , entonces por algebra de límites (c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x + 1}{x + 1} &= \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 3x + 1}{\lim_{x \rightarrow 2} x + 1} \\ &= \frac{11}{3} \end{aligned}$$

**Observación:** Notar que no se puede aplicar el algebra de límites. Si  $x$  tiende a  $-1$ .

En los siguientes ejercicios tampoco podemos usar el algebra de límites directamente, pero eso no significa que el límite no existe, como se verá a continuación.

**Ejercicio 274** Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow p} \sqrt{q(x)} = \sqrt{q(p)}$ , si  $q(p) > 0$ .

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x + 1}}{x^2 - 16}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} L = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x + 1}}{x^2 - 16} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{2x + 1}}{x^2 - 16} \cdot \frac{3 + \sqrt{2x + 1}}{3 + \sqrt{2x + 1}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{9 - (2x + 1)}{(x^2 - 16)(3 + \sqrt{2x + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2(4 - x)}{(x - 4)(x + 4)(3 + \sqrt{2x + 1})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{-2}{(x + 4)(3 + \sqrt{2x + 1})}. \end{aligned}$$

Dado que  $\lim_{x \rightarrow 4} -2 = -2$  y  $\lim_{x \rightarrow 4} (x + 4) = 8$ .

$$\lim_{x \rightarrow 4} 3 + \sqrt{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 4} 3 + \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{2x + 1} = 3 + 3 = 6,$$

entonces por algebra de límites se tiene

$$L = \frac{\lim_{x \rightarrow 4} -2}{\lim_{x \rightarrow 4} (x+4) \cdot \lim_{x \rightarrow 4} (3 + \sqrt{2x+1})} = \frac{-2}{8 \cdot 6} = \frac{-1}{24}$$

**Observación:** Se probará en la sección de continuidad que si  $n \in \mathbb{N}$ ,  $q(p) > 0$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow p} \sqrt[n]{q(x)} = \sqrt[n]{q(p)}$$

**Ejercicio 275** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+a)^2} - \sqrt[3]{a^2}}{x}, \quad \text{si } a \neq 0.$$

**Solución:** Recordemos que  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ .

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+a)^2} - \sqrt[3]{a^2}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{(x+a)^2} - \sqrt[3]{a^2}}{x} \cdot \frac{\sqrt[3]{(x+a)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+a)^2} \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}^2}{\sqrt[3]{(x+a)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+a)^2} \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+a)^2 - a^2}{x(\sqrt[3]{(x+a)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+a)^2} \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2ax}{x(\sqrt[3]{(x+a)^4} + \sqrt[3]{(x+a)^2} \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^4})}. \end{aligned}$$

Dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} x + 2a = 2a$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{(x+a)^2}^2 + \sqrt[3]{(x+a)^2} \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{a^2}^2 = 3\sqrt[3]{a^4} \neq 0$ , entonces por algebra de límites se tiene

$$L = \frac{2a}{3\sqrt[3]{a^4}}$$

**Ejercicio 276** Determinar  $a \in \mathbb{R}$  de modo que exista  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} & x > 2 \\ ax+1 & x < 2 \end{cases}.$$

**Solución:** Dado que  $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$ . El límite existirá si sólo si

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x\sqrt{x}-\sqrt{8}}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x\sqrt{x}-\sqrt{8})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x\sqrt{2x} - \sqrt{8}\sqrt{x} - \sqrt{16}}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x^2-4) + (x\sqrt{2x} - 2\sqrt{2x})}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2) + (x-2)(\sqrt{2x})}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(x+2+\sqrt{2x})}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 2 + \sqrt{2x}. \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} x = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} 2 = 2$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{2x} = \sqrt{2 \cdot 2} = 2$ , entonces por algebra de límite se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 + 2 + 2 = 6.$$

Por otra parte  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} ax + 1 = 2a + 1$ , luego  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$  existe si y sólo si  $2a + 1 = 6$ , de donde  $a = \frac{5}{2}$ .

**Ejercicio 277** Demuestre que;

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  no existe entonces  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$  no existe.

**Solución:** Por método del absurdo

$$(\tilde{p} \Rightarrow q) \text{ si y sólo si } (p \wedge \tilde{q})$$

Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)$  existe, luego por algebra de límites, dado que  $\lim_{x \rightarrow a} f$  existe entonces  $\lim_{x \rightarrow a} (f + g) - f$  existe, pero  $f + g - f = g$  lo que contradice la no existencia de  $\lim_{x \rightarrow a} g$ .

**Ejercicio 278** Demuestre que los siguientes límites no existe.

1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} (x + \frac{1}{x})$ .

**Solución:**

**Ejercicio 279** 1. Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  existe y su valor es  $L$ . Dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} x$  existe, entonces por algebra de límites, existe el límite del producto, es decir,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot x$  existe

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x = L \cdot 0 = 0.$$

Por otra parte

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1,$$

luego por unicidad del límites se tiene que  $0 = 1$  lo que es una contradicción.

2. Como  $\lim_{x \rightarrow 0} x$  existe y  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$  no existe, entonces por ejercicio 277 se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} x + \frac{1}{x} \text{ no existe}$$

**Observación:** En general, se puede demostrar por el método del absurdo que:

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \neq 0$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  no existe. En este caso se dice que el límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  "es de la forma  $\frac{c}{0}$ "

**Ejemplo 280** Los siguientes límites son de la "forma  $\frac{c}{0}$ "

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x + 2|}{x - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}, \quad \lim_{x \rightarrow 3/2} \frac{[x]}{3 - 2x}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos^2 x}{x - 1}$$

luego los límites no existe.

**Ejemplo 281** Consideremos la función

$$f(h) = \frac{a^2 + a + 3ah^2 - 2}{h^2}$$

Determinemos para qué valor de  $a \in \mathbb{R}$ , el límite  $\lim_{h \rightarrow 0} f(h)$  existe.



Dado que  $\lim_{h \rightarrow 0} h^2 = 0$ , entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + a + 3ah^2 - 2}{h^2}$  puede existir si<sup>7</sup>  $\lim_{h \rightarrow 0} a^2 + a + 3ah^2 - 2 = 0$  (si  $\lim_{h \rightarrow 0} a^2 + a + 3ah^2 - 2 \neq 0$  entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + a + 3ah^2 - 2}{h^2}$  no existe).

Ahora;

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} a^2 + a + 3ah^2 - 2 = 0 &\iff a^2 + a - 2 = 0 \\ &\iff (a + 2)(a - 1) = 0 \\ &\iff a = -2 \vee a = 1 \end{aligned}$$

Si  $a = -2$  entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + a + 3ah^2 - 2}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h^2}{h^2} = -6$ .

Si  $a = 1$  entonces  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + a + 3ah^2 - 2}{h^2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-3h^2}{h^2} = -3$ .

Por lo tanto  $\lim_{h \rightarrow 0} \lim \frac{a^2 + a + 3ah^2 - 2}{h^2}$  existe si  $a \in \{-2, 1\}$ .

**Ejemplo 282** Mostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ , si  $a \geq 0$ .

**Solución:** Si  $a > 0$  basta probar que  $\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{x} - \sqrt{a}) = 0$  pero

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - \sqrt{a} &= \sqrt{x} - \sqrt{a} \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{a}}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}}(x - a) \end{aligned}$$

y

$$0 < \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} < \frac{1}{\sqrt{a}}$$

y ya que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  por teorema cero Aniquila

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} - \sqrt{a} = 0$$

### 4.2.3 Teorema de Sustitución

**Teorema 4.13 (Sustitución)** Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $f(X) \subset Y$ .

Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  y que existe una vecindad de  $p$ ,  $V_p$  tal que  $f(x) \neq b$  para todo  $x \in V_p - \{p\} \subset X$ .

Si  $\lim_{u \rightarrow b} g(u) = L$  entonces  $\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = L$ .

es decir;

$$\lim_{x \rightarrow p} g(f(x)) = \lim_{u \rightarrow b} g(u) = L.$$

**Ejemplo 283** Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen}(x - \pi)}{x - \pi}$$

**Solución:** Consideremos la sustitución o cambio de variable  $u = x - \pi$ . Es claro que  $\lim_{x \rightarrow \pi} x - \pi = 0$ , es decir, si  $x \rightarrow \pi$  entonces  $u \rightarrow 0$ , de donde  $x - \pi \neq 0$  en  $V_\pi - \{\pi\}$ , luego por teorema de sustitución (dado que  $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 1$ ), se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\text{sen}(x - \pi)}{x - \pi} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen } u}{u} = 1$$

**Ejemplo 284** Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\text{sen}(4x)}$$

---

<sup>7</sup>Condición necesaria pero no suficiente.

**Solución:** Sea  $u = 4x$ . Si  $x \rightarrow 0$  entonces  $u \rightarrow 0$ , (además  $4x \neq 0$  para  $x$  en una vecindad del cero sin tomar el cero) entonces,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 4x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3}{4} \frac{u}{\sin u} = \frac{3}{4} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin u}{u}} = \frac{3}{4} \frac{\lim_{u \rightarrow 0} 1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u}} = \frac{3}{4}.$$

por teorema de sustitución, así

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin(4x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{3}{4} \frac{u}{\sin u} = \frac{3}{4}$$

**Corolario 4.14** Sean  $X, Y \subset \mathbb{R}$  y  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  y  $f(X) \subset Y$ .

Sea  $p \in X' \wedge b \in Y \cap Y' \wedge \lim_{x \rightarrow p} f(x) = b \wedge \lim_{x \rightarrow b} g(x) = g(b)$  entonces  $\lim_{x \rightarrow p} (g \circ f)(x) = g(b)$ .

**Demostración:** Sea  $g(b) = c$

$$\begin{array}{ccccc} X & \rightarrow & f(X) \subset Y & \rightarrow & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & b & \mapsto & g(b) \end{array}$$

Para una vecindad de  $c$ ,  $V_c$ , puesto que  $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$ , existe una vecindad de  $b$ ,  $V_b$ , tal que  $g(V_b - \{b\}) \subset V_c$ .

Por otra parte, como  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = b$  para la vecindad  $V_b$  existe una vecindad de  $p$  tal que  $f(V_p - \{p\}) \subset V_b$ .

Por lo tanto  $g(f(V_p - \{p\})) \subset g(V_b)$ .

Así, para una vecindad  $V_c$ , existe una vecindad de  $p$ ,  $V_p$  tal que  $(g \circ f)(V_p - \{p\}) \subset V_{g(b)}$ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow p} (g \circ f)(x) = g(b).$$

□

Este teorema se utiliza en lo que se suele llamar cambio de variable o sustitución

### Ejemplo 285

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2, \quad (4.9)$$

puesto que: Si tomamos  $g(x) = \sqrt{x}$  y  $f(x) = x^2 + 4$  y dado que  $\lim_{x \rightarrow 4} g(x) = \lim_{x \rightarrow 4} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 4 = 4$ , entonces por el corolario anterior se tiene 4.9

**Ejemplo 286** Sabiendo que  $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$ .

Probemos que si existe  $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow b} e^{f(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow b} f(x)}$$

**Solución:** Sea  $g(x) = e^x$  como  $(g \circ f)(x) = e^{f(x)}$  y puesto que  $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow b} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \rightarrow b} f(x)) = e^{\lim_{x \rightarrow b} f(x)}$ .

Así tenemos por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}} = e^{1/3}$$

En efecto. Sea  $u = \sqrt[3]{x}$ . Si  $x \rightarrow 1$  entonces  $u \rightarrow 1$  y

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u-1}{u^3-1} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{u-1}{(u-1)(u^2+u+1)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1}{u^2+u+1} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Luego

$$\lim_{x \rightarrow 1} e^{\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}} = e^{1/3}.$$

Para aplicar el teorema anterior, debemos asegurarnos que se cumplan la hipótesis. De no hacerlo podemos obtener contradicciones.

**Ejemplo 287** Sea  $a \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \rightarrow a} [x] \neq [\lim_{x \rightarrow a} x]$$

En efecto; Sabemos que  $\lim_{x \rightarrow a} [x]$  no existe pues los límites laterales son distintos

$$\lim_{x \rightarrow a^+} [x] = a \quad , \quad \lim_{x \rightarrow a^-} [x] = a - 1$$

Sin embargo; dado que  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ , entonces se tiene  $[\lim_{x \rightarrow a} x] = [a] = a$ .

**Observación:** Notemos que. Si  $a \notin \mathbb{Z}$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} [x] = [\lim_{x \rightarrow a} x]$ .

**Ejercicio 288** Probar que si  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

**Solución:** Supongamos que  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow a} -|f(x)| = 0$  además  $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$  y por teorema de acotamiento tenemos que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

**Ejercicio 289** Calcular los siguientes límites

$$\begin{aligned} a) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \\ b) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-2x}}{x} \\ c) \quad & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-2x}}{x} \end{aligned}$$

**Solución:** a)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x^2 - 1}{x(\sqrt{1+x^2} + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1+x^2} + 1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Sea  $u^3 = 1 - 2x$ . Si  $x \rightarrow 0$  entonces  $u \rightarrow 1$  luego,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{1-2x}}{x} &= \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - u}{(1 - u^3)/2} \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - u}{(1 - u)(1 + u + u^2)} \\ &= 2 \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1}{1 + u + u^2} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt[3]{1-2x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 + 1 - \sqrt[3]{1-2x}}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} + \frac{1 - \sqrt[3]{1-2x}}{x} \\
&= 0 + \frac{2}{3} \\
&= \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

Es necesario recordar, para el cálculo de límite trigonométricos algunas identidades.

1.  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
2.  $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$
3.  $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$
4.  $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$
5.  $\sin(x-y) = \sin x \cos y - \sin y \cos x$
6.  $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
7.  $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
8.  $\sin x - \sin y = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$
9.  $\cos x - \cos y = 2 \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$

**Ejemplo 290** *Demostrar usando el teorema anterior que*

$$\lim_{x \rightarrow a} \sin(x) = \sin(a)$$

**Solución:** Basta demostrar que  $\lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a) = 0$ . Pero usando la identidad trigonométrica

$$\sin x - \sin a = 2 \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) \cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$$

y el hecho que  $\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)$  es acotado y  $\lim_{x \rightarrow a} \sin\left(\frac{x-a}{2}\right) = \lim_{u \rightarrow 0} \sin u = 0$  donde  $\frac{x-a}{2} = u$ . Se tiene por teorema cero aniquilador que:

$$\lim_{x \rightarrow a} (\sin x - \sin a) = 0$$

En forma análoga se puede probar que

$$\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$$

**Ejemplo 291** *Usando algebra de límite y identidades trigonométricas calcular el límite de la siguiente función en a*

$$f(x) = \tan x, \quad a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in \mathbb{N}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow a} \tan(x) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow a} \operatorname{sen}(x)}{\lim_{x \rightarrow a} \cos(x)} \\ &= \frac{\operatorname{sen}(a)}{\cos(a)} \\ &= \tan(a)\end{aligned}$$

**Ejemplo 292** Calcular, usando el teorema de cambio de variable, que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = 1$$

**Solución:** En una vecindad de 0 se tiene la identidad

$$\cos(x) = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$$

Tomando  $u = 1 - \operatorname{sen}^2(x)$ , cuando  $x$  tiende a 0,  $u$  tiende a 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \lim_{u \rightarrow 1} \sqrt{u} = \sqrt{1} = 1$$

ya que  $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ .

**Ejercicio 293** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{\sqrt{5x+6}-4}$$

**Solución:** Sea  $u = x - 2$ . Si  $x \rightarrow 2$  entonces  $u \rightarrow 0$  (donde  $x - 2 \neq 0$  en  $V_2 - \{2\}$ ).

Luego por teorema de sustitución

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{tg}(x-2)}{\sqrt{5x+6}-4} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(u)}{\sqrt{5u+16}-4}$$

de donde

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(u)}{\sqrt{5u+16}-4} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{\cos u} \cdot \frac{\sqrt{5u+16}+4}{(5u+16)-16} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{5u} \frac{\sqrt{5u+16}+4}{\cos u} \\ &= \frac{1}{5} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} u}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{5u+16}+4}{\cos u} \\ &= 1 \cdot \frac{8}{5}.\end{aligned}$$

**Observación:** En el cálculo de límites ( $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ) que involucre funciones trigonométricas, lo habitual es hacer el cambio de variable  $u = x - a$  o  $u = a - x$ .

**Ejemplo 294** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{3\pi}{2} - 3x \right) \tan x$$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{3\pi}{2} - 3x \right) \tan x = 3 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x$$

Sea  $u = \frac{\pi}{2} - x$  si  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$  entonces  $u \rightarrow 0$  luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{3\pi}{2} - 3x \right) \tan x &= 3 \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \tan x \\
&= 3 \lim_{u \rightarrow 0} u \left( \frac{\sin(\pi/2 - u)}{\cos(\pi/2 - u)} \right) \\
&= 3 \lim_{u \rightarrow 0} u \left( \frac{\cos u}{\sin u} \right) \\
&= 3 \lim_{u \rightarrow 0} \cos u \left( \frac{u}{\sin u} \right) \\
&= 3 \lim_{u \rightarrow 0} \cos u \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{u}{\sin u} \right) \\
&= 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3
\end{aligned}$$

**Ejemplo 295** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - 2 \cos(x-1)}{(x-1)^2}$$

**Solución:** Sea  $u = x - 1$  si  $x \rightarrow 1$  entonces  $u \rightarrow 0$  luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1} 2 \left( \frac{1 - \cos(x-1)}{(x-1)^2} \right) &= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{1 - \cos u}{u^2} \right) \\
&= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\sin^2 u}{u^2(1 + \cos u)} \right) \\
&= 2 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos u} \lim_{u \rightarrow 0} \left( \frac{\sin u}{u} \right)^2 \\
&= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

**Ejercicio 296** Calcular (si existe)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Si

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)} & 1 < x < 2 \\ \frac{\arcsin(x/\sqrt{2})}{x} & -\sqrt{2} < x < 1 \wedge x \neq 0 \end{cases}$$

**Solución:**

a) Como  $f$  está definida en una vecindad de 1, podemos calcular los límites laterales.

i)

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x^2}{\sin(\pi x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x)(1+x)}{\sin(\pi x)}$$

Sea  $u = 1 - x$  si  $x \rightarrow 1^+$  entonces  $u \rightarrow 0^-$  (pues  $1 - x < 0$ )

$$\begin{aligned}
L_1 &= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{u(2-u)}{\sin(\pi(1-u))} \\
&= \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{u}{\sin(\pi u)} (2-u) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\pi u}{\sin(\pi u)} (2-u) \\
&= \frac{1}{\pi} \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\pi u}{\sin(\pi u)} \lim_{u \rightarrow 0^-} (2-u)
\end{aligned}$$

ya que  $\lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{\pi u}{\sin(\pi u)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{t}{\sin(t)} = 1$  se tiene que límite anterior es

$$L_1 = \frac{1}{\pi} \cdot 1 \cdot 2 = \frac{2}{\pi}$$

ii) Por otra parte,

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\arcsen(x/\sqrt{2})}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1^-} \arcsen(x/\sqrt{2})}{\lim_{x \rightarrow 1^-} x} = \arcsen\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Por (i) y (ii)  $L_1 \neq L_2$  luego no existe  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

b)  $f$  está definida en una vecindad perforada del cero

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen(x/\sqrt{2})}{x}$$

Sea  $u = \arcsen(x/\sqrt{2})$  entonces<sup>8</sup>  $\sen(u) = \frac{x}{\sqrt{2}}$  luego  $x = \sqrt{2} \sen(u)$

Si  $x \rightarrow 0$  entonces  $u \rightarrow 0$  Así

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sqrt{2} \sen(u)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\sen(u)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1. \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Ejercicio 297** Pruebe que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tg x - \tg a}{x - a}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tg x - \tg a}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sen x}{\cos x} - \frac{\sen a}{\cos a}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\sen x \cos a - \sen a \cos x}{\cos x \cos a}}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sen(x - a)}{\cos x \cos a (x - a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sen(x - a)}{(x - a)} \cdot \frac{1}{\cos x \cos a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sen(x - a)}{(x - a)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{\cos x \cos a} \\ &= 1 \cdot \frac{1}{\cos^2 a} \\ &= \sec^2 a \end{aligned}$$

**Teorema 4.15 (del Enlace)** Sea  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  función  $p \in X'$  Entonces tenemos la siguiente equivalencia

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \iff \text{Para toda sucesión } (x_n)_{n=1}^{\infty} \text{ con } x_n \neq p \text{ y } x_n \rightarrow p \\ \text{se tiene que } \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

<sup>8</sup> Aquí se toma  $u = \arcsen(\frac{x}{\sqrt{2}})$  como una función que tiene inversa en una vecindad de cero para  $u$  como para  $x$ .

**Demostración:** ( $\Rightarrow$ ) Sea  $(x_n)$  sucesión con  $x_n \neq p$  y  $x_n \rightarrow p$ . Por demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$ .

Basta tomar el conjunto  $B \subset X$ ,  $B = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Como  $x_n \rightarrow p$  se tiene que  $p \in B'$  y usando el teorema 4.7 se tiene  $\lim_{x \rightarrow p} f|_B = L$ , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$$

( $\Leftarrow$ ) Demostración por el absurdo, es decir, supondremos que para todo  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  que satisface la hipótesis se tiene que

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L$  y **no** se tiene  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$ .

Por esto último, existe una vecindad de  $L$ ,  $V_{L, \varepsilon}$  tal que para toda  $V_{p, \delta}$  (esto es lo mismo que decir para todo  $\delta$ ) se tiene que  $\sim [f(V_{p, \delta} - \{p\}) \subset V_{L, \varepsilon}]$ , es decir, para cada  $\delta_n = \frac{1}{n}$  existe al menos un punto  $x_n \in V_{p, \delta_n} - \{p\}$  tal que  $f(x_n) \notin V_{L, \varepsilon}$ .

Así, hemos fabricado una sucesión  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ . Como  $\delta_n \rightarrow 0$ ,  $x_n \rightarrow p$  y además  $f(x_n) \not\rightarrow L$  (ya que  $f(x_n)$  está al menos  $\varepsilon$  lejos de  $L$  puesto que  $f(x_n) \notin V_{L, \varepsilon}$ ) lo que contradice el hecho "toda sucesión" de las pedidas; luego  $f(x_n) \rightarrow L$ .  $\square$

**Ejemplo 298** *Calculemos*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n}$$

Consideremos  $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}$  y sea  $x_n = \frac{1}{n}$ ,  $x_n \neq 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

Si  $n \rightarrow \infty$  entonces  $x_n \rightarrow 0$  y por teorema de enlace se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \operatorname{sen} x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = 1$ .

**Ejercicio 299** *Probar*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n}{5n^3 + 3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{5}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 2n}{5n^3 + 3} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2}{5n^3 + 3} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{5} \cdot 1 \\ &= \frac{1}{5}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 300** *Usando el hecho que  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ . Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n$*

**Solución:** Como  $(1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2})^n = ((1 + \frac{1}{n})^2)^n = ((1 + \frac{1}{n})^n)^2$  y  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ , usando teorema del enlace se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = e^2$  donde  $x_n = (1 + \frac{1}{n})^n$

**Ejemplo 301** *Suponiendo que  $\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln a$ ,  $a > 0$  Calcule*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}\right)$$

**Solución:** Si  $y_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i!}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = e$  usando teorema del enlace

$$\lim \ln y_n = \ln e = 1$$



**Ejemplo 302** Suponiendo que  $\lim_{x \rightarrow a} e^x = e^a$  Calculemos

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\sqrt{n+1}}}{e^{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}$$

**Solución:** Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = 0$  obtenemos por teorema del enlace  $L = e^0 = 1$

Del teorema anterior, se obtiene una herramienta muy útil para probar la no existencia de algunos límites.

**Corolario 4.16** Sea  $X \subset \mathbb{R}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  función  $p \in X'$ .

Si existen  $(x_n)$ ,  $(y_n)$  dos sucesiones tales  $x_n \neq p$ ,  $y_n \neq p$ ,  $x_n \rightarrow p$ ,  $y_n \rightarrow p$  pero

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = L_1 \text{ y } \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = L_2 \text{ con } L_1 \neq L_2$$

o algunos de ellos no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  no existe.

**Demostración:** (aplicar  $p \Rightarrow q \iff \bar{q} \Rightarrow \bar{p}$ ).

**Ejemplo 303** Probemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$  no existe.

Consideremos  $x_n = \frac{1}{\pi + 2n\pi}$ ,  $y_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ .

Claramente  $x_n \rightarrow 0$ ,  $y_n \rightarrow 0$  donde  $x_n \neq 0$ ,  $y_n \neq 0$ .

Sea  $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$ . Luego  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi = 0$ , y  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = 1$ .

Por lo tanto, por corolario anterior  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(\frac{1}{x})$  no existe.

## 4.3 Continuidad

**Definición 4.17** Sea  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $p \in A$ , diremos que  $f$  es continua en el punto  $p$  si para toda vecindad de  $f(p)$ ,  $V_{f(p), \varepsilon}$  existe una vecindad de  $p$ ,  $V_{p, \delta}$  tal que

$$f(V_{p, \delta}) \subset {}^9V_{f(p), \varepsilon}$$

Diremos que  $f$  es **continua** en  $A$  si  $f$  es continua en cada punto  $p \in A$ .

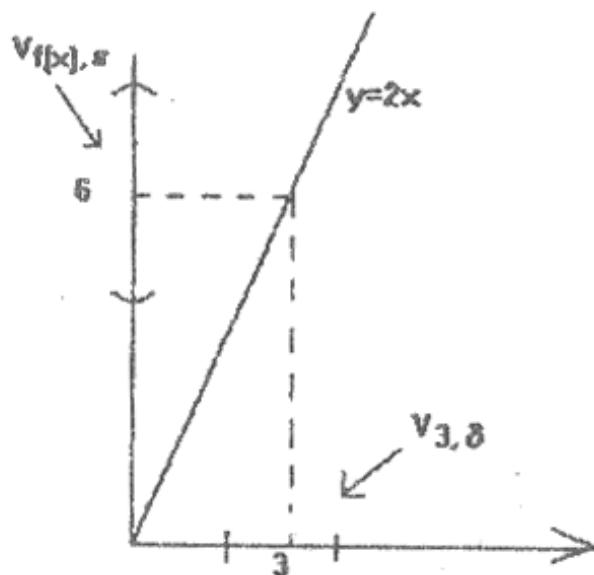
**Ejemplo 304**  $f(x) = 2x$  es continua en  $p = 3$  puesto que:

Una vecindad arbitraria de  $f(3)$  es del tipo :

$$V_{f(3), \varepsilon} = ]f(3) - \varepsilon, f(3) + \varepsilon[ = ]6 - \varepsilon, 6 + \varepsilon[$$

---

<sup>9</sup>Note que no necesariamente  $V_{p, \delta} \subset A = \text{Dom} f$ , lo importante es que los  $x$  que toma la función  $f$ , es decir, los  $x \in V_{p, \delta}$  tengan imagen ella este cercana a  $f(p)$



Si para la vecindad anterior de  $f(3)$ , existiera una vecindad de 3,  $]3 - \epsilon, 3 + \epsilon[$  esta debería cumplir

$$f(]3 - \delta, 3 + \delta[ \subset V_{f(3), \epsilon},$$

es decir,

$$f(]3 - \delta, 3 + \delta[ \subset ]6 - \epsilon, 6 + \epsilon[$$

pero como  $f$  es creciente, tenemos

$$f(]3 - \delta, 3 + \delta[ = ]2(3 - \delta), 2(3 + \delta)[ = ]6 - 2\delta, 6 + 2\delta[$$

Por lo tanto,  $\delta$  debe cumplir

$$]6 - 2\delta, 6 + 2\delta[ \subset ]6 - \epsilon, 6 + \epsilon[$$

Para  $\epsilon$  dado,  $\delta$  debe cumplir

$$6 - \epsilon < 6 - 2\delta \quad \wedge \quad 6 + 2\delta < 6 + \epsilon,$$

es decir,

$$2\delta < \epsilon \quad \wedge \quad 2\delta < \epsilon,$$

Por lo tanto, para la vecindad  $V_{f(3), \epsilon}$  existe al menos una vecindad de 3 ya que basta tomar  $2\delta < \epsilon$  (es decir,  $\delta < \epsilon/2$ ) tal que  $f(V_{3, \delta}) \subset V_{6, \epsilon}$ . Ver figura anterior

**Ejemplo 305** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 2 & x \leq 3 \\ 2.01 & x > 3 \end{cases}$$

Determinar si es continua en  $x = 3$ .

**Solución:** Dada una vecindad de  $f(3)$ ,  $V_{2, \epsilon}$ , debería existir una vecindad de 3,  $V_{3, \delta}$ , ( es decir, existe  $\delta > 0$  ) tal que  $f(V_{3, \delta}) \subset V_{2, \epsilon}$

Lo anterior es equivalente a

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, f(V_{3, \delta}) \subset V_{2, \epsilon}$$

ó

$$f([3 - \delta, 3 + \delta]) \subset ]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[$$

Así, debería ocurrir

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } f(V_{3,\delta}) = \{2, 2.01\} \subset ]2 - \varepsilon, 2 + \varepsilon[,$$

pero para  $\varepsilon = 0.001$  o menor es imposible obtener la inclusión anterior.

Conclusión: Como para todo  $\varepsilon > 0$  no es posible encontrar una vecindad de 3,  $V_{3,\delta}$  tal que  $f(V_{3,\delta}) \subset V_{2,\varepsilon}$  se tiene que  $f$  no es continua en 3.

Se puede ver claramente que  $f$  es continua en los otros puntos

**Ejemplo 306** Sea  $f(x) = 5$ , (función constante).

*Ella es continua en todos los reales.*

**Solución:** Veamos la continuidad en un punto arbitrario  $p$ . Notemos que:

$$\forall \delta > 0 \quad f(V_{p,\delta}) = \{5\}$$

Así,  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, f(V_{p,\delta}) \subset V_{f(p),\varepsilon}$   
ya que

$$f(V_{p,\delta}) = \{5\} \subset ]5 - \varepsilon, 5 + \varepsilon[, \quad \forall \varepsilon > 0$$

### 4.3.1 Equivalencias de Continuidad

A continuación daremos cuatro caracterizaciones de continuidad

1. Si  $p$  es un punto de acumulación de  $A$  y  $p \in A$ .
2. Si  $p$  es un punto de acumulación de  $A$  y  $A$  contiene una vecindad de  $p$ .
3. Si  $p$  no es un punto de acumulación y  $p \in A$ .
4. Caracterización por sucesiones.

1. Si  $p$  es **punto de acumulación** de  $A$  y  $p \in A$  entonces  $f$  es continua en  $p$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = f(p)$

Esta última igualdad dice que

- i)  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  existe
- ii) El límite anterior es igual a  $f(p)$  e implícitamente estamos diciendo que  $f(p)$  existe.

2. Si  $A$  contiene una vecindad de  $p$  (por lo tanto  $p$  es un punto de acumulación) tenemos lo siguiente:

- a)  $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$  existe
  - b)  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$  existe
  - c) los límites anteriores son iguales a  $f(p)$
- $f$  es continua en  $p$  si y sólo si

**Ejemplo 307** Sea  $f(x) = \sqrt{x-1}$  ¿Es continua en 1 ?

**Solución:** Notemos que  $\text{Dom } f = A = [1, \infty[$ , y aquí viene naturalmente la **equivocada** conclusión “ $f$  no es continua en  $p = 1$  ya que  $\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$  no existe”, como se exige en 2c.

**Observación:** No podemos usar la caracterización 2. pues no se cumple la hipótesis de que  $A$  contenga una vecindad de 1.

En cambio, si podemos usar la caracterización 1, pues 1 es un punto de acumulación de  $A$  y  $1 \in A$ , entonces dado que  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1}$  existe y  $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x-1} = \sqrt{1-1} = 0 = f(1)$ . se tiene que  $f$  es continua en 1.

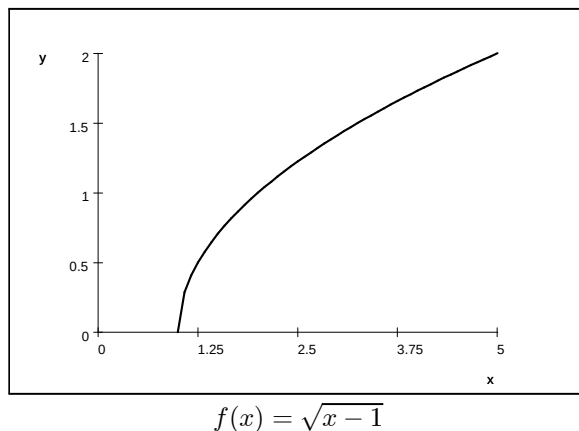
Probemos  $f$  es continua en 1 en términos de vecindades.

Tomemos una vecindad arbitraria de  $f(1) = 0$ ,  $V_{0, \varepsilon}$  necesitamos encontrar una vecindad de 1,  $V_{1, \delta}$ , tal que ocurra:

$$f(V_{1, \delta}) \subset V_{0, \varepsilon} \quad (4.10)$$

Veamos qué condición debe cumplir  $\delta$  para que esta última inclusión sea válida.

Como  $V_{1, \delta} = ]1 - \delta, 1 + \delta[$  y  $f$  es creciente (ver figura)



se tiene que:

$$f(]1 - \delta, 1 + \delta]) = f([1, 1 + \delta]) = [0, \sqrt{\delta}]$$

Así, la inclusión en 4.10 nos queda

$$[0, \sqrt{\delta}] \subset ]-\varepsilon, \varepsilon[$$

Por lo tanto  $\delta$  debe cumplir  $\sqrt{\delta} < \varepsilon$  o equivalentemente  $\delta < \varepsilon^2$ .

Resumiendo. Para toda vecindad  $V_{0, \varepsilon}$  existe una vecindad de 1,  $V_{1, \delta}$  (basta que  $\delta$  sea menor que  $\varepsilon^2$  tal que

$$f(V_{1, \delta}) \subset V_{0, \varepsilon}.$$

Luego  $f$  es continua en  $p = 1$ .

3. Si  $p \in A$  **no es un punto de acumulación** ( $p$  es un punto aislado) se tiene que  $f$  es continua en  $p$ .

**Demostración:** Como  $p$  no es un punto de acumulación, existe una vecindad de  $p$ ,  $V_{p, \delta}$  (es decir, existe  $\delta > 0$ ) tal que

$$V_{p, \delta} \cap A = \{p\}$$

o equivalentemente

$$]p - \delta, p + \delta[ \cap A = \{p\},$$

por lo tanto,  $f(V_{p, \delta}) = f(\{p\}) = \{f(p)\} \subset ]f(p) - \varepsilon, f(p) + \varepsilon[$

La inclusión última ocurre para todo  $\varepsilon > 0$ ; de esta forma tenemos la siguiente afirmación.

Para toda vecindad de  $f(p)$ ,  $V_{f(p), \varepsilon}$ , existe una vecindad de  $p$ ,  $V_{p, \delta}$  (la tomada al inicio) tal que

$$f(V_{p, \delta}) \subset V_{f(p), \varepsilon}$$

Lo que quiere decir que  $f$  es continua en  $p$ .

**Ejemplo 308** Todas las sucesiones  $x_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  son continuas, ya que todo punto de  $\mathbb{N}$  es punto de aislado.

En la práctica, no se encuentran muchos dominios con puntos aislados, pero si aparecen en situaciones especiales y por ese motivo lo hemos desarrollado en detalle aquí, amén que les facilitará el entendimiento del concepto de continuidad en varias variables.

#### 4. Definición tradicional.

$f$  es continua en  $p, p \in \text{Dom} f = A$  si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, |x - p| < \delta \wedge x \in \text{Dom} f \Rightarrow |f(x) - f(p)| < \varepsilon$$

Note que  $|x - p| < \delta$  y  $|f(x) - f(p)| < \varepsilon$  hablan de las vecindades de  $p$  y  $f(p)$  respectivamente y la implicación ( $\Rightarrow$ ) se refiere a la inclusión de conjuntos; la mención explícita de  $x \in \text{Dom} f$  es para que tenga sentido la notación  $f(x)$ .

5. Sea  $f : A \rightarrow \mathbb{R}, p \in A$ .  $f$  es continua en  $p$  si y sólo si

Para toda sucesión<sup>10</sup>  $(x_n)$ , tal que  $x_n$  converge a  $p$  se tiene que la sucesión  $f(x_n)$  converge a  $f(p)$ .

Este criterio es mas útil para probar la no continuidad en un punto que la conyinidad.

Lo anterior se puede escribir como

$$f \text{ es continua en } x = 0 \iff \forall (x_n), x_n \rightarrow p \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(p)$$

Así, la negación es:  $f$  no es continua en  $p$  si y sólo si

$$\exists (x_n), x_n \rightarrow p \wedge f(x_n) \not\rightarrow f(p) \text{ (} f(x) \text{ no converge a } f(p)\text{)}$$

**Ejemplo 309** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

?Es continua en 0 ?

**Solución:** Consideremos la sucesión  $(x_n)$  con  $x_n = \frac{1}{2n\pi}$

Claramente se ve que  $x_n \rightarrow 0$ , pero

$$f(x_n) = \sin\left(\frac{1}{1/2n\pi}\right) = \sin(2n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Así,  $f(x_n)$  no converge a 1

Conclusión:

$f$  no es continua en 0 ya que existe una sucesión  $(x_n)$  con  $x_n \rightarrow 0 \wedge f(x_n) \not\rightarrow f(0) = 1$

También podemos decir que  $f$  no es continua en  $x = 0$  pues  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  no existe (ver ejemplo 303).

<sup>10</sup> Naturalmente la noción debe ser de elementos de  $A$ .

### 4.3.2 Comentarios

#### 1. Comentarios intuitivos<sup>11</sup>

- i)  $f$  es continua en  $p$  si las imágenes de puntos cercanos a  $p$  están cercanos a  $f(p)$  y por muy exigente que se ponga ( $\forall \varepsilon > 0$ ) para pedir estar cerca de  $f(p)$ , siempre hay un montón de puntos cerca de  $p$  que están “super cerca” de  $f(p)$ .
- ii) Una función continua en  $p$  no puede tener un salto en  $p$ , no puede estar cortada en  $p$ .

#### 2. Comentario Redundante

- i) Claramente  $f$  no es continua en un punto  $p$  si  $p \notin \text{Dom} f$
- ii) De la frase “Una función es discontinua en un punto  $p$ ” no se puede concluir que no tiene límite ya que perfectamente la discontinuidad puede deberse a que
  - a)  $p \notin \text{Dom} f$  o a que
  - b)  $f(p) \neq \lim_{x \rightarrow p} f(x)$ .

**Ejemplo 310**  $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ,  $f(1)$  no existe pero  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . Esta función constituye un ejemplo para el caso (a)

**Ejemplo 311**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\text{sen}(x-3)}{x-3} & x \neq 3 \\ 5 & x = 3 \end{cases}$$

En esta función se tiene  $f(3) = 5 \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ . Esta función constituye un ejemplo para el caso (b).

- iii) Si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  no existe, no es continua  $f$  en  $p$ .

La no existencia del límite se puede deber a varios casos, en el ejemplo 312 tenemos el caso en que cada límite lateral existe, pero  $\lim_{x \rightarrow p^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$

**Ejemplo 312**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-9}{x-3} & x > 3 \\ 6 & x = 3 \\ \frac{x^2-6x+9}{x^3-27} & x < 3 \end{cases}$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 6 = f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 0$$

Por lo tanto no es continua en 3

El siguiente teorema es el que sirve para mostrar con claridad las observaciones (comentarios) anteriores

**Teorema 4.18** i) Toda restricción de una función continua es continua.

Dicho de otra forma

Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en el punto  $p \in \mathbb{R}$ . Si  $p \in Y \subset X$  y  $g = f|_Y$  entonces también  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $p$

ii) En el caso especial de que  $Y = I \cap X$ , con  $I$  una vecindad de  $p$  entonces la recíproca se cumple.

Dicho de otra forma.

Sea  $g = f|_Y$  continua en el punto  $p$  (con  $Y = V_{p,\delta} \cap X$  entonces  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $p$

Esta última nos dice que la continuidad en el punto  $p$  depende sólo de los puntos que están cerca, y esto es lo que se suele llamar **concepto local**. Así continuidad es un concepto “local” al igual que límite.

Los siguientes teoremas son útiles por el hecho que nos sirven para fabricar nuevas funciones continuas o para visualizar que una función es continua.

<sup>11</sup>Esto no sirve para nada en las demostraciones, pero sí para visualizar.

<sup>12</sup>Recuerde que  $f|_Y$  es la función restricción de  $X$  a  $Y$

**Teorema 4.19 (Algebra de funciones continuas)** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  continuas cada una en  $p \in X \cap Y$  entonces

- i)  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  son continuas en  $p$
- ii) Si  $g(p) \neq 0$  entonces  $f/g$  es continua en  $p$

En el caso que  $p$  sea un punto de acumulación de  $X \cap Y$ , la demostración se obtiene fácilmente del algebra de límites. En caso contrario es directa.

Con este último teorema tenemos, por ejemplo, que los polinomios

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, \quad \text{con } a_i \text{ constantes reales}$$

son funciones continuas.

Recordando los resultado de límites tenemos que las siguientes funciones son continuas(en todo su dominio)

1.  $\operatorname{sen} x$ .
2.  $\cos x$ .
3.  $\tan x$  si  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4.  $\operatorname{sen} x + 2 \cos x$ .
5.  $3 \cos x + \csc x$ .
6.  $\cot x + 7 \operatorname{sen}(x) \sec x$ .
7.  $\operatorname{sen}^2 x$ .
8.  $\cos^2 x$ .

y muchas otras combinaciones de funciones trigonométricas y polinómicas que sea operaciones algebraicas entre funciones básicas como  $\operatorname{sen}(x)$ ,  $\cos(x)$  y  $ax$ .

**Teorema 4.20 (La compuesta de funciones continuas es continua)** Sean  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $p$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $q = f(p)$  tal que  $f(X) \subset Y$  entonces  $g \circ f : X \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $p$

Este teorema nos ayuda a mostrar que las siguientes funciones son continuas(en todo  $\mathbb{R}$ ).

1.  $\operatorname{sen} x^2$  ya que es la compuesta de  $\operatorname{sen} x$  y  $x^2$
2.  $\cos(3x^5 + 7)$  ya que es la compuesta de  $\cos x$  y  $3x^5 + 7$
3.  $\operatorname{sen}(2 \cos x)$  compuesta de  $\operatorname{sen} x$  con  $2 \cos x$
4.  $3 \operatorname{sen}^2 x^3 + 7 \cos x^3$  compuesta  $3 \operatorname{sen}^2(x) + 7 \cos(x)$ ,  $x^3$

**Ejercicio 313** Consider la función  $f : ]-\infty, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos(1/x) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{x^3}{\operatorname{sen}(x^2)} & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Estudie la continuidad de  $f$ .

**Solución:**

**Ejercicio 314** i) Sea  $x < 0$ , entonces  $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ . Por composición y producto de funciones continua,  $f$  es continua en  $]-\infty, 0[$ .

ii) Sea  $0 < x < 1$ , entonces  $F(x) = \frac{x^3}{\sin(x^2)}$  por composición y cuociente de funciones continua,  $f$  es continua en  $]0, 1[$ .

iii) Veamos la continuidad de  $f$  en  $x = 0$ . Claramente  $0 \in \text{Dom}f$  y  $f(0) = 0$ . Como 0 es punto de acumulación del  $\text{Dom}f$ , debemos ver si existe  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

Para esto, calculemos los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3}{\sin(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{x^2}{\sin x^2} = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cos(1/x) = 0$$

por cero aniquila.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 0$$

es decir,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe además

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$$

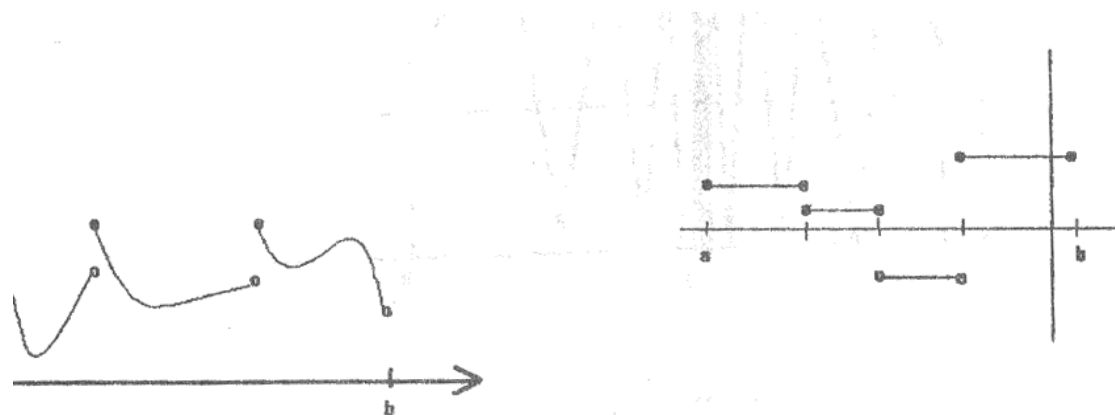
luego  $f$  es continua en  $x = 0$ .

Por consiguiente  $f$  es continua en todo su dominio

### 4.3.3 Funciones continuas sobre compacto

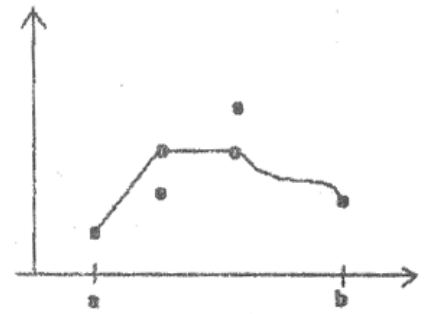
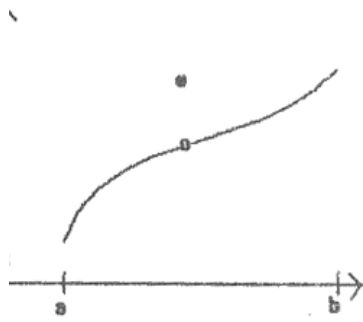
Si  $f$  es una función continua en un intervalo cerrado y acotado (compacto)  $[a, b]$  se debería tener que

1. En **ningun punto** de  $[a, b]$  hay saltos, ya que si los hubiera salto los límites laterales son distintos

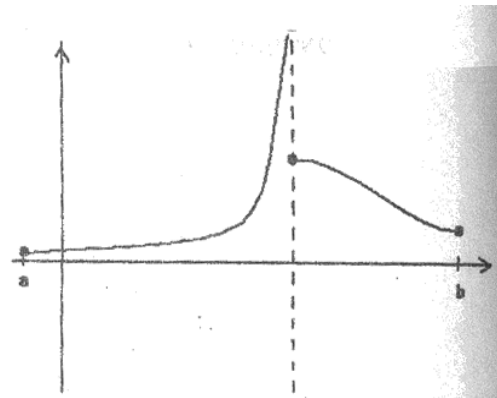
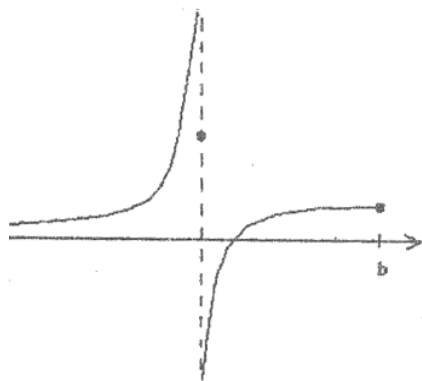


o bien el límite de la función en el punto no coincide con el valor de la función en el punto ver la siguiente figura

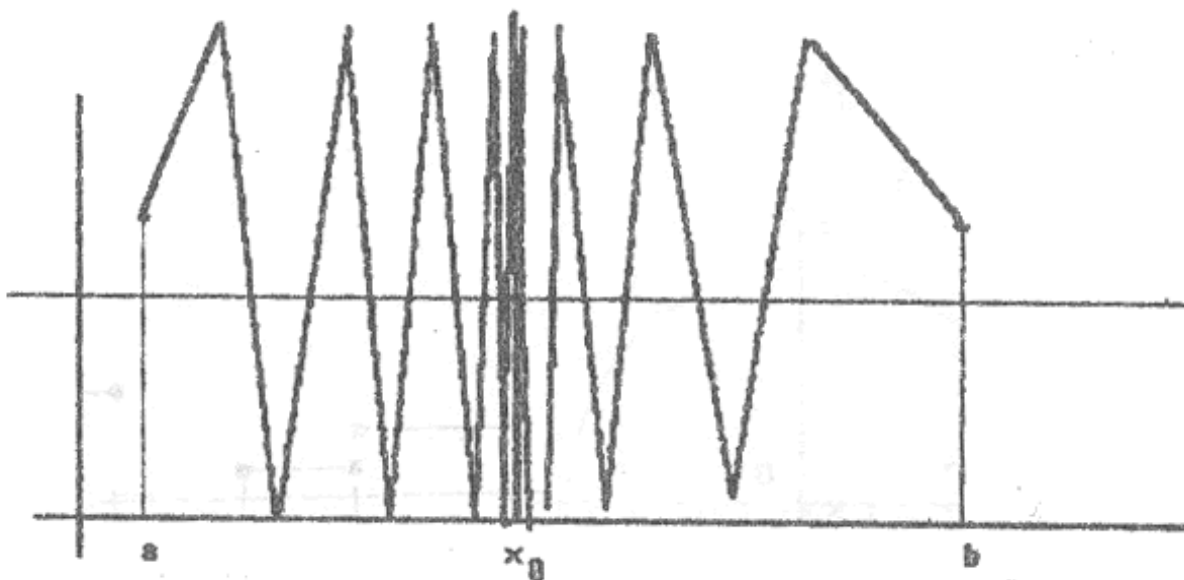




2. Tampoco la función puede ir a infinito en algún punto de  $[a, b]$ , ver figura que sigue, ya que en ese caso límite no existe



3. Tampoco puede oscilar en un punto  $x_0$  (ver figura que sigue) ya que el límite no existiría.



Así tenemos (intuitivamente) que la gráfica de una función continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$  debe ser de tal forma que uno la puede graficar sin levantar el lápiz empezando en  $(a, f(a))$  y terminando en  $(b, f(b))$ .

En el fondo una función continua en  $[a, b]$  es sólo una deformación del intervalo  $[a, b]$ , siendo su gráfica solamente una cuerda no infinita que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$ .

Lo anterior nos permite creer los siguientes teoremas.

**Teorema 4.21** *del Valor Intermedio*

Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Si  $\gamma$  es un número real que cumple  $f(a) < \gamma < f(b)$  entonces  $\gamma$  tiene al menos una preimagen en el intervalo  $]a, b[$ .

(es decir,  $\exists c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = \gamma$ )

Como más se utiliza este teorema, es en la existencia de raíces de una función.

**Corolario 4.22 (Existencia de Raíces)** Sea  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que

1)  $f(a)f(b) < 0$  (es decir,  $f(a)$  y  $f(b)$  tiene distintos signos)

2)  $f$  continua en un conjunto que incluya al intervalo  $[a, b]$

entonces  $f$  tiene una raíz en el intervalo  $]a, b[$  (es decir, existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f(c) = 0$ )

**Ejemplo 315** La función  $f(x) = x^3 + x^2 + 3x + 2$  tiene una raíz en el intervalo  $] -1, 0[$

En efecto  $f(-1) = -1 + 1 - 3 + 2 = -1 < 0$  y  $f(0) = 2 > 0$  luego  $f(-1)f(0) < 0$ .

Además  $f$  es continua en  $[-1, 0]$  luego por corolario anterior existe una raíz en el intervalo  $] -1, 0[$ .

**Ejercicio 316** Pruebe que la ecuación

$$e^x - 3x = 0$$

tiene al menos una raíz real en el intervalo  $]0, 1[$ .

**Solución:** Sea  $f(x) = e^x - 3x$

$f(0) = e^0 - 3 \cdot 0 = 1 > 0$  y  $f(1) = e - 3 < 0$  luego  $f(0)f(1) < 0$

Además  $f$  es una función continua en  $\mathbb{R}$  en particular en  $[0, 1]$ , luego por el corolario anterior, existe  $c \in ]0, 1[$  tal que  $f(c) = 0$ , es decir  $c$  es una raíz o solución de la ecuación.

**Corolario 4.23** Sea  $f$  continua en un intervalo cerrado  $I$ , entonces  $f(I)$  también es un intervalo cerrado.

**Corolario 4.24** Sea  $f$  continua en un intervalo cerrado y acotado  $[a, b]$ , entonces  $f(I)$  es un intervalo cerrado y acotado, por lo tanto  $f$  es acotada.

**Ejercicio 317** Estudie la continuidad de

- a)  $f(x) = \sqrt{x-2} + \sqrt{2-x}$   
 b)  $f(x) = \sqrt{x^2-1} + 5\sqrt{x(1-x)} + \sqrt{x(-1-x)}$   
 Ayuda: Cuidado con los dominios.  
 c)  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = [x]$  (parte entera)  
 d)  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = [x]$  (parte entera)

**Ejercicio 318** Estudie la continuidad de la función en los puntos  $p$  indicados.

- a)  $f(x) = \begin{cases} \cos(\frac{1}{x-3}) & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases} \quad p = 3.$   
 b)  $f(x) = \frac{x-3}{|x-3|}, \quad p = 3 \text{ y } p = 0.$   
 c)  $f(x) = \begin{cases} (x-3)\cos(\frac{1}{x-3}) & x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases} \quad p = 3 \text{ y } p = 0.$

**Ejercicio 319** Para qué valores de  $\alpha$ ,  $f$  es continua en el punto indicado.

- a)  $f(x) = \begin{cases} (x-\pi)^\pi \sin(\frac{1}{x-\pi}) & x \neq \pi \\ 0 & x = \pi \end{cases} \quad p = \pi \text{ y } p = 0$   
 b)  $f(x) = x^\alpha, \quad p = 0, \text{ y } p = 2$   
 c)  $f(x) = \frac{x^\alpha - 4}{x-2} \quad p = 0 \text{ y } p = 2$

**Ejemplo 320** Considere la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} a \ln(x + e^2)^3 + b \frac{\sin 4x}{2x} & x < 0 \\ ax + 3 & x = 0 \\ \frac{\sqrt{1+bx^2}-1}{\sin x^2} & 0 < x < \pi \end{cases}$$

donde  $a$  y  $b$  son números reales

- 1) Calcule el límite lateral derecho de  $f$  en 0
- 2) Calcule el límite lateral izquierdo de  $f$  en 0
- 3) Encuentre los valores de  $a$  y  $b$  que hacen continua a  $f$  en 0.
- 4) Determine para qué valor de  $b$  existe el límite lateral izquierdo de  $f$  en  $\pi$

**Solución:** 1)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+bx^2}-1}{\sin^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+bx^2}-1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sqrt{1+bx^2}+1}{\sqrt{1+bx^2}+1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1+bx^2)-1}{\sin^2 x(\sqrt{1+bx^2}+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{bx^2}{\sin^2 x(\sqrt{1+bx^2}+1)} \\ &= b \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\sin^2 x} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+bx^2}+1} \\ &= b \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \frac{b}{2} \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (a \ln(x + e^2)^3 + b \frac{\sin 4x}{2x}) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} a \ln(x + e^2)^3 + \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 4x}{2x} \\
&= a \ln(e^2)^3 + \lim_{x \rightarrow 0^-} b \frac{2 \sin 4x}{2 \cdot 2x} \\
&= 6a + 2b \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin 4x}{4x} \\
&= 6a + 2b \cdot 1 \\
&= 6a + 2b \\
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= 6a + 2b
\end{aligned}$$

3)  $f$  será continua en 0 si  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ luego  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ ,

es decir,

$$\frac{b}{2} = 6a + 2b \quad \frac{b}{2} = 3$$

Así  $b = 6$  y  $a = -\frac{3}{2}$ 

$$4.- \lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+bx^2}-1}{\sin x^2}$$

Si  $b = 0$  entonces  $f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = 0$ Si  $b \neq 0$  entonces el límite no existe.

En efecto; Supongamos que existe, es decir,  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = L$ ,  $L \in \mathbb{R}$  entonces al calcular  $\lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sqrt{1+bx^2}-1)$  de dos formas distintas tenemos

$$\begin{aligned}
\sqrt{1+b\pi^2}-1 &= \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sqrt{1+bx^2}-1) \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+bx^2}-1}{\sin^2 x} (\sin^2 x) \\
&= \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sqrt{1+bx^2}-1}{\sin^2 x} \lim_{x \rightarrow \pi^-} (\sin^2 x) \\
&= L \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

luego esto es una contradicción.

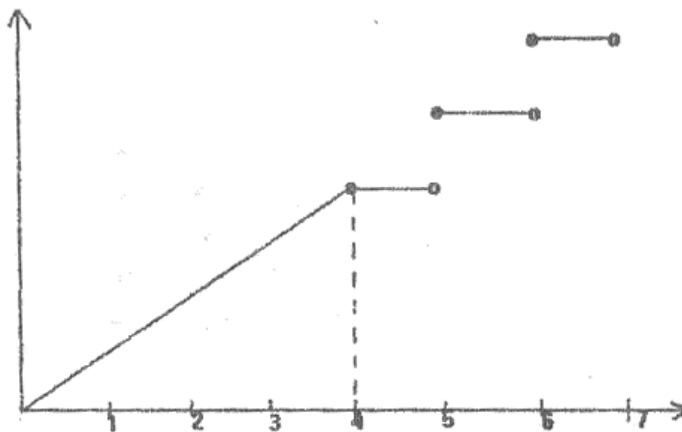
**Ejemplo 321** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.1. La función  $f(x) = [2x]$  es discontinua sólo en  $\mathbb{Z}$ 2. La función  $f(x) = \begin{cases} [x] & x \geq 4 \\ x & x < 4 \end{cases}$  es discontinua en

$$D = \{x \in \mathbb{Z} : x \geq 4\}$$

3. Si  $f + g$  es continua en  $a$  y  $f$  es continua en  $a$  entonces  $g$  es continua en  $a$ .4. Sean  $f$ ,  $g$  funciones definidas en una vecindad de  $a$ , tal que  $f$  es discontinua en  $a$  entonces  $f + g$  es discontinua en  $a$ .5. Si  $f$  y  $g$  son discontinuas en  $a$  entonces  $f + g$  es discontinua en  $a$ .

**Solución:**

1. Falso: la función en  $\frac{1}{2}$  es discontinua ya que  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} [2x] = 1$  y  $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} [2x] = 0$  luego el límite no existe.
2. Falso:  $f$  es continua en 4 pues  $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} [x] = 4$  además  $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} x = 4$  luego  $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 4 = f(4)$ . además es claro por la grafica (ver figura siguiente)



que  $f$  es discontinua en  $\{x \in \mathbb{Z} : x > 4\}$ .

3. Verdadero: Por algebra de límites tenemos. Si  $f + g, f$  son continuas en  $a$  entonces  $(f + g) - f$  es continua en  $a$ , es decir  $g$  es continua en  $a$ .
4. Falso: Exiten  $f(x) = [x]$  y  $g(x) = x - [x]$  funciones definidas en una vecindad de  $a = 1$  tal que  $f$  es discontinua en  $x = 1$  sin embargo  $(f + g)(x) = x$  es continua en  $a = 1$ .
5. : El mismo ejemplo.

**Ejemplo 322** Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+2x}{-\sin 2x} & -\pi/2 < x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \ln(3x^2 + e)^{-1} & x > 0 \end{cases}$$

¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ? En caso de no serlo redefinir  $f$  si es posible, de modo que  $f$  sea continua.

**Solución:**  $x = 0$  es un punto de acumulación del  $\text{Dom} f = ]-\pi/2, \infty[$  luego  $f$  será continua en  $x = 0$  si y sólo si

- 1)  $0 \in \text{Dom} f$
- 2)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe.
- 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ .

Así:

- 1) Es claro que  $0 \in \text{Dom} f$  pues  $f(0) = 1$
- 2) Calculemos  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 2x}{-\sin(2x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+2)}{-2 \cos x \sin(x)} \\
&= \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x+2)}{\sin(x) \cos(x)} \\
&= \frac{-1}{2} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sin(x)} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+2}{\cos x} \\
&= -1 \cdot \frac{2}{2} = -1
\end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x^2 + e)^{-1}$$

Puesto que la función logaritmo es continua en  $\mathbb{R}^+$  y

$$\lim_{x \rightarrow 0} 3x^2 + e = e \in \mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x^2 + e)^{-1} \\
&= - \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(3x^2 + e) \\
&= - \ln \lim_{x \rightarrow 0^+} (3x^2 + e) \\
&= - \ln(e) = -1
\end{aligned}$$

luego existe  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1$

3)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$  luego  $f$  no es continua en  $x = 0$ . Sin embargo, dado que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe entonces es posible redefinir  $f$  de modo que  $f$  sea continua en  $x = 0$ , de la siguiente forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x}{-\sin 2x} & -\pi/2 < x < 0 \\ -1 & x = 0 \\ \ln(3x^2 + e)^{-1} & x > 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 323** Sea  $f : ]0, \pi[ \rightarrow \mathbb{R}$  la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} & x < \pi/2 \\ ax - 1 & x \leq \pi/2 \end{cases}$$

?‘Qué valor (si existe) debe asignarse a la constante  $a$  para que  $f$  sea continua en  $\frac{\pi}{2}$  ?

**Solución:**  $f$  será continua en  $\pi/2$  si

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (4.11)$$

i)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x}{\cot x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{x \sin x}{\cos x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x \sin x - \pi}{2 \cos x}
\end{aligned}$$

Sea  $u = \frac{\pi}{2} - x$  si  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$  entonces  $u \rightarrow 0^+$

i)

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x \operatorname{sen} x - \pi}{2 \cos x} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{2(\pi/2 - u) \operatorname{sen}(\pi/2 - u) - \pi}{2 \cos(\pi/2 - u)} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{(\pi - 2u) \cos u - \pi}{2 \operatorname{sen} u} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\pi(\cos u - 1) - 2u \cos u}{2 \operatorname{sen} u} \\&= \pi \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\cos u - 1}{2 \operatorname{sen} u} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u \cos x}{\operatorname{sen} u}\end{aligned}$$

por otra parte;

$$\begin{aligned}\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\cos u - 1}{2 \operatorname{sen} u} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 u - 1}{2 \operatorname{sen} u(\cos u + 1)} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2 u}{2 \operatorname{sen} u(\cos u + 1)} \\&= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen} u}{2(\cos u + 1)} \\&= 0\end{aligned}$$

además

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u \cos u}{\operatorname{sen} u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{u}{\operatorname{sen} u} \lim_{u \rightarrow 0^+} \cos u = 1 \cdot 1 = 1$$

Luego por algebra de limite

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{2x \operatorname{sen} x - \pi}{2 \cos x} = \pi \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\cos u - 1}{2 \operatorname{sen} u} - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u \cos x}{\operatorname{sen} u} = -1$$

ii)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} ax - 1 = \frac{\pi}{2}a - 1$  Por (i) y (ii) y por 4.11 se tiene

$$-1 = \frac{\pi}{2}a - 1 = f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

por lo tanto tenemos  $a = 0$ .

**Ejemplo 324** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x^3} & x > 0 \end{cases}$$

a) ¿Es  $f$  continua en  $x = 0$ ?

b) ¿Es  $f$  continua en  $\mathbb{R}$ ?

c) Existe  $D_+ = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

d) Existe  $D_- = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

**Solución:** a) Calculemos los límite laterales

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

pues  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$  y  $\cos\left(\frac{1}{x^2}\right)$  es acotada.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 2x^3} = 0.$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) = 0$  Por lo tanto  $f$  es continua en  $x = 0$

b) Sea  $f_1(x) = x^3 \cos(\frac{1}{x^2})$  para  $x < 0$  como  $f_1$  es producto de funciones continuas en  $] -\infty, 0[$  entonces (por algebra de funciones continuas)  $f_1$  es continua.

Por suma y composición de funciones, se tiene que  $f_2$  es continua en  $]0, \infty[$ . Además por (a)  $f$  es continua en  $x = 0$ , luego  $f$  es continua en  $\mathbb{R}$ .

c)

$$\begin{aligned} D_+ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3} - 0}{x - 0}, \text{ pues para } x > 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2(1 + 2x)}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{1 + 2x}}{x}, \text{ pues para } x > 0 \quad |x| = x \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + 2x} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Luego existe  $D_+$ .

d)

$$\begin{aligned} D_- &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \cos(1/x^2) - 0}{x - 0} \text{ pues } f(x) = x^3 \cos(\frac{1}{x^2}) \text{ para } x < 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 \cos(\frac{1}{x^2}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

pues  $g(x) = \cos(1/x^2)$  es acotada y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0$ .

Luego existe  $D_-$ .

**Ejercicio 325** Determine  $a, b$  en  $\mathbb{R}$  de modo que  $f$  sea continua en  $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} ax - \operatorname{sen} bx}{x} & x < 0 \\ ax + 3 & x = 0 \\ \frac{b\sqrt{4x^2 + x^3}}{x} & x > 0 \end{cases}$$

**Solución:**

**Ejercicio 326** 1.  $0 \in \operatorname{Dom} f, f(0) = 3$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  existe si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b\sqrt{4x^2 + x^3}}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{b|x|\sqrt{4 + x}}{x} \quad x > 0 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} b\sqrt{4 + x} = 2b \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(bx)}{x} \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} a \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} - \lim_{x \rightarrow 0^-} b \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx} \\
&= a \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{ax} - b \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{sen}(bx)}{bx} \\
&= a - b
\end{aligned}$$

por lo tanto  $a - b = 2b$ , además  $f(0) = 3$ , luego  $f$  sera continua en  $x = 0$  si

$$a - b = 3 \wedge 2b = 3 \iff a = 9/2 \wedge b = 3/2$$

**Ejercicio 327** Determinar  $b$  en  $\mathbb{R}$  de modo que  $f$  sea continua en  $x = 1$ .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2 + b^2}{x} & x > 1 \\ (b - 1)x & x < 1 \end{cases}$$

**Solución:**  $f$  será continua en  $x = 1$  si  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2 + b^2}{\sqrt{x - 1}}$$

Este límite podría existir si  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 - 2 + b^2 = 0$  ( en caso contrario el límite sería de la forma  $\frac{c}{0}$  y no existiría).

Ahora

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - 2 + b^2 = 0 \iff 1 - 2 + b^2 = 0 \iff b = 1 \vee b = -1$$

i) Si  $b = 1$  se tiene que

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 2 + b^2}{\sqrt{x - 1}} &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 1)(x - 1)\sqrt{x - 1}}{x - 1} \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1)\sqrt{x - 1} = 0
\end{aligned}$$

por otra parte,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (b - 1)x = b - 1 = 1 - 1$$

Luego  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$  y por lo tanto  $f$  es continua en  $x = 1$  si  $b = 1$ , pues  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 0$

ii) Si  $b = -1$ , se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1 + b^2}{\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} = 0$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (b - 1)x = b - 1 = -2$$

luego

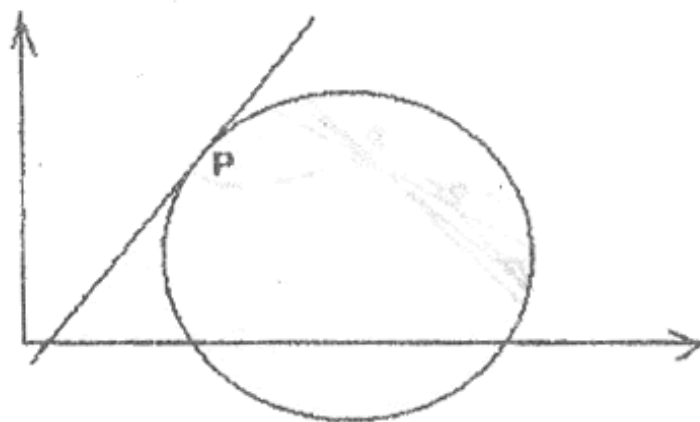
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

de donde  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  no existe y por lo tanto  $f$  no es continua en  $x = 1$  si  $b = -1$ .

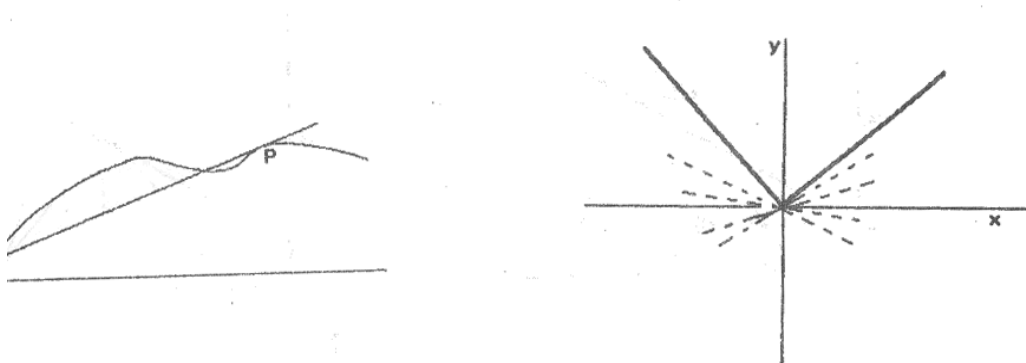
## 4.4 Recta tangente a la Curva

La noción de límite es fundamental para el estudio de muchos conceptos de las matemáticas, de la física y otras ciencias. Para ilustrar esto estudiaremos el problema de encontrar la recta tangente a una curva en un punto  $P$  dado.

En la geometría plana, la recta tangente en un punto  $P$  sobre una circunferencia se puede definir como la recta que tiene solamente el punto  $P$  en común con tal circunferencia, como se ilustra en la figura



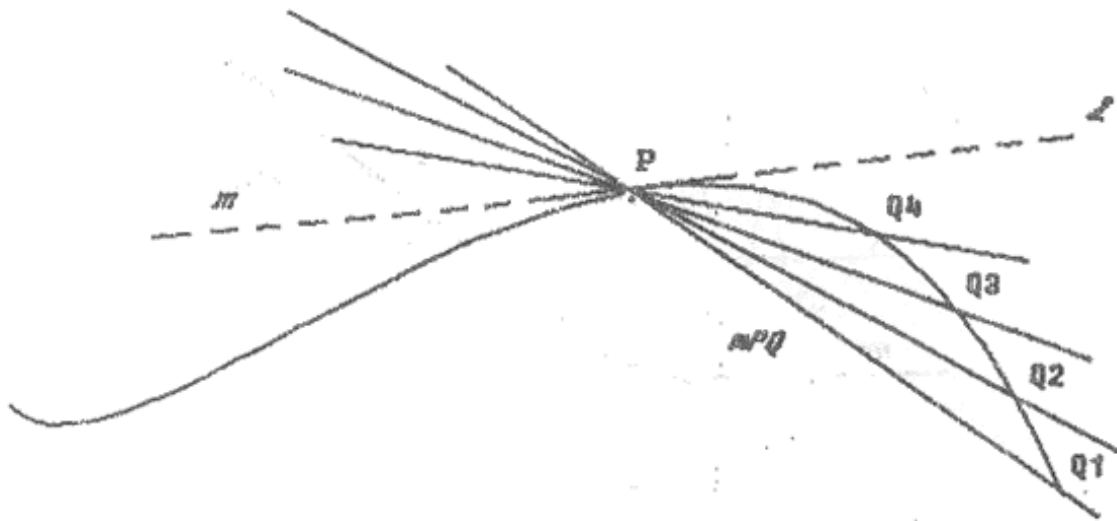
. Esta definición no se puede aplicar a cualquier gráfica, ya que una recta tangente en un punto  $P$  puede cortar a una gráfica varias veces como se muestre en la figura, gráfico izquierdo). ó en el caso de la gráfica de función valor absoluto  $f(x) = |x|$ . ¿Cuál es la tangente en  $P = (0, 0)$ ?



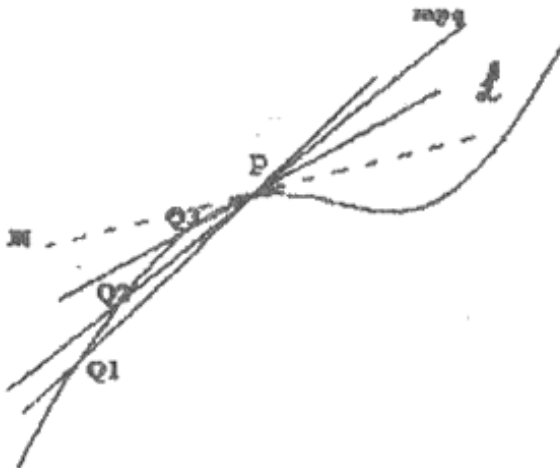
Para identificar la recta tangente  $\mathcal{L}$  a la gráfica de una función en un punto  $P$ , basta especificar la pendiente  $m$  de  $\mathcal{L}$ , ya que ésta y el punto  $P$  determina completamente a la recta.

Para encontrar  $m$ , consideraremos las rectas  $\mathcal{L}_{PQ}$ , rectas secantes que pasa por  $P$ .

Sea  $m_{PQ}$  la pendiente de  $\mathcal{L}_{PQ}$ . Cuando “ $Q$  tiende a  $P$ ” ( $P$  fijo) por la derecha figura que sigue



y por la izquierda figura



se observa que  $m_{PQ}$  tiende a  $m$  (pendiente de la recta  $\mathcal{L}$ ). Esto nos sugiere que si  $m_{PQ}$  tiende a un valor fijo, cuando " $Q$  tiende a  $P$ ", entonces ese valor deberíamos usar para definir la pendiente  $m$  de la recta tangente  $\mathcal{L}$  en  $P$ .

Es claro que la pendiente de la recta secante  $\mathcal{L}_{PQ}$  es

$$m_{PQ} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

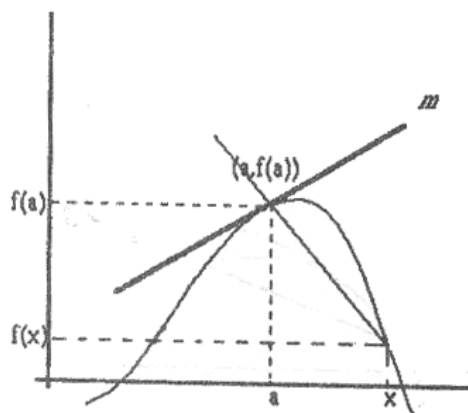
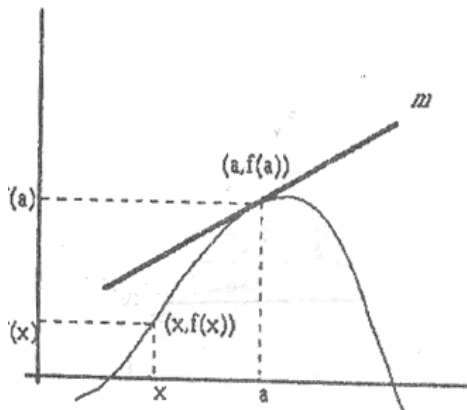
ya que pasa por los puntos  $(a, f(a))$  y  $(x, f(x))$ . Con esta notación podemos sustituir la frase " $Q$  tiende a  $P$ " por " $x$  tiende a  $a$ ", así llegamos a la siguiente definición

**Definición 4.25** Sea  $f$  una función definida en un intervalo abierto que contiene a  $a$ . La pendiente  $m$  de

la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$  es

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

siempre y cuando el límite exista. (Ver figura )



y en ese caso se dirá que existe la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, f(a))$ .

**Ejemplo 328** Sea  $f(x) = x^3$  y  $a$  un número real.

Encontraremos:

- La pendiente  $m_a$  de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(a, a^3)$ .
- La ecuación de la recta tangente a la gráfica en el punto  $(1, 1)$ .
- La ecuación de la **recta normal** (recta perpendicular a la recta tangente) a la gráfica en el punto  $(1, 1)$ .

**Solución:** a)

$$\begin{aligned} m_a &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x^2 + ax + a^2) = 3a^2 \end{aligned}$$

Así, la pendiente es

$$m_a = 3a^2$$

b) Ya que la pendiente de la recta tangente  $\mathcal{L}$  en el punto  $(1, 1)$  la podemos obtener como el caso especial en que  $a = 1$ , tenemos que  $m = 3$ .

En general la ecuación de la recta que pasa por  $(a, f(a))$  y con pendiente  $m$  es

$$y - f(a) = m(x - a)$$

En nuestro caso

$$y - 1 = 3(x - 1)$$

o

$$y = 3x - 2$$

c) Si  $m$ ,  $m \neq 0$  es la pendiente de la recta tangente y  $m_N$  la pendiente de la recta normal a la gráfica de  $y = f(x)$  entonces se debe cumplir

$$m \cdot m_N = -1$$

Así, la ecuación de la recta normal a la gráfica de  $f(x) = x^3$  en  $(1, 0)$  es,

$$\begin{aligned} y - f(a) &= m_N(x - a) \\ \Leftrightarrow y - 1 &= -\frac{1}{3}(x - 1) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

Observe que si  $m = 0$  para algún punto entonces la recta tangente es horizontal, cuya ecuación es  $y = f(a)$ , y en este caso la ecuación de la recta normal es  $x = a$ .

**Ejemplo 329** a) *Demostraremos que*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(a)}{x - a} = \cos(a)$$

y b) *Determinemos la ecuación de la recta tangente a  $y = \text{sen}(x)$  en  $P = (\frac{\pi}{2}, 1)$ .*

**Solución:** Sea  $u = x - a$ , si  $x \rightarrow a$  entonces  $u \rightarrow 0$ , luego, usando sustitución,

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(a)}{x - a} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u + a) - \text{sen}(a)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u) \cos(a) + \text{sen}(a) \cos(u) - \text{sen}(a)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left( \cos(a) \frac{\text{sen}(u)}{u} + \text{sen}(a) \frac{\cos(u) - 1}{u} \right) \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \cos(a) \frac{\text{sen}(u)}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \text{sen}(a) \frac{\cos(u) - 1}{u} \end{aligned}$$

Calculando por separado los límites tenemos

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u) \cos(a)}{u} = \cos(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} = \cos(a)$$

y

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow 0} \text{sen}(a) \frac{\cos(u) - 1}{u} &= \text{sen}(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} \\ &= \text{sen}(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{(\cos(u) - 1)(\cos(u) + 1)}{u(\cos(u) + 1)} \\ &= \text{sen}(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos^2(u) - 1}{u(\cos(u) + 1)} \\ &= -\text{sen}(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{\cos(u) + 1} \\ &= \text{sen}(a) \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Luego por álgebra de límites

$$\begin{aligned} L &= \lim_{u \rightarrow 0} \cos(a) \frac{\text{sen}(u)}{u} + \lim_{u \rightarrow 0} \text{sen}(a) \frac{\cos(u) - 1}{u} \\ &= \cos(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} + \text{sen}(a) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} \\ &= \cos(a) \end{aligned}$$

b) Como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $y = \text{sen}(x)$  en cualquier punto  $(a, \text{sen}(a))$  está dada por

$$m = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x) - \text{sen}(a)}{x - a}$$

y por (a) tenemos que  $m = \cos(a)$ , reemplazando  $a = \frac{\pi}{2}$  obtenemos que  $m = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  y así la recta tangente es;

$$\begin{aligned} y - 1 &= m(x - \frac{\pi}{2}) \\ \Longleftrightarrow y - 1 &= 0 \\ \Longleftrightarrow y &= 1 \end{aligned}$$

Observe que la ecuación de la normal en  $P = (\frac{\pi}{2}, 1)$  es  $x = \frac{\pi}{2}$ .

**Ejercicio 330** Determine la pendiente de la recta tangente a la parábola  $y = ax^2 + bx + c$  en el punto  $(x_0, y_0)$

**Solución:**

$$\begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax^2 + bx + c - (ax_0^2 + bx_0 + c)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{ax^2 - ax_0^2 + bx - bx_0}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x^2 - x_0^2) + b(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x - x_0)(x + x_0) + b(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(a(x + x_0) + b)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} a(x + x_0) + b \\ &= 2ax_0 + b \end{aligned}$$

**Ejercicio 331** Un equipo de ingenieros de caminos diseña un tramo de carretera que debe conectar una autopista horizontal con otra de pendiente  $m = 1/5$ . El enlace debe, realizarse sobre una distancia horizontal de 800 pies usando una curva parabólica para unir los puntos  $A$  y  $B$ . Obtenga una ecuación del tipo  $y = ax^2 + bx + c$  para la parábola respectiva y determine las coordenadas de  $B$ .

**Solución:** Las coordenadas de  $A$  son  $(0, 0)$  y los de  $B$  son  $(800, y_0)$  donde  $y_0 = a(800)^2 + b(800) + c$ , además como  $(0, 0)$  también pertenece a la parábola, debe satisfacer la ecuación de ella, así  $0 = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c$ , de donde  $c = 0$ . por ejercicio anterior, obtuvimos que la pendiente de  $y = ax^2 + bx + c$  en  $(x_0, y_0)$  es  $m = 2ax_0 + b$ , luego en  $x_0 = 800$  es  $m = 2a \cdot 800 + b$  y en  $x_0 = 0$  es  $m = b$ . Además para conectar la autopista de pendiente  $1/5$  con la parábola, debe ocurrir que

$$2a \cdot 800 + b = 1/5 \quad (4.12)$$

y para conectar la autopista horizontal (de pendiente  $m = 0$ ) con la parábola;

$$b = 0 \quad (4.13)$$

Así, de 4.12 y 4.13 tenemos

$$\frac{1}{8000} = a$$

En consecuencia  $a = \frac{1}{8000}$ ,  $b = 0$ ,  $c = 0$ . Por otra parte  $B = (8000, y_0)$  pertenece a la parábola, luego satisface su ecuación, es decir

$$y_0 = \frac{1}{8000}(800)^2 = 80$$

Por lo tanto las coordenadas de  $B$  son  $(800, 80)$ .

**Ejemplo 332** Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \pi \leq x \\ \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)} & 0 < x < \pi \\ \sqrt[3]{8x^3 + x^5} & x \leq 0 \end{cases}$$

a) ¿Es  $f$  una función continua en 0?

b) ¿Existe la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P = (0, 0)$ ?

c) ¿Existe la recta tangente a la grafica de  $y = f(x)$  en los puntos  $(4, 2)$  y  $(-1, -2)$ ?

**Solución:** a) Dado que  $f$  está definida en una vecindad de  $x = 0$ , y  $0 \in \operatorname{Dom} f$  se debe cumplir que:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \\ &= 0 \cdot 1 = 0. \end{aligned}$$

y el otro límite lateral es

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{8x^3 + x^5}.$$

y ambos son iguales a  $f(0)$  se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$$

y por lo tanto  $f$  es continua en  $x = 0$

b) Dado que  $f$  está definida en una vecindad de  $x = 0$ .

Veamos si existe

$$m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Para poder calcular este límite, lo haremos calculando los límites laterales

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1,$$

por otra parte

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{8x^3 + x^5}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{x^3(8 + x^2)}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x \sqrt[3]{8 + x^2}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{8 + x^2} \\
 &= \sqrt[3]{8}
 \end{aligned}$$

Dado que los límites laterales son distintos tenemos que no existe

$$m = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0},$$

luego no existe recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P = (0, 0)$ .

c)  $f$  está definida en una vecindad de  $x = 4$  pues  $f(x) = \sqrt{x}$  para  $\pi \leq x$  y  $\pi < 4$ ; además  $(4, 2)$  pertenece a la curva  $y = f(x)$ , pues  $\sqrt{4} = 2$ . Como la pendiente buscada es

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{(x - 4)(\sqrt{x} + 4)} = \frac{1}{4}$$

existe la recta tangente a la curva en  $P = (4, 2)$ , y sea ecuación es:

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4)$$

En el caso del punto  $(-1, -2)$  tenemos que él no pertenece a la curva  $y = f(x)$  pues

$$f(x) = \sqrt[3]{-8 - 1} = \sqrt[3]{-9} \neq -2$$

luego no existe recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $(-1, -2)$ .

**Ejercicio 333** Usando algebra de límite y identidades trigonométricas calcular el límite de las siguientes funciones en  $a$

$$1. f(x) = \cot x \quad a \neq n\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$2. f(x) = \sec x \quad a \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$3. f(x) = \csc x \quad a \neq n\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$4. f(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \quad a \in \mathbb{R}$$

$$5. f(x) = \tan(2x + \alpha) \quad a \text{ apropiado}$$

$$6. f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2} \quad a = 0$$

**Ejercicio 334** Sea  $X \subset \mathbb{R}, p \in X', f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$  funciones tales que  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L$  y  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = M$  con  $L < M$  muestre que existe una vecindad de  $p$ ,  $V_p$  tal que

$$f(x) < g(x) \quad , \quad \forall x \in (V_p - \{p\}) \cap X$$

Ayuda: Como  $L < M$  se puede tomar  $\varepsilon = \frac{M-L}{2}$  y encontrar para ese  $\varepsilon$  la vecindad  $V_p$



**Ejercicio 335** Sea  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \wedge L > 0$ .

Muestre que  $\exists V_p$  tal que  $f(x) > 0, \forall x \in (V_p - \{p\}) \cap X$

Ayuda: Usar resultado anterior

**Ejercicio 336** Sea  $f(x) \leq g(x), \forall x \in X, x \neq p \wedge \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \wedge \lim_{x \rightarrow p} g(x) = M$ . Muestre que  $L \leq M$

Ayuda: Usar teorema del apretón a  $(g - f)(x)$

**Ejercicio 337** Sea  $A \subset \mathbb{R}, f : A \rightarrow \mathbb{R}, p \in A$  y supongamos que existe  $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$  entonces  $\exists V_p$  y  $K \in \mathbb{R}$  tal que

$$|f(x)| < K \quad , \quad \forall x \in (V_p - \{p\}) \cap A$$

(es decir,  $f$  es acotada en una vecindad de  $p$ )

**Ejercicio 338** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostrar que  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  no existe si  $x_0 \neq 0$

Ayuda: Para la segunda parte usar ejercicio 335 y para la primera parte usar  $|f(x)| \leq |x|$



# Chapter 5

## Derivada

### 5.1 Derivada

**Definición 5.1** Sea  $I \subset \mathbb{R}$ ,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  y sea  $p$  un punto de acumulación

Diremos que  $f$  es **derivable en el punto  $p$**  cuando el siguiente límite existe

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

En el caso que el límite exista, el valor de el se denota por  $f'(p)$ , indicando de esta forma que el valor depende del punto  $p$ . El valor  $f'(p)$  es llamado **la derivada de  $f$  en el punto  $p$**  y se usan las siguiente notaciones.

$$f'(p), \quad \frac{df}{dx}(p), \quad \frac{df}{dx}|_{x=p}, \quad \frac{df}{dx}|_p$$

**Observación:**

1)  $f'(p)$  puede ser calculado de otra forma ya que:

a) Tomando  $h = x - p$  se tiene

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h + p) - f(p)}{h}$$

que es otra de las formas que aparece la definición de la derivada en algunos libros.

b) Usando una caracterización de límite via sucesiones se tiene, que  $f$  es derivable en  $p$  si sólo si para cualquier sucesión  $(x_n)$ ,  $(x_n) \in I - \{p\}$  con  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p$  se tiene que existe el siguiente límite

$$f'(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_n) - f(p)}{x_n - p}$$

c) Generalizando lo anterior, tenemos que también tenemos

$$f'(p) = \lim_{y \rightarrow b} \frac{f(g(y)) - f(p)}{g(y) - p}$$

donde  $g : X \rightarrow I$ ,  $\lim_{y \rightarrow b} g(y) = p$  (obviamente  $b \in X'$ ) y  $g(y) \neq p \forall y, y \neq b$

2)  $f$  es derivable en  $p$  si para la gráfica de  $f$  existe la recta tangente; inversamente se puede decir: Si la función es derivable en  $p$  se tiene que la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $(p, f(p))$  existe. Si Ud. compara las definiciones de recta tangente y derivada, se puede percatar que es lo mismo.

3) Por propiedad de límite se tiene que si existe  $f'(p)$ , él es único, por esto se puede usar el artículo “la” en “la derivada”, o “la recta tangente”.

De la observación 2 se concluye que ya tenemos varios ejemplos de funciones derivables, ellas son las de los ejemplos y ejercicios de rectas tangentes, además podemos notar fácilmente que la pendiente  $m$  de la recta tangente a  $f(x)$  en el punto  $p$ <sup>1</sup> satisface

---

<sup>1</sup>Correctamente dicho en el punto  $(p, f(p))$ .

$$m = f'(p)$$

Por lo tanto; si  $f$  es derivable en  $p$  se tiene que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $p$  es

$$\begin{aligned}\frac{y - f(p)}{x - p} &= f'(p) \\ y &= (f'(p))x + f(p) - f'(p)p\end{aligned}$$

Usando trigonometría se tiene que el ángulo  $\alpha$  que forma la recta tangente a la gráfica de  $f$  en  $p$  (es decir, en  $(p, f(p))$ ) con el eje de las  $x$  esta dado por:

$$\alpha = \arctan(f'(p))$$

### 5.1.1 Ejemplos de funciones derivables

**Ejemplo 339** Veremos que la función  $f(x) = 3x + 5$  es derivable en el punto  $p = 7$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned}f'(7) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(7+h) - f(7)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(7+h) + 5 - (3 \cdot 7 + 5)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = 3.\end{aligned}$$

El resultado anterior no debe ser extraño ya que naturalmente se tiene que la recta tangente a la gráfica de  $f$  (la recta  $y = 3x + 5$ ) es ella misma, por lo tanto las pendientes deben coincidir.

¿Cuál es la derivada de  $f$  en otros puntos? Por el argumento gráfico que hemos dado en el párrafo anterior deberíamos tener que  $f'(p) = 3 \forall p \in \mathbb{R}$ . Compruébelo Ud. usando la definición de derivada.

**Ejemplo 340** La función  $g(x) = 4$  (función constante) tiene como gráfica la recta  $y = 4$  que es una recta horizontal (paralela al eje  $x$ ) situada “al nivel 4”; obviamente su pendiente es cero, por lo tanto la derivada en todo punto  $p$  debe ser nula. Comprobemos esto vía la definición.

Sea  $p$  un número real fijo

$$\begin{aligned}g'(p) &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{g(x) - g(p)}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} \frac{4 - 4}{x - p} \\ &= \lim_{x \rightarrow p} 0 = 0\end{aligned}$$

**Ejemplo 341** Calculemos ahora la derivada de  $h(u) = \sqrt{u}$  en el punto  $p = 4$ .

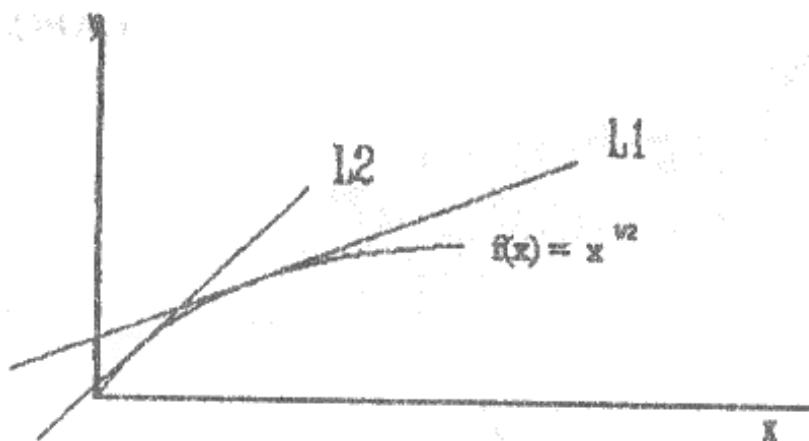
Si es que existe  $h'(4)$  esta debe ser igual a

$$\begin{aligned}h'(p) &= \lim_{u \rightarrow 4} \frac{h(u) - h(4)}{u - 4} \\ &= \lim_{u \rightarrow 4} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{4}}{u - 4} \\ &= \lim_{u \rightarrow 4} \frac{\sqrt{u} - \sqrt{4}}{u - 4} \cdot \frac{\sqrt{u} + \sqrt{4}}{\sqrt{u} + \sqrt{4}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 4} \frac{u - 4}{u - 4} \cdot \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{4}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Si repetimos los pasos anteriores un punto fijo  $p$  (pero arbitrario) de  $\mathbb{R}^+$  obtendremos que

$$h'(p) = \lim_{u \rightarrow p} \frac{1}{\sqrt{u} + \sqrt{p}} = \frac{1}{2\sqrt{p}}$$

Utilizando la gráfica de  $h$ , ver figura que sigue, notemos que la pendiente de  $L_2$  es mayor que la pendiente de  $L_1$  y a medida que tomemos  $p$  más cerca del origen obtendremos pendientes, cada vez mayores, hecho que podemos comprobar también en la derivada de  $h$  que  $h'(p)$  es una función decreciente en  $p$  ( $p \in \mathbb{R}^+$ ),  $h'(p)$  es la función que al ser evaluada en  $p$  nos da la pendiente de las rectas tangentes a la gráfica de la raíz cuadrada.



El ejemplo anterior nos induce a definir la “**función derivada**” por abuso de lenguaje **se acostumbra llamar simplemente la derivada**.

**Definición 5.2** <sup>2</sup> Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  una función derivable en todo punto de  $J$ . Se define la función derivada de  $f$  como

$$\begin{aligned} f' : J &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto f'(p) \end{aligned}$$

De la definición tenemos que  $J \subset I$ .

En los ejemplos anteriores tenemos calculadas las funciones derivadas

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x + 7, \quad I = \mathbb{R}, \quad J = \mathbb{R} \quad f'(x) = 3 \\ g(x) &= 4, \quad I = \mathbb{R}, \quad J = \mathbb{R} \quad g'(x) = 0. \\ h(x) &= \sqrt{x}, \quad I = \mathbb{R}_0^+, \quad J = \mathbb{R}^+ \quad h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Note que en el último caso  $h(0)$  existe, pero  $h'(0)$  no existe, es decir,  $J \subsetneq I$ .

**Ejemplo 342** Sea  $f(x) = \text{sen}(x)$  calculemos la función derivada de  $f'(x)$

En los ejemplos de cálculo de recta tangente para  $p \in \mathbb{R}$  obtuvimos

$$f'(p) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(h+p) - \text{sen}(p)}{h} = \cos(p)$$

<sup>2</sup>Un poco mas adelante en vez de decir la función derivada de  $f$ , diremos sencillamente la derivada de  $f$ .

Así, la función derivada de  $f(x) = \sin(x)$  es  $f'(x) = \cos(x)$ .

El siguiente ejemplo muestra una función que no es derivable en todo punto, a pesar de ser continua en todo  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 343** Sea  $f(x) = |x - 4|$ . Calculemos su derivada en todo punto que exista.

Cálculo de la derivada en  $x_0$ . Si  $x - 4 < 0$  se tiene que  $f(x) = -x + 4$  y en caso contrario  $f(x) = x - 4$ , de esta forma:

i) Si  $x_0 < 4$ ,

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x - 4 - (-x_0 + 4)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0} = -1 \end{aligned}$$

ii) Si  $x_0 > 4$ ,  $f'(x_0) = 1$  (cálculo análogo a los recién hechos).

iii) Si  $x_0 = 4$

$$f'(4) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Pero como  $f$  tiene distinto comportamiento cerca del 4 para calcular este último límite debemos tomar límites laterales y verificar que ellos son iguales

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x - 4 - 0}{x - 4} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x) - f(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{-x + 4 - 0}{x - 4} = -1 \end{aligned}$$

Como los límites laterales que definen  $f'(4)$  son distintos no tenemos la existencia de  $f'(4)$ , así la función derivada de  $f$  es

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{R} - \{4\} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 4 \\ -1 & x < 4 \end{cases} \end{aligned}$$

Notar que  $f$  es continua en  $x = 4$ .

**Observación:** De lo anterior, podemos afirmar que si  $f$  es continua en un punto  $p$ , no necesariamente  $f$  es derivable en  $a$ . Sin embargo el siguiente teorema nos afirma que si  $f$  es derivable en un punto  $p$ , entonces  $f$  es continua en  $p$ .

**Teorema 5.3** Si  $f$  es derivable en  $a$ , entonces  $f$  es continua en  $a$ .

**Demostración:** Debemos demostrar que

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

o equivalentemente nos bastaría mostrar que:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = 0$$

Como

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) - f(a) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) \frac{(x - a)}{(x - a)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0$$

tenemos que efectivamente  $f$  es continua en  $a$ .

Observe que el teorema anterior es de la forma  $p \Rightarrow q$ , la función  $f(x) = |x - 4|$  que vimos en el ejemplo 343 que no es derivable en  $x = 4$ , sin embargo ella es continua en  $x = 4$ , nos sirve de contraejemplo para la afirmación que: continuidad en un punto implica derivabilidad en el punto.

**Notaciones:**

La derivada de  $f$  en  $a$  es el límite

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

el límite lateral izquierdo de  $f'(a)$ , es decir,  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  es llamada derivada lateral izquierda en  $a$  y se denota por  $f'_-(a)$ . También se define la derivada lateral derecha en  $a$  que corresponde al límite lateral derecho y se denota por  $f'_+(a)$ .

**Ejercicio 344** Calcular la derivada de  $f(x)$ , donde

$$f(x) = \begin{cases} (x-2)^3 & x > 2 \\ x^2 - 4x + 4 & -1 < x \leq 2 \\ 9 & x = -1 \\ \text{sen}(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

Claramente los puntos conflictivos son  $x = 2$  y  $x = -1$  ya que en vecindades de ellas,  $f$  tiene distinto comportamiento y este hecho trajo dificultades en el ejemplo anterior.

a) Veamos en primer lugar si  $f$  es derivable en  $p = 2$ , para ello necesitamos calcular el siguiente límite (si es que existe):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = f'(2)$$

Este límite debemos calcularlo mediante los límites laterales

$$\begin{aligned} f'_+(2) &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)^3 - 0}{x - 2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4x + 4 - 0}{x - 2} = 0 \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que  $f$  es derivable en 2 y que  $f'(2) = 0$ .

b) Ahora veamos si  $f$  es derivable en el punto  $x = -1$ .

Como

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 4x + 4 - 9}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} x - 5 = -6$$

y como el otro límite lateral.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{\text{sen}(x+1) - 9}{x + 1}$$

no existe<sup>3</sup> se tiene que  $f$  no es derivable en  $-1$

c) Veamos ahora si  $f$  es derivable en los puntos  $a$  que son mayores que 2. En este caso la función toma la forma  $f(x) = (x - 2)^3$ .

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-2)^3 - (a-2)^3}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{[(x-2) - (a-2)][(x-2)^2 + (x-2)(a-2) + (a-2)^2]}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} (x-2)^2 + (x-2)(a-2) + (a-2)^2 = 3(a-2)^2 \end{aligned}$$

<sup>3</sup>Para probar esto basta tomar la sucesión  $x_n = -1 + \frac{1}{2\pi n}$   $x_n \rightarrow -1$ ,  $f(x_n)$  diverge. Notar que el límite es de la forma  $\frac{c}{0}$  con  $c \neq 0$ .

d) Calculemos ahora la derivada en el punto  $a$ ,  $a \in ]-1, 2[$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 4x + 4 - (a^2 - 4a + 4)}{x - a} = 2a - 4$$

e) Finalmente, calculemos  $f'(a)$  cuando  $a < -1$

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\text{sen}(x+1) - \text{sen}(a+1)}{x - a} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u+a+1) - \text{sen}(a+1)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)\cos(a+1) + \text{sen}(a+1)\cos(u) - \text{sen}(a+1)}{u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0} \left( \cos(a+1) \frac{\text{sen}(u)}{u} + \text{sen}(a+1) \frac{\cos(u) - 1}{u} \right) \\ &= (\cos(a+1)) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(u)}{u} + \text{sen}(a+1) \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos(u) - 1}{u} \\ &= \cos(a+1) \end{aligned}$$

De esta forma, la función derivada (que conseguimos por parte y analizamos en los puntos conflictivos) es

$$f'(x) = \begin{cases} 3(x-2)^2 & x > 2 \\ 0 & x = 2 \\ 2x-4 & 1 < x < 2 \\ \cos(x+1) & x < -1 \end{cases}$$

Ahora calculemos algunas derivadas de funciones básicas, en el sentido que posteriormente nos ayudarán a obtener la derivada de otras funciones.

**Ejemplo 345** Mediante el cálculo de las funciones derivadas. Justifique el siguiente listado.

1. Si  $f(x) = k$  constante entonces  $f'(x) = 0$
2. Si  $f(x) = x$  entonces  $f'(x) = 1$
3. Si  $f(x) = \text{sen}(x)$  entonces  $f'(x) = \cos(x)$
4. Si  $f(x) = \cos(x)$  entonces  $f'(x) = -\text{sen}(x)$
5. Si  $f(x) = \sqrt{x}$  entonces  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , si  $x > 0$
6. Si  $f(x) = x^n$  entonces  $f'(x) = nx^{n-1}$ , si  $n \in \mathbb{N}$
7. Si  $f(x) = e^x$  entonces  $f'(x) = e^x$

**Solución:** En todos los casos  $a$  indicará un elemento genérico del dominio de la función correspondiente.

1.

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{k - k}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{0}{x - a} = 0 \end{aligned}$$

Así,  $f'(x) = 0$  en el caso  $f(x) = k$



2.

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{x - a} \\
 &= \lim_{x \rightarrow a} 1 = 1
 \end{aligned}$$

Por lo tanto la función identidad  $f(x) = x$  tiene como función derivada  $f'(x) = 1$ .

3. Calculada anteriormente, en los ejemplos de funciones derivables.

4.

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a+h) - \cos(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a)\cos(h) - \sin(a)\sin(h) - \cos(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(a)(\cos(h) - 1) - \sin(a)\sin(h)}{h} \\
 &= (\cos(a))0 - (\sin(a))1 = -\sin(a)
 \end{aligned}$$

De esta forma  $\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x)$

5. Calculada anteriormente como ejemplo de funciones derivables, de esta forma

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{si } x > 0$$

6.

$$\begin{aligned}
 f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^n - a^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k - a^n}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{hna^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^k}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} na^{n-1} + \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} a^{n-k} h^{k-1} \\
 &= na^{n-1} + 0
 \end{aligned}$$

Así,  $\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$  si  $n \in \mathbb{N}$

Esta fórmula también es válida para potencias distintas de un número natural pero la demostración hecha es sólo válida para  $n \in \mathbb{N}$

7.

$$\begin{aligned}
f'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{a+h} - e^a}{h} \\
&= e^a \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \\
&= e^a \cdot 1 = e^a
\end{aligned}$$

De esta forma  $\frac{de^x}{dx}|_{x=a} = e^a$

### 5.1.2 Algebra de Derivadas

**Teorema 5.4** Si  $f$  es derivable en el punto  $a$ , entonces la función  $\alpha f$  con  $\alpha \in \mathbb{R}$  fijo también es derivable en  $a$  y

$$(\alpha f)'(a) = \alpha((f)'(a))$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
\frac{d\alpha f}{dx}|_{x=a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(a+h) - \alpha f(a)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \alpha \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right) \\
&= \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}
\end{aligned}$$

Como  $f$  es derivable, el último límite es simplemente la derivada de  $f$  en el punto  $a$ . Así,

$$\frac{d\alpha f}{dx}|_{x=a} = \alpha \frac{df}{dx}|_{x=a}$$

que es lo mismo que

$$(\alpha f)'(a) = \alpha((f)'(a))$$

□

**Ejemplo 346** Usando este teorema y los resultados anteriores tenemos que

1.  $(3 \sin(x))' = 3(\sin(x))' = 3 \cos(x)$
2.  $\frac{d}{dx}(7x^4) = 7 \frac{d}{dx}(x^4) = 7(4x^3) = 28x^3$
3.  $\frac{d}{dx}(\pi \cos(x)) = \pi \frac{d}{dx}(\cos(x)) = \pi(-\sin(x)) = -\pi \sin(x)$
4.  $\frac{d}{dx}(-9e^x)|_{x=\ln(3)} = -9 \frac{d}{dx}(e^x)|_{x=\ln(3)} = -9e^{\ln(3)} = -9 \cdot 3 = -27$
5.  $\frac{d}{dx}(-8\sqrt{x})|_{x=9} = -8 \frac{d}{dx}(\sqrt{x})|_{x=9} = -8 \frac{1}{2\sqrt{9}} = -\frac{4}{3}$

**Teorema 5.5** Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$ , también lo es  $f + g$  y además su derivada satisface

$$\frac{d}{dx}(f + g)(a) = \frac{df}{dx}(a) + \frac{dg}{dx}(a)$$

El teorema dice que la derivada de la suma es la suma de las derivadas.

**Demostración:**

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f+g)(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h}\end{aligned}$$

Separando los sumandos y agrupándolos para formar el límite que define la derivada (de cada función) se tiene

$$\begin{aligned}(f+g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= f'(a) + g'(a)\end{aligned}$$

que es simplemente el resultado pedido, sólo que está escrito en otra notación.  $\square$

**Ejemplo 347** Usando este teorema tenemos que son derivables las funciones;

$$1. f(x) = \sqrt{x} + \operatorname{sen}(x)$$

$$2. g(x) = \cos(x) - 7x^3$$

$$3. h(x) = 9x + 4 - 4\operatorname{sen}(x)$$

$$4. l(x) = 5e^x - 4x^5 - 5\sqrt{x}$$

y sus derivadas son:

$$1. f'(x) = (\sqrt{x})' + (\operatorname{sen} x)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \cos(x) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^+$$

$$2. g'(x) = (\cos)'(x) - 7(x^3)' = -\operatorname{sen}(x) - 7(3x^2) = -\operatorname{sen}(x) - 21x^2 \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

$$3. h'(x) = (9x)' + (4)' - 4(\operatorname{sen})'(x) = 9 + 0 - 4\cos(x) = 9 - 4\cos(x) \quad \text{si } x \in \mathbb{R}$$

$$4. l'(x) = 5(e^x)' - 4(x^5)' - 5(\sqrt{x})' = 5e^x - 20x^4 - \frac{5}{2\sqrt{x}} \quad \text{si } x \in \mathbb{R}^+$$

**Teorema 5.6** Si  $f$  y  $g$  son derivables en  $a$ , también lo son  $f \cdot g$  y  $f/g$ , (para esta última  $g(a)$  no nulo)

$$i) (f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$$

$$ii) (f/g)'(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2} \quad \text{si } g(a) \neq 0.$$

Usando otra notación la derivada del producto es

$$\frac{df \cdot g}{dx}(a) = \frac{df}{dx}(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot \frac{dg}{dx}(a)$$

y el cociente

$$\frac{d(f/g)}{dx}|_a = \left(\frac{df}{dx}|_a \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{dg}{dx}|_a\right) \frac{1}{g^2(a)}$$

**Demostración:** La demostración es simplemente un ejercicio de límites, sólo que es necesario “fabricar” los límites de las derivadas; en el caso del producto el “truco” es sumar y restar (sumar cero) el término  $f(a)g(a+h)$ .

$$\begin{aligned}(f \cdot g)'(a) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(a+h) - (f \cdot g)(a)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(a+h) - f(a))}{h} g(a+h) + f(a) \frac{g(a+h) - g(a)}{h}\end{aligned}$$

Como  $g$  es continua en  $a$  obtenemos lo buscado

$$(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

Para la otra parte dejaremos al lector buscar en cualquier libro de cálculo básico.  $\square$

**Observación:** Notemos que el teorema **no** dice que la derivada del producto es el producto de las derivadas sino que es algo bastante distinto, esto también ocurre con la derivada del cociente.

**Ejemplo 348** Calcular la derivadas de:

1.  $f(x) = 3x^4 \cos(x)$ , si  $x \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(x) = \tan(x)$ , si  $x \neq \pi/2 + n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$ .
3.  $f(x) = \cot(x)$ , si  $x \neq n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$ .
4.  $f(x) = \csc(x)$ , si  $x \neq n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$ .
5.  $f(x) = \sec(x)$ , si  $x \neq \pi/2 + n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$ .
6.  $f(x) = (5x^2 + 3x^4)^2$  si  $x \in \mathbb{R}$ .
7.  $f(x) = \frac{5x^7 - 3\sqrt{x}}{9\sqrt{x-4x^5}}$  si  $x \in \mathbb{R}^+$ .

**Solución:**

1.

$$\begin{aligned}f'(x) &= (3x^4)' \cos(x) + 3x^4 (\cos(x))' \\&= 12x^3 \cos(x) + 3x^4 (-\sin(x)) \\&= 12x^3 \cos(x) - 3x^4 \sin(x)\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}f'(x) = \left( \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)' &= \frac{(\sin(x))' \cos(x) - \sin(x) (\cos(x))'}{(\cos(x))^2} \\&= \frac{\cos(x) \cos(x) - \sin(x) (-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\&= \frac{\cos(x) \cos(x) + \sin(x) \sin(x)}{(\cos(x))^2} \\&= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)\end{aligned}$$

Así agregamos a nuestra tabla de derivadas a memorizar  $\frac{d \tan}{dx}(x) = \sec^2(x)$ , si  $x \neq \pi/2 + n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$

3.

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \left( \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} \right)' &= \frac{(\cos(x))' \operatorname{sen}(x) - \cos(x)(\operatorname{sen}(x))'}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\
 &= \frac{-\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x) - \cos(x) \cos(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\
 &= -\frac{\operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(x) + \cos(x) \cos(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\
 &= -\frac{1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{csc}^2(x)
 \end{aligned}$$

De esta forma  $\frac{d \cot}{dx}(x) = -\operatorname{csc}^2(x)$ , si  $x \neq n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$  (otra a memorizar).

4.

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \left( \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} \right)' &= \frac{(1)' \operatorname{sen}(x) - 1(\operatorname{sen}(x))'}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\
 &= \frac{-1(\cos(x))}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\
 &= \frac{-\cos(x)}{(\operatorname{sen}(x))^2} \\
 &= -\cot(x) \operatorname{csc}(x)
 \end{aligned}$$

$\frac{d \operatorname{csc}}{dx}(x) = -\cot(x) \operatorname{csc}(x)$ , si  $x \neq n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$ .

5.

$$\begin{aligned}
 f'(x) = \left( \frac{1}{\cos(x)} \right)' &= \frac{(1)' \cos(x) - 1(\cos(x))'}{(\cos(x))^2} \\
 &= \frac{-1(-\operatorname{sen}(x))}{(\cos(x))^2} \\
 &= \frac{\operatorname{sen}(x)}{(\cos(x))^2} \\
 &= \tan(x) \sec(x)
 \end{aligned}$$

$\frac{d \sec}{dx}(x) = \tan(x) \sec(x)$ , si  $x \neq \pi/2 + n\pi$   $n \in \mathbb{Z}$

6.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= (5x^2 + 3x^4)'(5x^2 + 3x^4) + (5x^2 + 3x^4)(5x^2 + 3x^4)' \\
 &\quad [(5x^2 + 3x^4)(5x^2 + 3x^4)]' \\
 &= (10x + 12x^3)(5x^2 + 3x^4) + (5x^2 + 3x^4)((10x + 12x^3)) \\
 &= 2(10x + 12x^3)(5x^2 + 3x^4)
 \end{aligned}$$

7.

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{(5x^7 - 3\sqrt{x})'(9\sqrt{x} - 4x^5) - (5x^7 - 3\sqrt{x})(9\sqrt{x} - 4x^5)'}{(9\sqrt{x} - 4x^5)^2} \\
 &= \frac{(35x^6 - \frac{3}{2\sqrt{x}})(9\sqrt{x} - 4x^5) - (5x^7 - 3\sqrt{x})(\frac{9}{2\sqrt{x}} - 20x^4)'}{(9\sqrt{x} - 4x^5)^2}
 \end{aligned}$$

En resumen se tiene

## Algebra de derivadas.

Si  $f$  y  $g$  son funciones derivables en  $a$  entonces  $\alpha f$ ,  $f + g$ ,  $f \cdot g$  son derivables en  $a$  y si  $g(a) \neq 0$  entonces  $f/g$  es derivable en  $a$ . Además

1.  $(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$
2.  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$
3.  $(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$
4.  $(\frac{f}{g})(a) = \frac{f'(a) \cdot g(a) - g'(a) \cdot f(a)}{g^2(a)} \quad g(a) \neq 0.$

**Corolario 5.7** Sea  $g$  función derivable en  $a$ ,  $g(a) \neq 0$  entonces la función  $1/g$  es derivable en  $a$  y

$$\frac{d}{dx}(1/g)(a) = -\frac{\frac{d}{dx}(g)(a)}{(g(a))^2} \quad o \quad (\frac{1}{g})'(a) = -\frac{g'(a)}{g^2(a)}$$

**Ejemplo 349** Con este corolario calculemos la derivada de  $f(x) = \frac{1}{x^n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(x^n)^2} = \frac{-n}{x^{n+1}}.$$

**Ejercicio 350** Calcule las derivadas de

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + \sen x} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{\sec x + 3 \cot x}$$

**Solución:**

$$\frac{df}{dx}(x) = -\frac{(2x + \cos x)}{(x^2 + \sen x)^2} \quad \frac{dg}{dx}(x) = -\frac{(\tan x \sec x - 3 \csc^2 x)}{(\sec x + 3 \cot x)^2}$$

### 5.1.3 Regla de la Cadena

Siguiendo con teoremas que nos permitan calcular derivadas de funciones usando las ya calculadas, veamos el teorema de la derivada de funciones compuestas, por ejemplo sabiendo que  $f(x) = \sen(x)$  y  $g(x) = 9x^3$  son funciones derivables ¿Qué podemos decir en cuánto a derivabilidad, de  $(f \circ g)(x) = \sen(9x^3)$  y de  $(f \circ f)(x)$ ?

**Ejemplo 351** Calculemos usando la definición, las derivadas de la función

$(f \circ f)(x) = \sen(\sen x)$  en el punto  $x = a$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sen(\sen(x)) - \sen(\sen(a))}{x - a} \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sen(\sen(x)) - \sen(\sen(a))}{\sen(x) - \sen(a)} \cdot \frac{\sen(x) - \sen(a)}{x - a} \\ &= \lim_{u \rightarrow \sen a} \frac{\sen(u) - \sen(b)}{u - b} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sen(x) - \sen(a)}{x - a} \quad \text{con } u = \sen x \text{ y } b = \sen(a) \\ &= \cos(b) \cdot \cos(a) \quad \text{con } b = \sen a \\ &= \cos(\sen(a)) \cdot \sen(a) \end{aligned}$$

**Observación:** Veremos a continuación un resultado “la regla de la cadena” que nos permitirá calcular esta y otras derivadas (de una función compuesta) de una manera más simple.

**Teorema 5.8 (Regla de la Cadena o Derivada de la compuesta)** Sea  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(X) \subset Y$ ,  $a \in X \cap X'$ ,  $b = f(a) \in Y \cap Y'$

Si existe  $f'(a)$  y  $g'(b)$  entonces existe  $(g \circ f)'(a)$  y

$$(g \circ f)'(a) = g'(b) \cdot f'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

o escrita de otra forma

$$\frac{d(g \circ f)}{dx}|_a = \frac{dg}{dx}|_b \cdot \frac{df}{dx}|_a$$

**Ejemplo 352** Sean  $g(x) = \cos(x)$ ,  $f(x) = 7x^3 + \sqrt{x}$ ,  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}^+$  y  $\text{Rec}f \subset \mathbb{R} = \text{Dom}g$  por lo tanto, para  $a \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}(g \circ f)'(a) &= g'(f(a))f'(a) \\ &= g'(7a^3 + \sqrt{a}) \cdot (21a^2 + \frac{1}{2\sqrt{a}})\end{aligned}$$

ya que  $g'(x) = -\sin x$   
se tiene

$$(g \circ f)'(a) = (-\sin(7a^3 + \sqrt{a})) \cdot (21a^2 + \frac{1}{2\sqrt{a}})$$

**Ejercicio 353** Sea  $f'(x) = x^3 e^{x^2}$ ,  $f(1) = 0$  y  $g(x) = \sqrt{(x+1)^2 + 3}$   
Calcule  $(g \circ f)'(1)$ .

**Solución:** Por regla de la cadena

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Luego

$$(g \circ f)'(1) = g'(f(1)) \cdot f'(1) \tag{5.1}$$

$$\text{pero } f'(1) = 1^3 e^{1^2} = e \text{ y } g'(x) = \frac{2(x+1)}{2\sqrt{(x+1)^2 + 3}}.$$

$$\text{de donde } g'(f(1)) = g'(0) = \frac{2}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{2}.$$

Por lo tanto, reemplazando en 5.1

$$(g \circ f)'(1) = \frac{1}{2} \cdot e = \frac{e}{2}$$

**Ejemplo 354** Sea  $g(x) = \sin(\sin x)$  donde  $g = f \circ f$  con  $f(x) = \sin x$  entonces  $g'(x) = f'(f(x))f'(x) = \cos(\sin x) \cos x$ .

**Ejemplo 355** Sea  $f(x) = \sqrt{3x^4 + \cos(x) + 9}$ ,  $x \in \mathbb{R}$

Como  $f$  puede ser escrita como la compuesta de dos funciones más simples, como sigue:  $f(x) = h(3x^4 + \cos(x) + 9) = (h \circ l)(x)$  donde  $h(x) = \sqrt{x}$  y  $l(x) = 3x^4 + \cos(x) + 9$ , son funciones derivables, se tiene usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx}|_x &= h'(l(x))l'(x) \text{ y como } h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{l(x)}}(12x^3 - \sin(x)) \\ &= \frac{12x^3 - \sin(x)}{2\sqrt{3x^4 + \cos(x) + 9}}.\end{aligned}$$

**Ejemplo 356** Sea  $f(x) = \sec(2x^5 + 4e^x)$ . Calculemos  $f'(x)$

Tenemos que  $f(x) = \sec(h(x))$  con  $h(x) = 2x^5 + 4e^x$  luego

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d \sec}{dx} \Big|_{h(x)} \cdot \frac{dh}{dx} \Big|_x \\ &= \sec(x) \tan(x) \Big|_{h(x)} \cdot (10x^4 + 4e^x) \\ &= \sec(h(x)) \tan(h(x)) (10x^4 + 4e^x) \\ &= \sec(2x^5 + 4e^x) \tan(2x^5 + 4e^x) (10x^4 + 4e^x) \end{aligned}$$

**Ejemplo 357** Sea  $f$  una función derivable en  $x = a$ .

Calculemos la derivada de  $g(x) = (f(x))^n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Como  $g(x) = (h \circ f)(x)$  donde  $h(x) = x^n$ , usando la regla de la cadena tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx} \Big|_a &= \frac{dg}{dx} \Big|_{f(a)} \cdot \frac{df}{dx} \Big|_a \\ &= n(f(a))^{n-1} \cdot \frac{df}{dx}(a) \end{aligned}$$

Así obtenemos la siguiente formula

$$\frac{df^n}{dx}(x) = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

que en el caso de  $f(x) = 3x^2 + \cos x$  nos queda

$$\frac{d(3x^2 + \cos x)^5}{dx} = 5(3x^2 + \cos x)^{5-1} (6x - \sin x)$$

**Ejemplo 358** La regla de la cadena por inducción se puede generalizar a la composición de más de dos funciones por ejemplo calculemos la derivada de

$$f(x) = (g \circ h \circ j \circ k \circ l)(x)$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{dx} \Big|_x &= \frac{d(g \circ h \circ j \circ k \circ l)}{dx} \Big|_x \\ &= \frac{(g \circ h \circ j \circ k)}{dx} \Big|_{l(x)} \frac{dl}{dx}(x) \\ &= \frac{(g \circ h \circ j)}{dx} \Big|_{k \circ l(x)} \frac{dk}{dx} \Big|_{l(x)} \frac{dl}{dx}(x) \\ &= \frac{(g \circ h)}{dx} \Big|_{j \circ k \circ l(x)} \frac{dj}{dx} \Big|_{(k \circ l)(x)} \frac{dk}{dx} \Big|_{l(x)} \frac{dl}{dx}(x) \\ &= \frac{(g)}{dx} \Big|_{h \circ j \circ k \circ l(x)} \frac{dh}{dx} \Big|_{j \circ k \circ l(x)} \frac{dj}{dx} \Big|_{(k \circ l)(x)} \frac{dk}{dx} \Big|_{l(x)} \frac{dl}{dx}(x) \end{aligned}$$

**Ejemplo 359** Calculemos la derivada de

$$f(x) = \sec(\tan(x^2 + 7 \cos x)^4)$$

**Solución:** Usando la regla de la cadena obtenida en el ejemplo 358 tenemos

$$\frac{df}{dx} = \frac{d \sec x}{dx} \Big|_{\sec(\tan(x^2 + 7 \cos x)^4)} \frac{d \sec}{dx} \Big|_{\tan(x^2 + 7 \cos x)^4} \frac{d \tan}{dx} \Big|_{(x^2 + 7 \cos x)^4} \frac{x^4}{dx} \Big|_{x^2 + 7 \cos x} (2x - 7 \sin x)$$

Calculemos cada derivada indicada y realizando las evaluaciones correspondiente tenemos

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= [\cos(\sec(\tan(x^2 + 7 \cos x)^4))] [\tan(\tan(x^2 + 7 \cos x)^4) \sec(\tan(x^2 + 7 \cos x)^4)] \\ &\quad [\sec^2(x^2 + 7 \cos x)^4] [4(x^2 + 7 \cos x)^3] [2x - 7 \sin x] \end{aligned}$$



**Ejercicio 360** Usando la regla de la cadena, pruebe que si  $f$  es diferenciable en  $D$ , entonces

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x) \quad \forall x \in D$$

**Solución:** Consideremos la función diferenciable en  $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto e^x \end{aligned}$$

Por hipótesis  $f: D \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable en  $D$ , luego por el teorema regla de la cadena  $g \circ f$  es diferenciable en  $D$  y

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) \quad (5.2)$$

donde  $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = e^{f(x)}$  y  $g'(x) = e^x$ .

Así  $g'(f(x)) = e^{f(x)}$ .

Por lo tanto en 5.2 se tiene

$$(e^{f(x)})' = e^{f(x)} \cdot f'(x)$$

**Ejemplo 361** Calcule la derivada de las siguientes funciones

1.  $e^{\sin x}$

2.  $e^{\sqrt{x} + \cos x}$

**Solución:**

1.  $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} \cdot (\sin x)' = e^{\sin x} \cdot \cos x$

2.  $(e^{\sqrt{x} + \cos x})' = e^{\sqrt{x} + \cos x} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x \right)$ .

**Ejercicio 362** Sean  $f$  y  $g$  funciones tales que

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \text{ y } f(x) > 0\} \neq \emptyset$$

*Demostrar que*

$$((f(x))^{g(x)})' = (f(x))^{g(x)} \cdot (g'(x) \ln(f(x)) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \quad \forall x \in D$$

**Solución:** Sabemos por propiedad del logaritmo que

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}$$

luego por ejercicio anterior

$$((f(x))^{g(x)})' = e^{g(x) \ln f(x)} \cdot (g(x) \ln f(x))' \quad (5.3)$$

pero  $(g(x) \ln f(x))'$  es la derivada de un producto y de composición de funciones, luego

$$(g(x) \ln f(x))' = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Así reemplazando en 5.3

$$((f(x))^{g(x)})' = (f(x))^{g(x)} \cdot (g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}) \quad \forall x \in D$$

**Observación:** De lo anterior se obtiene:

$$(r^{f(x)})' = r^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \ln r \text{ si } r \text{ es una constante positiva}$$

$$(f(x)^r)' = r f(x)^{r-1} \cdot f'(x) \text{ si } f(x) > 0.$$

**Ejemplo 363** Calcular las derivadas de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = (x^2 + 2)^{\sqrt{x}}$

2.  $g(x) = 2^{x^2 + \cos x}$

3.  $h(x) = \operatorname{sen}^3(2x)$

**Solución:**

1.  $f(x) = e^{\sqrt{x} \ln(x^2+2)}$  luego aplicando el ejercicio anterior

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\sqrt{x} \ln(x^2+2)} (\sqrt{x} \cdot \ln(x^2 + 2))' \\ &= (x^2 + 2)^{\sqrt{x}} \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \ln(x^2 + 2) + \sqrt{x} \frac{2x}{x^2 + 2} \right) \end{aligned}$$

2.  $g(x) = e^{(x^2 + \cos x) \ln 2}$ , análogamente

$$\begin{aligned} g'(x) &= e^{(x^2 + \cos x) \ln 2} ((x^2 + \cos x) \ln 2)' \\ &= 2^{x^2 + \cos x} (2x - \operatorname{sen} x) \ln 2 \end{aligned}$$

3.  $h(x) = \operatorname{sen}^3(2x)$ ,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 3 \operatorname{sen}^2(2x) \cdot (\operatorname{sen}(2x))' \\ &= 3 \operatorname{sen}^2(2x) \cdot \cos(2x) \cdot 2 \end{aligned}$$

## Comentarios

1. Veamos geométricamente por qué debemos usar la regla de la cadena, para eso usaremos las funciones  $f(x) = \operatorname{sen} x$  y  $g(x) = \operatorname{sen}(4x)$ .

Si no usamos la regla cometemos el típico error de afirmar que  $\frac{dg}{dx} = \cos 4x$ , así en  $\pi/2$ ,  $\frac{dg}{dx}|_{\pi/2} = \cos 2\pi = 1$ .

Analizando los gráficos de  $f$  y  $g$  en la figura que sigue, podemos notar que  $L$ , recta tangente a la gráfica de  $g$  no tiene la misma pendiente que  $M$ , recta tangente a  $f$  puesto que las ondulaciones de  $g(x)$  (frecuencia de onda) son más rápida que las de  $f$ , obligando esto a tener mayor pendiente  $L$  que  $M$ .

2. Por regla de la cadena  $\frac{dg}{dx} = 4 \cos 4x$ , veamos via la definición como se obtiene este resultado.

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx}|_a &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(4(a+h)) - \operatorname{sen}(4a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(4a + 4h) - \operatorname{sen}(4a)}{h} \end{aligned}$$

Usando una identidad trigonométrica para  $\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta$  tenemos

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dx}|_a &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2 \cos(4a + 2h) \operatorname{sen}(2h)}{h} \\ &= 4 \lim_{h \rightarrow 0} \cos(4a + 2h) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(2h)}{2h} \\ &= 4 \cos(4a) \cdot 1 \end{aligned}$$

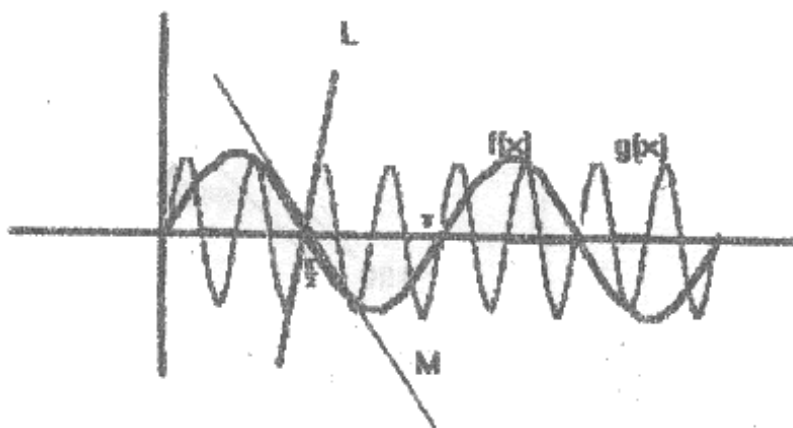


Figure 5.1:

## 3. Sobre las diferentes notaciones

Consideremos la función  $V$ , volumen de un cilindro de altura  $l$  y radio  $r$ , es decir, la función volumen  $V = \pi r^2 l$ . Si nos piden calcular la derivada de  $V$  en el punto  $a$ , es decir,  $V'(a)$  ¿Qué debemos contestar? No es lo mismo que nos pidan  $f'(a)$ , donde  $f(x) = 3 \sin x$ , ya que en este último caso está clara la variable, pero en el caso de  $V$  ¿Cuál es la variable? ¿Debe ser tomada  $r$  como variable independiente? ¿O a lo mejor  $l$ ?

En este caso la notación  $V'(a)$  es ambigua y es conveniente usar la notación

$$\frac{dV}{dr} \Big|_{r=a} \quad \text{o} \quad \frac{dV}{dl} \Big|_{l=a}$$

ya que de esta forma queda explícita la variable con respecto a la cual se quiere derivar.

Mediante la definición podemos ver que los resultados son totalmente diferentes si se toma una u otra variable

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dr} \Big|_{r=a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(a+h) - V(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi(a+h)^2 l - \pi a^2 l}{h} \\ &= 2al\pi \\ \frac{dV}{dl} \Big|_{l=a} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V(a+h) - V(a)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\pi r^2(a+h) - \pi r^2 a}{h} \\ &= \pi r^2 \end{aligned}$$

En el caso que una función tiene más de una variable (por ejemplo  $f(x, y, z) = y^2 \sin x + z^3$ ) se acostumbra a indicar la derivación con respecto a la variable y por ejemplo, como  $\frac{\partial f}{\partial y}$  a cambio de  $\frac{df}{dy}$ , así,  $\frac{\partial f}{\partial z}$  indica la derivada de  $f$  con respecto a la variable  $z$  solamente, quedando las otras variables como constante (es decir, se comporten como número para el momento de derivar).

**Ejemplo 364** Si  $f(x, y, z) = y^2 \sen x + z^3$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= y^2 \cos x + 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y \sen x + 0 \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= 0 + 3z^2\end{aligned}$$

**Ejemplo 365** En el caso del volumen del cilindro  $V = \pi r^2 l$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi r l \quad \frac{\partial V}{\partial l} = \pi r^2$$

**Ejemplo 366** Sea  $g(x, y, z) = 3x^2 + 7x^3 \sen y$  entonces tenemos que

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 6x + 21x^2 \sen y \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= 0 + 7x^3 \cos y \\ \frac{\partial g}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

Tomemos ahora la función  $f = 5x^2 + \sen x$ . Claramente tenemos, por lo anterior, que  $\frac{\partial f}{\partial x} = 10x + \cos x$  y que  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$  ya que en este último caso debemos pensar que la variable es  $y$ , pero  $f$  se comporta como constante respecto a esta variable así que su derivada es cero

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(y+h) - f(y)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5x^2 + \sen x - (5x^2 + \sen x)}{h} = 0$$

#### 4. Notaciones regla de la cadena

Sean  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$  supongamos que ambas tiene derivadas y que es posible hacer la compuesta  $y = f(g(x))$ . (es decir, si dan las hipotesis de la regla de la cadena). Entonces

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}$$

Notacionalmente el término izquierdo de la igualdad se refiere a la derivada de  $y$  calculada despues de haber hecho la compuesta de  $f$  y  $g$  ( $f \circ g$ ), en cambio el primer factor del términos derecho

$\frac{\partial y}{\partial v}$  se refiere a la derivada de  $y$  antes de hacer la compuesta.

**Ejemplo 367** Sea  $y$  una función de  $x$ , derivable con respecto a  $x$ . Calculemos las derivadas que se indican

1.  $\frac{d}{dx}(x^4 y^3) = x^4 3y \frac{dy}{dx} + 4x^3 y^3$
2.  $\frac{d}{dx}(x \sen y) = \sen y + x \cos y \frac{dy}{dx}$
3.  $\frac{d}{dx}(\tg xy) = (\sec^2(xy))(y + x \frac{dy}{dx})$
4.  $\frac{d}{dx}(2xy^3 + x \sen(xy)) = 2y^3 + 6xy^2 \frac{dy}{dx} + \sen(xy) + x \cos(xy)(y + x \frac{dy}{dx})$

5.  $\frac{d}{dx}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}$
6.  $\frac{d}{dy}(\sqrt{y}) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$
7.  $\frac{d}{dx}(\sin y + y^3) = \cos y \frac{dy}{dx} + 3y^2 \frac{dy}{dx}$
8.  $\frac{d}{dx}(\sin y + y^3) = \cos y + 3y^2$
9.  $\frac{d}{dz}(\sin y + y^3) = 0.$

**Ejercicio 368** Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1. Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $]a, b[$ . Si  $f$  y  $g$  son crecientes en  $]a, b[$  entonces  $f + g$  es creciente en  $]a, b[$ .
2. Si  $f$  es derivable en  $g(a)$  y  $g$  es continua en  $a$  pero no derivable en  $a$  entonces  $f \circ g$  no es derivable en  $a$ .

**Solución:**

1. Verdadero Si  $f$  y  $g$  son funciones creciente y derivables en  $]a, b[$  entonces  $f'(x) \geq 0$  y  $g'(x) \geq 0$  en  $]a, b[$ , luego

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]a, b[$$

Por lo tanto  $f + g$  es creciente en  $]a, b[$ .

2. Falso.

Sean  $g(x) = |x|$ ,  $f(x) = x^2$  y  $a = 0$   $g$  es continua en 0 pero no derivable en 0 y  $f$  es derivable en  $g(0) = 0$ , pero  $(f \circ g)(x) = |x|^2 = x^2$  la cual es derivable en 0

**Ejemplo 369** En qué puntos, existe la derivada de la función

$$f(x) = \begin{cases} \cos x & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1-2x} & x < 0 \end{cases}$$

**Solución:**

- a) Si  $x > 0$ ,  $f(x) = \cos x$ . Sabemos que  $\cos x$  es derivable para todo  $x \in \mathbb{R}$  en particular para  $x > 0$ ;  $f'(x) = -\sin(x)$ .
- b) Si  $x < 0$ ;  $f(x) = \sqrt[3]{1-2x}$ . En este caso  $f$  es la compuesta de funciones derivables y su derivada  $f'(x) = \frac{1}{3}(1-2x)^{-2/3} \cdot (-2)$ , por regla de la cadena.
- c) Si  $x = 0$ , debemos analizar por definición la derivada de  $f$ , ya que  $f$  está definida de forma distinta para  $x > 0$  y para  $x < 0$   
 Veamos si existe  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ .

Para esto calculemos

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 1}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\sin x}{x} \right) \left( \frac{-\sin x}{\cos x + 1} \right) \\ &= (-1)(0) = 0 \end{aligned}$$

por lo tanto  $f'_+(0) = 0$

Por otra parte

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt[3]{1-2x} - 1}{x} \\ &= -\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

(Para calcular el último límite tuvimos que racionalizar)

Como  $f'_-(0) \neq f'_+(0)$  entonces no existe  $f'(0)$  y en consecuencia

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}} & x < 0 \\ -\operatorname{sen} x & x > 0 \end{cases}$$

$\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R} - \{0\}$  (así para cualquier punto  $x \in \mathbb{R} - \{0\}$  existe la derivada de  $f$ ).

**Ejemplo 370** Consideremos ahora la función

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \cos(1/x^2) & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ \sqrt{x^2 + 2x^3} & x > 0 \end{cases}$$

Determinemos la derivada de  $f$ .

**Solución:**

- a) Es claro que para  $x < 0$  la función  $f(x) = x^3 \cos(1/x^2)$  es derivable por algebra y composición de funciones derivables, luego usando las reglas de derivación tenemos

$$f'(x) = 3x^2 \cos\left(\frac{1}{x^2}\right) + x^3 \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)\left(\frac{-2}{x^3}\right)$$

- b) Análogamente para  $x > 0$ ,  $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x^3}$  es derivable por composición de funciones derivables, luego

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2x^3}}(2x + 6x^2)$$

- c) Para  $x = 0$ , debemos analizar  $f'(0)$  mediante la definición, ya que  $f$  tiene distinto comportamiento en torno al cero, es decir, debemos calcular

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x^3}}{x} = 1$$

y el otro límite lateral

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 \cos(1/x^2)}{x} = 0$$

como son distintos, se concluye que el límite  $f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$  no existe.

En consecuencia  $f$  no es derivable en  $x = 0$  y por lo tanto la función  $f'(x)$  está definida solamente para  $\mathbb{R} - \{0\}$  y su valor es:

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos(1/x^2) + 2 \operatorname{sen}(1/x^2) & x < 0 \\ \frac{x+3x^2}{\sqrt{x^2+2x^3}} & x > 0 \end{cases}$$

**Ejemplo 371** ?'En qué puntos del intervalo  $[-1, 2[$  la función  $f(x) = [x] + |x - 1|$  es derivable?

**Solución:** Separando el dominio de  $f$  apropiadamente obtenemos la siguiente función definida por partes.

$$f(x) = \begin{cases} -x & -1 \leq x < 0 \\ 1 - x & 0 \leq x < 1 \\ x & 1 \leq x < 2 \end{cases}$$

Calculemos ahora su derivada

- a) Si  $-1 < x < 0$ ,  $f$  es derivable y  $f'(x) = -1$ , análogamente para  $0 < x < 1$  y  $1 < x < 2$  se sabe que  $f$  es derivable y  $f'(x) = -1$  para  $0 < x < 1$  y  $f'(x) = 1$  para  $1 < x < 2$ .
- b) En  $x = -1$ , sólo tiene sentido determinar  $f'_+(-1)$  (si existe) que por definición es la derivada de  $f$  en  $-1$ .

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-x - 1}{x + 1} = -1 \end{aligned}$$

Es claro que en  $x = 0$  y en  $x = 1$   $f$  es discontinua, luego  $f$  no es derivable en estos puntos, así  $f(x)$  es derivable en  $[-1, 2[ - \{0, 1\}$

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & -1 \leq x < 1; x \neq 0 \\ 1 & 1 < x < 2 \end{cases}$$

**Ejercicio 372** Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 + ax & x \leq 1 \\ x^2 + b & x > 1 \end{cases}$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$

Determine  $a$  y  $b$  de modo que  $f$  sea derivable en  $x = 1$ .

**Solución:**  $f$  será derivable en  $x = 1$  si y sólo si  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  existe (es decir  $f'_+(1) = f'_-(1)$ ).

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3 + ax - (3 + a)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{a(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} a = a \end{aligned}$$

Por otra parte;

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + b - (3 + a)}{x - 1} \end{aligned}$$

pero este límite podría existir sólo si  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + b - (3 + a) = 0$

pero  $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + b - (3 + a) = 1 + b - (3 + a)$ .

luego  $f'_+(1)$  podría existir sólo si  $1 + b - (3 + a) = 0$  de donde  $b = 2 + a$  por lo tanto;

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + b - (3 + a)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 2 + a - (3 + a)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2 \end{aligned}$$

Así  $f'_+(1) = f'_-(1) \iff a = 2$ , luego  $b = a + 2 = 4$ .

**Observación:** Si  $\lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + b - (3 + a) = c$  con  $c \neq 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + b - (3 + a)}{x - 1}$ , es de la forma  $\frac{c}{0}$  luego el límite no existe

Otra forma de resolver el problema, es determinar condiciones para que  $f$  sea continua (Si no lo fuera  $f$  no sería derivable), de donde

Obtenemos;

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

lo que equivale a determinar la condición

$$b = 2 + a$$

y luego calcular  $f'_-(1)$  y  $f'_+(1)$  usando la condición  $b = 2 + a$ .

**Ejercicio 373** Sea

$$f(x) = \begin{cases} x^5 + x^2 + 6 & x < 0 \\ A(\cos(3x) + 3\sin x) + B(x + 1) & x \geq 0 \end{cases}$$

Determinar  $A$  y  $B$  en  $\mathbb{R}$  para que  $f$  sea derivable en  $x = 0$ .

**Solución:** Primero determinemos condiciones para que  $f$  sea continua en  $x = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} A(\cos(3x) + 3\sin x) + B(x + 1) \\ &= A + B = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^5 + x^2 + 6 = 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $A + B = 6$

Calculemos  $f'(0)$  por definición

$$\begin{aligned} f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5 + x^2 + 6 - (A + B)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5 + x^2 + 6 - 6}{x} \text{ pues } A + B = 6 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^5 + x^2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x(x^3 + 1) = 0 \end{aligned}$$



Ahora por la derecha

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(\cos 3x + 3 \operatorname{sen} x) + B(x+1) - (A+B)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A \cos 3x + 3A \operatorname{sen} x + Bx - A}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(\cos 3x - 1)}{x} + \frac{3A \operatorname{sen} x}{x} + \frac{Bx}{x} \end{aligned}$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3A \operatorname{sen} x}{x} = 3A \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 3A$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{Bx}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} B = B$$

nos falta calcular

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{A(\cos(3x) - 1)}{x} &= A \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos^2(3x) - 1}{x(\cos(3x) + 1)} \\ &= A \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}^2(3x)}{x(\cos(3x) + 1)} \\ &= A \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(3x)}{x} \cdot \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x) + 1} \\ &= 3A \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\operatorname{sen}(3x)}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\cos(3x) + 1} \\ &= 3A \cdot (-1) \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Luego  $f'_+(0) = 3A + B$ ,  $f$  será derivable en  $x = 0$  si  $f'_+(0) = f'_-(0)$ , es decir,  $3A + B = 0$ , pero  $A + B = 6$ , luego resolviendo el sistema tenemos  $A = -3$  y  $B = 9$ .

**Ejercicio 374** Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x - 8 & x < -1 \\ 5x^4 - 4x^2 & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 4x^2 \cos(x-1) + 3x - 6 & x > 1 \end{cases}$$

i) Determinar  $f'(x)$ .

ii) Calcule el valor de  $A$  donde

$$A = f'(-2)f'(1/2) - f'(\pi + 1)$$

**Solución:**

a) Sea  $x < -1$  entonces  $f(x) = 3x^2 - 6x - 8$ ,  $f$  es derivable por algebra de funciones derivables y  $f'(x) = 6x - 6$ .

b) Sea  $-1 < x < 1$  entonces  $f(x) = 5x^4 - 4x^2$ . Por algebra de funciones derivables, tenemos  $f'(x) = 20x^3 - 8x$ .

c) Sea  $x > 1$  entonces  $f(x) = 4x^2 \cos(x-1) + 3x - 6$ . Por algebra de funciones derivables tenemos

$$f'(x) = 8x \cos^2(x-1) + 4x^2 \cdot (-\operatorname{sen}(x-1)) + 3$$

Notemos que  $f$  es continua en  $x = -1$  y en  $x = 1$ .

d) Calculemos  $f'(-1)$  por definición

$$\begin{aligned} f'_+(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x^4 - 4x^2 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{(5x^3 - 5x^2 + x - 1)(x + 1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} 5x^3 - 5x^2 + x - 1 = -12 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_-(-1) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2 - 6x - 8 - 1}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3(x + 1)(x - 3)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} 3(x - 3) = -12 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f'_+(-1) = f'_-(-1) = -12$

e) Falta calcular  $f'(1)$ .

$$\begin{aligned} f'_+(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 \cos(x - 1) + 3x - 6 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4x^2 \cos(x - 1) + 3x - 3 - 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x^2 \cos(x - 1) - 1)}{x - 1} + \frac{3x - 3}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x^2 \cos(x - 1) - 1)}{x - 1} + \frac{3(x - 1)}{x - 1} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3(x-1)}{x-1} = 3$  y

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4(x^2 \cos(x - 1) - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 \frac{(x^2 \cos(x - 1) - 1)}{x - 1} \cdot \frac{(x^2 \cos(x - 1) + 1)}{x^2 \cos(x - 1) + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 \frac{(x^4 \cos^2(x - 1) - 1)}{(x - 1)(x^2 \cos(x - 1) + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} 4 \frac{(x^4(1 - \sin^2(x - 1)) - 1)}{(x - 1)(x^2 \cos(x - 1) + 1)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x^4 - 1)}{(x - 1)(x^2 \cos(x - 1) + 1)} - \frac{(x^4 \sin^2(x - 1))}{(x - 1)(x^2 \cos(x - 1) + 1)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)}{(x - 1)(x^2 \cos(x - 1) + 1)} - \frac{x^4 \sin(x - 1)}{(x - 1)} \cdot \frac{\sin(x - 1)}{(x^2 \cos(x - 1) + 1)} \\ &= 4 \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 1)(x^2 + 1)}{(x^2 \cos(x - 1) + 1)} - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^4 \sin(x - 1)}{(x - 1)} \cdot \frac{\sin(x - 1)}{(x^2 \cos(x - 1) + 1)} \\ &= 4 \frac{4}{2} - 1 \cdot 0 = 8 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $f'_+(1) = 8 + 3 = 11$

$$\begin{aligned} f'_-(1) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5x^4 - 4x^2 - 1}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(5x^3 + 5x^2 + x + 1)(x - 1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} 5x^3 + 5x^2 + x + 1 = 12 \end{aligned}$$

Luego  $f'_+(1) \neq f'_-(1)$ . Por lo tanto  $f'(1)$  no existe.

Así el dominio  $\text{Dom} f' = \mathbb{R} - \{1\}$ .

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x \leq -1 \\ 20x^3 - 8x & -1 < x < 1 \\ 8x \cos(x - 1) - 4x^2 \sin(x - 1) + 3 & x > 1 \end{cases}$$

ii)  $f'(-2) = -18$ ,  $f'(1/2) = -3/2$ ,  $f'(\pi + 1) = 8(\pi + 1)(-1) + 3$  luego

$$A = f'(-2)f'(1/2) - f'(\pi + 1) = -18 \cdot \frac{-3}{2} + -8(\pi + 1) + 3$$

Una herramienta útil y simple para determinar si una función es derivable en algún punto es la siguiente proposición que se puede demostrar en base al teorema de L'Hopital que veremos más adelante.

**Proposición 5.9** Si  $f$  es continua en  $a$ .

- a) Si los límites  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$  existen y son iguales a  $L \in \mathbb{R}$  entonces  $f$  es derivable en  $a$  y  $f'(a) = L$ .
- b) Si los límites  $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^-} f'(x)$  existen (son números reales) y son diferentes entonces  $f$  no es derivable en  $a$ .

Consideremos la función dada en el ejercicio 374

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 6x - 8 & x < -1 \\ 5x^4 - 4x^2 & -1 \leq x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 4x^2 \cos(x - 1) + 3x - 6 & x > 1 \end{cases}$$

Como  $f$  es continua en  $x = 1$ , pues

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

además

$$f'(x) = \begin{cases} 6x - 6 & x < -1 \\ 20x^3 - 8x & -1 < x < 1 \\ 1 & x = 1 \\ 8x \cos(x - 1) - 4x^2 \sin(x - 1) + 3 & x > 1 \end{cases}$$

y existen  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$  pues

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} 8x \cos(x - 1) - 4x^2 \sin(x - 1) + 3 = 11$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 20x^3 - 8x = 12$$

pero  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$  luego según la proposición anterior  $f$  no es derivable en  $x = 1$ .

Sin embargo;  $f$  es derivable en  $x = -1$  pues

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 20x^3 - 8x = -12$$

y

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} 6x - 6 = -12$$

y  $f$  es continua en  $-1$ .

**Observación:** Note que la hipótesis de continuidad es fundamental. Lo podemos ver en el siguiente ejemplo.

$$f(x) = \begin{cases} 5x + 7 & x \geq 3 \\ 5x + 8 & x < 3 \end{cases}$$

En este caso se tiene que  $\lim_{x \rightarrow 3^+} f'(x) = 5 = \lim_{x \rightarrow 3^-} f'(x)$ , pero  $f$  no es derivable en  $x = 3$  pues  $f$  no es continua en  $x = 3$

Volviendo al ejemplo

$$f(x) = \begin{cases} 3 + ax & x \leq 1 \\ x^2 + b & x > 1 \end{cases}$$

$f$  es continua en  $x = 1$  si y sólo si  $b = 2 + a$ .

Además para  $x \neq 1$ , se tiene

$$f'(x) = \begin{cases} a & x < 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

Como los límites  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$  existen; pues

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = a, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = 2$$

entonces;  $f$  será derivable en  $x = 1$  si

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x)$$

es decir,  $a = 2$  y como  $b = 2 + a$ , entonces  $b = 4$ .

Analogamente en el ejercicio 373

$$f(x) = \begin{cases} x^5 + x^2 + 6 & x < 0 \\ A(\cos(3x) + 3\sin x) + B(x + 1) & x \geq 0 \end{cases}$$

$f$  es continua en  $x = 0$  si  $A + B = 6$ . Además

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4 + 2x & x < 0 \\ A(-3\sin(3x) + 3\cos x) + B & x > 0 \end{cases}$$

Los límites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  y  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x)$  existen pues

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} A(-3\sin(3x) + 3\cos x) + B = 3A + B$$

y

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 5x^4 + 2x = 0$$

luego  $f$  será derivable si

$$3A + B = 0 \text{ con } A + B = 6$$

de donde  $A = -3$  y  $B = 9$ .

### 5.1.4 Derivada de una función Inversa

**Corolario 5.10** *Cálculo de derivada de una función inversa*

Sea  $f : X \rightarrow \text{Recf} \subset \mathbb{R}$  función invertible y derivable, denotemos por  $g$  a la inversa  $f^{-1}$ , así  $g : \text{Recf} \rightarrow X$ .

Si  $f$  es derivable en  $a \in X \cap X'$  con derivada  $f'(a) \neq 0$  y  $g$  es derivable continua en  $f(a) = b$ .

$$\frac{d(f)^{-1}}{dx}|_b = \frac{1}{\frac{df}{dx}|_a}$$

Es decir, la derivada de la función inversa  $f^{-1}$  en  $b$  se calcula usando el inverso multiplicativo de la derivada de  $f$  en  $a$  (recordemos que  $f'(a)$  es número real no nulo).

**Demostración:** Se sabe que  $f \circ f^{-1}(x) = x$  y que la derivada de  $x$  en todo punto es 1, usando la regla de la cadena

$$\begin{aligned} (f \circ f^{-1})'(b) &= 1 \\ f'(f^{-1}(b)) \cdot (f^{-1})'(b) &= 1 \end{aligned}$$

Como  $f(a) = b$

$$f'(a) \cdot (f^{-1})'(b) = 1$$

ya que  $f'(a)$  es no cero podemos obtener la igualdad y en

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$$

o cambiando de notación

$$\frac{df^{-1}}{dx}|_b = \frac{1}{f'(a)}$$

□

**Ejemplo 375** Calculemos la derivada de  $f(x) = \ln(x)$  en  $b \in \mathbb{R}^+$

Recordemos que  $\ln(x)$  es la función inversa de  $\exp(x) = e^x$ , así  $\ln b = a$  es equivalente a  $b = e^a$ .

Usando corolario

$$\frac{d \ln}{dx}|_b = \frac{1}{\frac{d \exp}{dx}|_a} = \frac{1}{e^a} = \frac{1}{b}$$

De esta forma en nuestra tabla de derivadas debemos anotar

$$\frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{x} \quad \text{o} \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{si } x > 0$$

**Ejemplo 376** Calculemos ahora la derivada de  $\arctan(x)$ . Recordemos que la inversa local de  $\tan(x)$  es  $\arctan(x)$ , es decir, para  $x$  apropiados se tiene

$$\arctan(\tan(x)) = x \quad \text{y} \quad x = \tan(\arctg(x))$$

Usando corolario en un punto  $b = \tan(a)$ , donde  $\sec^2(a) \neq 0$  tenemos:

$$\frac{d \arctan}{dx}(x)|_b = \frac{1}{\tan'(a)} = \frac{1}{\sec^2(a)}$$

Con el objeto de dejar el resultado en términos de  $b$  usaremos la identidad trigonométrica

$$\sec^2(x) = \tan^2(x) + 1$$

De esta forma

$$\frac{d \arctan}{dx}(x)|_{x=b} = \frac{1}{\tan^2(a) + 1} = \frac{1}{b^2 + 1}$$

Como  $b$  era sólo un representante, tenemos

$$\arctan'(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

Análogamente se puede probar que

$$\operatorname{arccotg}'(x) = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

sólo que aquí debe utilizar otra identidad trigonométrica. ( $-\csc^2 x = \operatorname{ctg}^2 x + 1$ )

**Observación:** Ahora que hemos logrado una técnica para encontrar derivada de funciones inversas creemos que es bueno hacer notar lo que es el resultado del teorema de la función inversa.

**Teorema 5.11 (Función inversa)** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , una función,  $I$  un vecindad de  $a$  tal que  $f$  sea derivable en  $a$  con derivada no nula ( $f'(a) \neq 0$ ).

Entonces existe  $H$  vecindad de  $a$  ( $H \subset I$ ) y  $J$  vecindad de  $f(a)$  tal que  $f : H \rightarrow J$  es invertible con inversa diferenciable  $f^{-1} : J \rightarrow H$  verifica la siguiente igualdad

$$\frac{df^{-1}}{dx}|_b = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$$

es decir

$$\frac{df^{-1}}{dx}|_b = (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}, \quad \text{donde } a = f^{-1}(b)$$

**Observación:** Supongamos que  $f$  y  $g$  son funciones derivables y que  $(f \circ g) = Id$  entonces necesariamente sus derivadas son no nulas.

Por regla de la cadena se tiene

$$f'(g(x))g'(x) = 1$$

y como se trata de la multiplicación de dos números reales, ambos deben ser no nulos, mas aún, uno debe ser el inverso multiplicativo del otro.

Recordemos que seno es una función de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  que no es inyectiva y tampoco es sobreyectiva, como solución a esto último podríamos considerarla como  $\operatorname{sen} : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ , pero el problema de la inyectividad aún permanece. En definitiva no se puede pensar que  $\operatorname{sen}$  tenga inversa de  $[-1, 1]$  en  $\mathbb{R}$ , pero  $\frac{d \operatorname{sen}}{dx}(x)|_{x=\pi} = -1$  que es distinto de 0, luego el teorema de la función inversa nos garantiza la existencia de una inversa.

¿Cuál es la contradicción entre estas últimas dos frases?

Ninguna, puesto que el teorema de la función inversa no habla de una función inversa de  $\operatorname{sen}$  con dominio en  $[-1, 1]$  y recorrido  $\mathbb{R}$ , sino que nos garantiza la existencia de una inversa local. Esto significa que existe  $J$  vecindad de  $f(a)$  y  $H$  vecindad de  $a$  tal que  $f : H \rightarrow J$  tiene inversa. En el caso de  $f(x) = \operatorname{sen} x$  exist  $J$  vecindad de cero donde  $f(\pi) = 0$  y  $H$  vecindad de  $\pi$  tal que  $\operatorname{sen} : H \rightarrow J$  tiene inversa.

Con el teorema de la función inversa podemos lograr variar inversas locales ya que basta tomar puntos  $x_0$  que satisfagan la hipótesis

$$\frac{d \operatorname{sen} x}{dx}|_{x_0} \neq 0$$

En los puntos donde se anula la derivada de seno (por ejemplo en  $\pi/2$ ) es imposible encontrar una inversa local de ella, ya que para todo intervalo abierto que contenga el punto, seno siempre será no inyectiva.

Ya que hemos hablado de la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$ , calculemos la derivada de  $f^{-1}(x) = \arcsen x$ , para  $x$  apropiado en el ejercicio que sigue

**Ejercicio 377** Calcular la derivada de  $f^{-1}(x) = \arcsen x$

**Solución:** Sea  $f(x) = \operatorname{sen}(x)$  donde  $\operatorname{sen} : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow ]-1, 1[$  entonces  $\cos a > 0$  si  $a \in ]-\pi/2, \pi/2[$  y  $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{\cos a}$

Sea  $z = \cos a$  entonces  $z^2 = \cos^2 a = 1 - \operatorname{sen}^2 a$ . luego  $z = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}$  pues  $z > 0$  pero  $a = \arcsen b$  luego

$$z = \sqrt{1 - \operatorname{sen}(\arcsen(b))} \quad z = \sqrt{1 - b^2}$$

Por lo tanto

$$\arcsen' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

En cambio si consideramos  $\operatorname{sen} : ]\pi/2, 3\pi/2[ \rightarrow ]-1, 1[$  entonces  $\cos a < 0$  si  $a \in ]\pi/2, 3\pi/2[$  y  $(f^{-1})' = \frac{1}{\cos a}$  pero

$$\cos a = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a} = -\sqrt{1 - \operatorname{sen}(\arcsen b)}$$

por lo tanto si consideramos  $f^{-1}$  por  $\arcsen x$ , se tendrá

$$(\arcsen)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

considerando  $\operatorname{sen} : ]\pi/2, 3\pi/2[ \rightarrow ]-1, 1[$ .

**Observación:** Se acostumbra a reservar  $\arcsen$  a la inversa de la función seno definida en su rama principal, es decir

$$\operatorname{sen} : ]-\pi/2, \pi/2[ \rightarrow ]-1, 1[$$

y

$$(\arcsen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Análogamente se calcula la derivada de las inversas de coseno, cotangente, secante y cosecante, definida en su rama principal obteniendo:

$$\begin{aligned} (\arcsen)'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos)'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\operatorname{arctg})'(x) &= \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccotg})'(x) &= \frac{-1}{1+x^2} \\ (\operatorname{arcsec})'(x) &= \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} & (\operatorname{arccosec})'(x) &= \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \end{aligned}$$

## 5.2 Derivada de Orden Superior

Consideremos la función  $f(x) = 3x^4 + 5\operatorname{sen}^2 x$ , que como ya hemos visto su derivada es

$$\frac{df(x)}{dx} = 12x^3 + 10\operatorname{sen} x \cos x = g(x)$$

Podemos notar que  $g$  también es derivable y tiene como derivada a

$\frac{dg}{dx}(x) = 36x^2 + 10\cos^2 x - 10\operatorname{sen}^2 x = h(x)$ , nuevamente podemos calcular la derivada de esta y obtener  $\frac{dh}{dx}(x)$ .

Se dice que  $g$  es la derivada de primer orden y se anota  $\frac{df}{dx}$  la función  $h$  es la derivada de segundo orden de  $f$  y se anota  $\frac{df^2}{dx^2}$ ,  $\frac{dh}{dx}$  corresponde a la derivada de tercer orden de  $f$  y se anota  $\frac{df^3}{dx^3}$ .

**Definición 5.12** Sea  $f$  una función derivable en  $]a, b[$  y sea  $\frac{df}{dx}$  su derivada, se define la derivada de segundo orden de  $f$  en  $c \in ]a, b[$  como

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{df}{dx}(c+h) - \frac{df}{dx}(c)}{h}$$

y se denota este límite por  $\frac{d^2 f}{dx^2}(c)$ .

Se dice que  $f$  tiene derivada de orden 2 en  $]a, b[$  si  $f$  tiene derivada de segundo orden en cada punto de  $]a, b[$ .

Existiendo la derivada de segundo orden de  $f$  en  $]a, b[$  se puede definir en forma analoga la derivada de tercer orden en  $c \in ]a, b[$  como el siguiente límite (si es que existe).

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{d^2 f}{dx^2}(c+h) - \frac{d^2 f}{dx^2}(c)}{h}$$

análogamente se define la derivada de orden  $n+1$  como el límite que involucra la derivada de orden  $n$  y se anotará por  $\frac{d^{n+1} f}{dx^{n+1}}(c)$ .

### Notaciones:

$$D^2 f(c) = f''(c) = \frac{d^2 f}{dx^2}(c); \quad D^3 f(c) = f'''(c) = \frac{d^3 f}{dx^3}(c); \quad D^n f(c) = f^{(n)}(c) = \frac{d^n f}{dx^n}(c).$$

Se definen los siguientes conjuntos

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^0]a, b[ &= \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua en } ]a, b[\} \\ \mathcal{C}^1]a, b[ &= \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es derivable en } ]a, b[ \text{ con derivada continua} \} \\ \mathcal{C}^2]a, b[ &= \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es dos veces derivable en } ]a, b[ \text{ con derivada continua} \} \\ \mathcal{C}^n]a, b[ &= \{f : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es } n \text{ veces derivables en } ]a, b[ \text{ con derivada continua} \} \end{aligned}$$

Con estos conjuntos podemos definir la siguiente función, llamada **operador diferenciable**.

$$\begin{aligned} D : \mathcal{C}^n]a, b[ &\rightarrow \mathcal{C}^{n-1}]a, b[ \\ f &\mapsto Df(x) = \frac{df}{dx}(x) \end{aligned}$$

Así

1. si  $f(x) = 3x^2 + \sin x$ ,  $Df(x) = 6x + \cos x$
2. si  $g(x) = \ln(x+1) + \sqrt{x+1}$ ,  $Dg(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$ .
3. si  $h(x) = \sqrt[3]{x^2} + x^3$ ,  $Dh(x) = \frac{2}{3}x^{-1/3} + 3x^2$ .

Notemos que la función  $g \in \mathcal{C}^1]0, 2[$  pero  $Dg \notin \mathcal{C}^1] - 2, 2[$ . Análogamente se puede definir el operador diferencial de orden  $k$ ,  $D^k$

$$\begin{aligned} D^k : \mathcal{C}^n]a, b[ &\rightarrow \mathcal{C}^{n-k}]a, b[ , \quad n \geq k \\ f &\mapsto D^k f(x) = \frac{d^k f}{dx^k}(x) \end{aligned}$$

Así

1. si  $f(x) = \sin 5x$ , entonces  $D^4 f(x) = 5^4 \sin 5x$
2. si  $f(x) = e^x$ , entonces  $D^{20} f(x) = e^x$ .
3. si  $f(x) = x^5$ , entonces  $D^7 f(x) = 0$  y  $D^5 f(x) = 5!$ .
4. si  $f(x) = e^{2x}$  entonces  $D^7 f(x) = 2^7 e^{2x}$ .

Como  $D^0, D^1, D^2, D^3, D^4, D^5, \dots$ , son funciones, se puede definir la suma y multiplicación por escalar de ellas obteniéndose otras funciones, por ejemplo.

$$\begin{aligned} 8D^0 + 3D + 7D^5 - 4D^3 : \mathcal{C}^n]a, b[ &\rightarrow \mathcal{C}^{n-1}]a, b[ \\ f &\mapsto 8f + \frac{df}{dx}(x) + 7\frac{d^5 f}{dx^5}(x) - \frac{d^3 f}{dx^3}(x) \end{aligned}$$

Aquí se entiende que  $D^0 : \mathcal{C}^n]a, b[ \rightarrow \mathcal{C}^n]a, b[$  y  $D^0 f = f$ .



**Ejercicio 378** Sea  $L = 3D^2 + D + 4D^0$  y  $f(x) = x^3 + 7x \operatorname{sen} x$ ,  $g(x) = 5x^2 + \cos x$ ,  $h(x) = \ln x + \operatorname{tg} x$ . Calcule  $Lf$ ,  $Lg$ ,  $Lh$ .

1.

$$\begin{aligned} Lf &= 3 \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} + 4f \\ Lf &= 3 \left[ 6x + \frac{d}{dx} (7 \operatorname{sen} x + 7x \cos x) \right] + 3x^2 + 7 \operatorname{sen} x + 7x \cos x + 4x^3 + 28x \operatorname{sen} x \\ &= 18x + 3[7 \cos x + 7 \cos x - 7x \operatorname{sen} x] + 7 \operatorname{sen} x + 7x \cos x + 4x^3 + 28x \operatorname{sen} x \\ &= 18x + 4x^3 + (42 + 7x) \cos x + (7 + 7x) \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} Lg &= 3 \frac{d^2 g}{dx^2} + \frac{dg}{dx} + 4g \\ Lg &= 3[10 - \cos x] + 10x - \operatorname{sen} x + 20x^2 + 4 \cos x \\ &= 30 + 20x^2 + \cos x + 10x - \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} Lh &= 3 \frac{d^2 h}{dx^2} + \frac{dh}{dx} + 4h \\ Lh &= 3 \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{x} + \sec^2 x \right) + \frac{1}{x} + \sec^2 x + 4 \ln x + 4 \operatorname{tg} x \\ &= -\frac{3}{x^2} + 6 \sec^2 x \operatorname{tg} x + \frac{1}{x} + \sec^2 x + 4 \ln x + 4 \operatorname{tg} x \end{aligned}$$

**Ejercicio 379** Sea  $L = D + 3D^0$ ,  $M = D + 2D^0$  y  $N = D^2 + 5D + 6D^0$ .

1. Sea  $f(x) = 5x^4 + 4 \operatorname{sen} x$ ,  $g(x) = \operatorname{tg} x \sec x$ ,  $h(x) = \arcsen x$

Calcule  $L \circ M(f) = L(M(f))$ ,  $M \circ L(f)$ ,  $N(f)$  Compare los tres resultados y diga si son iguales o distintos.

Repita lo anterior pero esta vez use las funciones  $g$  y  $h$ .

2. Tome una función genérica  $f \in \mathcal{C}^2[a, b[$  y pruebe que

3. Sea  $H = D + 2$ , pruebe que  $H \circ H \circ H = D^3 + 6D^2 + 12D + 8D^0$ .

**Ejercicio 380** Considere la ecuación

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + f = 0$$

Una solución de ella en  $]a, b[$ , es una función  $f \in \mathcal{C}^2[a, b[$  que satisface la igualdad, por ejemplo la función  $f(x) = \operatorname{sen} x$  es solución de ella ya que

$$\frac{d^2 \operatorname{sen} x}{dx^2} + \operatorname{sen} x = -\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x = 0$$

Muestre que las funciones  $g(x) = \cos x$ ,  $h(x) = 3 \cos x$ ,  $l(x) = 7 \operatorname{sen} x$  y en general cualquier función  $n(x) = \alpha \operatorname{sen} x + \beta \cos x$ , donde  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , son soluciones de la ecuación

**Ejercicio 381** 1. Muestre que  $e^{ax}$  y  $xe^{ax}$  son soluciones de la ecuaciones

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - 2a \frac{df}{dx} + a^2 f = 0 \quad a \text{ constante}$$

2. Muestre que  $h(x) = \alpha e^{ax} + \beta x e^{ax}$  es también solución de la ecuación (cualquier sea  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ).

**Ejercicio 382** 1. Muestre que  $2x^3 \ln x$ ,  $x^3$ ,  $x^2(2 \ln x - 1)$  funciones de  $C^2]0, \infty[$  son soluciones de la ecuación

$$x^2 \frac{d^2 f}{dx^2} - 5x \frac{df}{dx} + 9f = 0$$

2. Muestre que las funciones de  $C^1] -1, 1[$ ,  $3x$ ,  $\frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} - 1$ ,  $\frac{x}{2}$  son soluciones de la ecuación

$$(1 - x^2)D^2 f - 2xDf + 2f = 0$$

**Ejercicio 383** Muestre que  $f(x) = (2 + 2x + x^2 + ce^x)^{-1}$  es solución de la ecuación de Bernoulli

$$\frac{df}{dx} + f = (xf)^2$$

**Ejercicio 384** Muestre que  $y = \operatorname{ctg} x$  es solución de la ecuación de Riccati

$$y' - \operatorname{sen}^2 xy^2 + \frac{y}{\operatorname{sen} x \cos x} + \cos^2 x = 0$$

**Ejercicio 385** Muestre que todas las funciones cúbicas  $y = (x + c)^3$  son soluciones de la ecuación

$$y' = 3y^{2/3}$$

**Ejercicio 386** Muestre que los arcos de círculos  $y_1 = \sqrt{c^2 - x^2}$  e  $y_2 = -\sqrt{c^2 - x^2}$  son soluciones de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

### 5.3 Funciones definidas implícitamente

En geometría analítica, hemos visto que la ecuación

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$$

tiene como representación gráfica una hipérbola que tiene como eje principal el eje  $x$  y vértices  $(0, 2)$  y  $(0, -2)$ .

Si recordamos la materia de funciones podemos afirmar que tomando algunos sectores de la hipérbola se puede definir funciones, por ejemplo,

$$y = 3\sqrt{\frac{x^2}{4} - 1}$$

con  $x \in [2, \infty[$  o la misma expresión pero tomando  $x$  en el conjunto  $] -\infty, -2]$  la cual se obtiene también al despejar  $y$  pero esta vez tomando el valor negativo (bajo el eje  $x$ ) y el intervalo  $] -\infty, -2]$  (rama izquierda de la hipérbola).

Así como en el caso de la función inversa, el objetivo de esta parte no es determinar en forma tan explícita la o las posibles funciones que se pueden definir a partir de una relación que involucre dos variables (como el caso de la hipérbola) ya que muchas veces no es posible conseguir un despeje de una de las variables para verla en forma explícita como función dependiente de la otra. El teorema de la función implícita da respuesta a las preguntas:

- 1.- ¿Dada una relación entre  $x$  e  $y$ ,  $F(x, y) = 0$ , es posible encontrar una función  $y(x)$ ?
- 2.- ¿Se puede garantizar la existencia de tal función  $y(x)$ . Cuál es la derivada de ella?

Note que la primera pregunta **no** dice que  $y(x)$  se obtiene explícitamente en términos de  $x$ , sólo habla de la existencia, en cambio la segunda pregunta nos permite calcular sus derivada.

Hasta el momento hemos trabajado con funciones de la forma  $y = f(x)$ , es decir, “ $y$  como función de  $x$ ” donde la variable dependiente  $y$  está despejada quedando una expresión en términos de la variable independiente  $x$ , esto se acostumbra a decir que “ $y$  es una función explícita en la variable  $x$ ”.

Pero en la práctica se dan casos de funciones no dadas explícitamente. Veamos el siguiente ejemplo

Una industria desea fabricar tarros de conserva con volumen fijo de  $200 \text{ cm}^3$ ? ¿Cuáles son las dimensiones del tarro?

Respuesta: Naturalmente el tarro es un cilindro. Si tomamos como  $h$  la altura y  $r$  el radio de tal cilindro tenemos que

$$\pi h r^2 = 200$$

Es claro que dependiendo del radio  $r$  que decida tomar el  $h$  queda totalmente determinado, y en forma única, así tenemos la función  $r \rightarrow h(r)$ ,  $\forall r \in [0, \infty[$ .

Supongamos ahora que el precio de la etiqueta esta dado por

$$P = 50 \frac{dh}{dr} + 10r$$

Entonces necesitamos calcular  $\frac{dh}{dr}$ .

En este caso es posible despejar explícitamente  $h$  desde la formula del volumen, pero esto no siempre ocurre

Veamos uno de estos casos

Consideremos 2 especies de peces que comparten un mismo habitat (un lago del sur de Chile).

Suponemos que la especie  $x$  (medida en toneladas) se alimenta de la especie más pequeña  $y$  (medida en toneladas), además que ambos comparten los nutrientes del lago. Suponemos que el aporte de la especie pequeña varía notoriamente siendo oscilatorio en el año.

Como el lago tiene una capacidad para alimentar 100 millones de toneladas tenemos que

$$x + y = 10^8$$

y como la  $x$  se alimenta de la especie pequeña  $y$  el aporte de esta varía oscilatoriamente, tenemos que  $x$  satisface

$$x = ae^{b \sin(cyx)} + kx$$

donde  $a, b, c$  y  $k$  son constantes.

Por lo tanto las biomasaes están relacionada en la ecuación

$$ae^{b \sin(cyx)} + kx + y = 10^8 \quad (5.4)$$

El empresario explotador de la biomasa del lago, motivado por los precios en el mercado desea conocer las tasa de crecimiento relativo de las poblaciones  $\frac{dy}{dx}, \frac{dx}{dy}$ .

Se ve en la ecuación 5.4 que es imposible obtener  $y$  como función explícita de  $x$  o  $x$  como función explícita de  $y$ .

? ¿Cómo obtener entonces  $\frac{dy}{dx}$ ?

Veamos esto en un contexto puramente matemático.

Supongamos que tenemos una función real de dos variables definida en  $\mathbb{R}^2$ . Por ejemplo:

$$\begin{aligned} F: \quad \mathbb{R}^2 &\longleftarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto F(x, y) = y^2 - x - 1 \end{aligned}$$

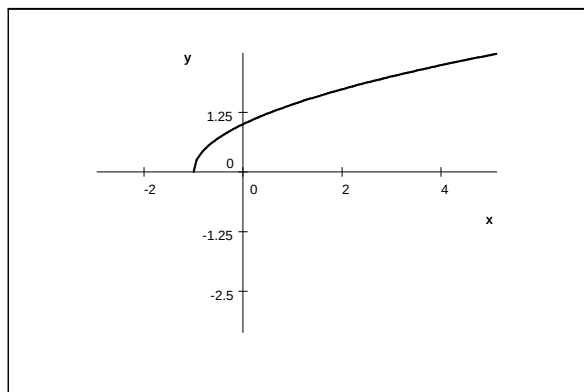
Consideremos la ecuación  $F(x, y) = 0$ , es decir, la ecuación

$$y^2 - x - 1 = 0$$

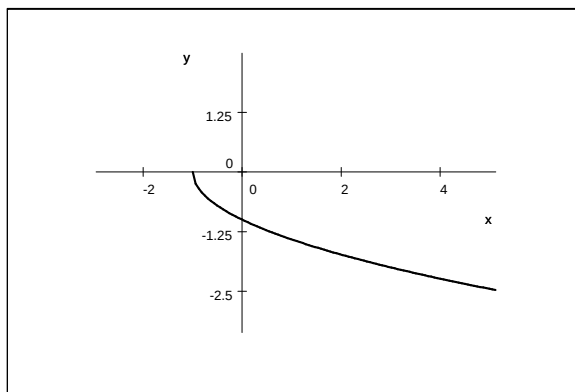
cuya gráfica es una parábola con eje de simetría el eje  $x$ .

Notemos que al despejar  $y$  en términos de  $x$ , obtenemos por ejemplo las siguientes funciones cuyas gráficas están en la figura izquierda y corresponde a distintos sectores de la parábola.

$$y = f(x) = \sqrt{x+1} \quad x \in [-1, \infty[$$



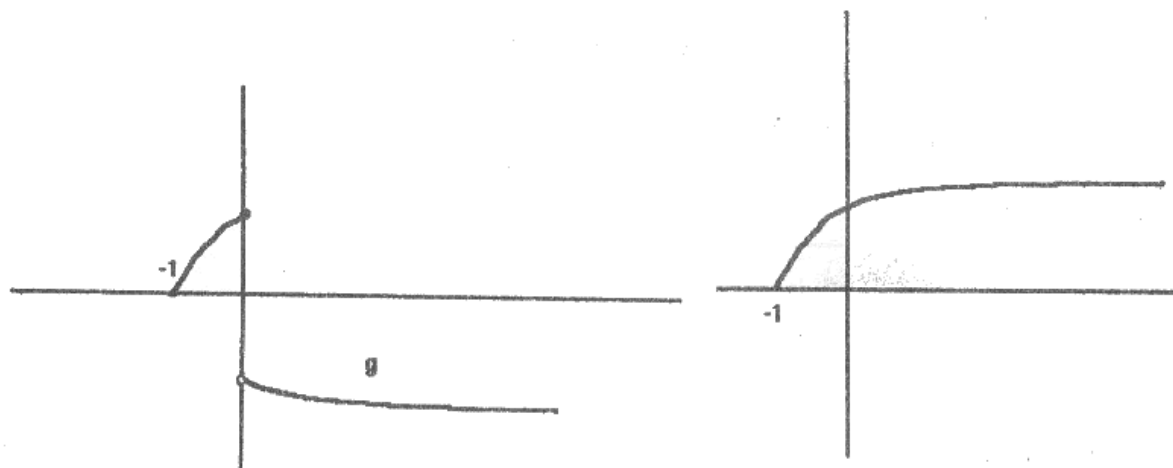
$$f(x) = \sqrt{x+1}$$



$$g(x) = -\sqrt{x+1}$$

$$y = g(x) = -\sqrt{x+1} \quad x \in [-1, \infty[ \quad (5.5)$$

$$y = h(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & -1 \leq x \leq 0 \\ -\sqrt{x+1} & 0 < x \end{cases}$$



$h(x)$  y  $f(x)$

Aunque estas funciones son diferentes todas se caracterizan por satisfacer la ecuación  $F(x, y) = 0$  ya que,

$$\begin{aligned} f(x)^2 - x - 1 &= 0 & x \in [-1, \infty[ \\ g(x)^2 - x - 1 &= 0 & x \in [-1, \infty[ \\ h(x)^2 - x - 1 &= 0 & x \in [-1, \infty[ \end{aligned}$$

Las funciones  $f, g, h$  se dicen estar definidas implícitamente por la ecuación

$$F(x, y) = 0$$

**Definición 5.13** Una ecuación  $F(x, y) = 0$  define implícitamente a  $y$  como función de  $x$  si y sólo si existe un intervalo abierto<sup>4</sup>  $I$  tal que

$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in I \subset \text{Dom} f$$

<sup>4</sup>No necesariamente debe considerarse un intervalo pero para nuestro objetivo esta condición simplifica los casos la exigir que la función implícita sea derivable.

La ecuación  $y^2 - x - 1 = 0$  determina muchas funciones implícitas pero nos interesan aquellas diferenciables en algún intervalo, por ejemplo  $f$  y  $g$  definidas en 5.5 son funciones implícitas diferenciables en todo intervalo abierto contenido en su dominio, en cambio  $h$  es una función definida implícita pero no es continua en  $x = 0$  luego no es diferenciable en cualquier intervalo abierto que contenga al  $x = 0$ .

Bajo qué condiciones existe una función  $y = f(x)$  diferenciable definida implícitamente por una ecuación

$$F(x, y) = 0$$

y ¿Cuál es su derivada?

El teorema de la función implícita nos entrega condiciones para garantizar la existencia de tal función diferenciable, pero antes consideremos el problema de encontrar la derivada de  $f$  bajo el supuesto que su derivada exista.

**Ejemplo 387** Supongamos que la ecuación

$$y^2 - x - 1 = 0 \tag{5.6}$$

define implícitamente a una función  $y = f(x)$  diferenciable en algún intervalo. Determinaremos  $y'$  derivando con respecto a  $x$  ambos lados de la ecuación 5.6 considerando a  $y$  como función de  $x$ .

$$\begin{aligned} y^2 - x - 1 &= 0 \\ \iff (f(x))^2 - x - 1 &= 0 \quad \Big| \frac{d}{dx} \\ \iff 2f(x) \cdot f'(x) - 1 &= 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{1}{2f(x)} \quad \text{siempre que } f(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Seguiremos la costumbre y en vez de hacer lo anterior subentendemos que  $y$  es función de  $x$  no explicitando este hecho y que  $y'$  indica la derivada de esa función, así podemos derivar de la siguiente forma;

$$\begin{aligned} y^2 - x - 1 &= 0 \quad \Big| \frac{d}{dx} \\ \iff 2y \cdot y' - 1 &= 0 \\ \Rightarrow y' &= \frac{1}{2y} \quad y \neq 0 \end{aligned}$$

Este procedimiento se denomina derivación implícita.

Note que lo crucial en esta derivación implícita es suponer que  $y$  es dependiente de  $x$ , de no ser así  $\frac{dy^2}{dx} = 0$ , pero en este caso  $y$  depende de  $x$ , luego debemos aplicar la regla de la cadena

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}.$$

Por lo tanto, si queremos determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola curva  $y^2 - x - 1 = 0$  en el punto  $P = (0, 1)$ , debemos

- 1.- Verificar que el punto  $P$  pertenece a la curva, es decir, que cumpla con la ecuación  $F(x, y) = 0$ .
- 2.- Evaluar la derivada  $y'$  en el punto  $P$  para obtener la pendiente;  $m = \frac{dy}{dx} \Big|_P = f'(x_0)$  donde  $P = (x_0, y_0) = (0, 1)$

Así la recta tangente a la curva 5.6 en el punto  $P = (0, 1)$  está dada por la ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde  $m = \frac{dy}{dx} \Big|_P = \frac{1}{2}$ , así la ecuación buscada es  $y - 1 = \frac{1}{2}x$ .

**Ejemplo 388** Supongamos que  $y = f(x)$  en una función definida implícitamente por la ecuación  $F(x_0, y_0) = 0$  y que  $f$  es diferenciable en algún intervalo.

Determinemos  $y' = \frac{dy}{dx}$  para cada una de las siguientes ecuaciones y para valores  $x$  e  $y$  apropiados

1.  $xy^4 + x^2y + 3x^3 - y + 2 = 0$
2.  $y^3 = \ln(xy) + \tan(y^2) + 1$
3.  $y \arctan(x) = e^{xy^2} + 2$
4.  $y^x = \cos(x^2 + y) - 2y + 3$
5.  $x^y = \sin(x^2) + y$
6.  $x^y + y^x = 2$

**Solución:**

1. Derivando ambos lados respecto a  $x$  pensando que  $y$  depende de  $x$

$$xy^4 + x^2y + 3x^3 - y + 2 = 0 \quad \Big| \frac{d}{dx}$$

e indicando con parentesis la derivada de cada producto, tenemos

$$(y^4 + x4y^3y') + (2xy + x^2y') + 9x^2 - y' = 0$$

agrupando los términos que tiene a  $y'$  como factor obtenemos

$$(4xy^3 + x^2 - 1)y' = -9x^2 - 2xy - y^4$$

suponiendo que  $4xy^3 + x^2 - 1 \neq 0$

$$y' = -\frac{y^4 + 2xy + 9x^2}{4xy^3 + x^2 - 1}$$

2. Usando la regla de la cadena y la regla del producto

$$\begin{aligned} y^3 &= \ln(xy) + \tan(y^2) + 1 && \Big| \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow \quad 3y^2y' &= \frac{1}{xy}(y + xy') + \sec^2(y^2)2yy' \\ \Rightarrow \quad (3y^2 - \frac{1}{y} - 2y \sec^2(y^2))y' &= \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Si  $3y^2 - \frac{1}{y} - 2y \sec^2(y^2) \neq 0$  entonces

$$y' = \frac{1}{x(3y^2 - \frac{1}{y} - 2y \sec^2(y^2))}$$

- 3.

$$\begin{aligned} y \arctan x &= e^{xy^2} + 2 && \Big| \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow \quad y' \arctan x + y \frac{1}{1+x^2} &= e^{xy^2}(y^2 + x2yy') \\ \Rightarrow \quad (\arctan x - 2xye^{xy^2})y' &= y^2e^{xy^2} - \frac{y}{1+x^2} \end{aligned}$$

Si  $(\arctan x - 2xye^{xy^2}) \neq 0$  entonces

$$y' = \frac{(1+x^2)y^2e^{xy^2} - y}{(1+x^2)(\arctan x - 2xye^{xy^2})}$$

Nota: En el ejercicio siguiente necesitamos la derivada de  $\frac{dy^x}{dx}$ , donde  $y$  depende de  $x$ . Esta derivada se puede calcular de dos formas, usando regla de la cadena, usando derivación implícita.

Derivando por regla de la cadena y usando propiedades de logaritmo tenemos

$$y^x = e^{\ln y^x} = e^{x \ln y}$$

luego

$$\frac{dy^x}{dx} = e^{x \ln y} \frac{d}{dx}(x \ln y) = y^x \left(1 \ln y + \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}\right)$$

Para encontrar  $\frac{dy^x}{dx}$ , usando derivación implícita consideremos,  $u = y^x$  luego  $\ln u = x \ln y$ , si  $y > 0$ .

Como  $u$  es una función de  $x$  pues  $y = f(x)$  entonces derivando implícitamente la ecuación

$$\ln u = x \ln y \quad \text{con respecto a } x$$

tenemos;

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = \ln y + x \frac{1}{y} \frac{dy}{dx}$$

luego

$$\frac{du}{dx} = u \left( \ln y + \frac{x}{y} y' \right)$$

pero  $u = y^x$  y  $\frac{du}{dx} = \frac{dy^x}{dx}$  luego

$$\frac{dy^x}{dx} = y^x \left( \ln y + \frac{x}{y} y' \right).$$

4.

$$\begin{aligned} y^x &= \cos(x^2 + y) - 2y = 3 \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ \Rightarrow \frac{dy^x}{dx} &= -\operatorname{sen}(x^2 + y)(2x + y') - 2y' \\ \Rightarrow y^x \left( \ln y + \frac{x}{y} y' \right) &= -\operatorname{sen}(x^2 + y)(2x + y') - 2y' \\ \Rightarrow y' &= -\frac{(2x \operatorname{sen}(x^2 + y) + y^x \ln(y))}{y^{x-1}x + \operatorname{sen}(x^2 + y) + 2} \end{aligned}$$

Nota: En el siguiente ejercicio necesitamos calcular  $\frac{dx^y}{dx}$ . obtengamos la derivada usando derivación implícita.

Sea  $u = x^y$  como  $u$  es función que depende de  $x$  (pues  $y = f(x)$ ), aplicando logaritmo natural,  $\ln$ , y derivando implícitamente con respecto a  $x$  tenemos,

$$\ln u = y \ln x \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

luego;

$$\frac{1}{u} \frac{du}{dx} = y' \ln x + y \frac{1}{x}$$

así

$$\frac{du}{dx} = u \left( y' \ln x + \frac{y}{x} \right)$$

pero  $u = x^y$  y  $\frac{du}{dx} = \frac{dx^y}{dx}$  luego

$$\frac{dx^y}{dx} = x^y \left( y' \ln x + \frac{y}{x} \right)$$

Notemos que si escribimos  $x^y$  como  $e^{y \ln x}$  entonces usando la regla de la cadena también obtenemos

$$\frac{d}{dx}(x^y) = x^y(y' \ln x + \frac{y}{x})$$

5.  $x^y = \operatorname{sen}(x^2) + y \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$   
 luego  $\frac{dx^y}{dx} = \cos(x^2)2x + y'$ .

Por lo tanto usando el calculo anterior

$$x^y(y' \ln x + \frac{y}{x}) = 2x \cos(x^2) + y'$$

Si  $x^y \ln(x) - 1 \neq 0$  entonces

$$y' = \frac{2x \cos(x^2) - x^{y-1}y}{x^y \ln(x) - 1}$$

6. En este ejemplo, usaremos los dos calculamos realizando en forma separada en las notas anteriores

$$\begin{aligned} x^y + y^x &= 2 \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ \Rightarrow \quad \frac{dx^y}{dx} + \frac{dy^x}{dx} &= 0 \\ \Rightarrow \quad x^y(y' \ln x + \frac{x}{y}) + y^x(\ln y + \frac{x}{y}y') &= 0 \\ \Rightarrow \quad y' &= -\frac{(x^{y-1}y + y^x \ln y)}{x^y \ln x + y^{x-1}x} \end{aligned}$$

**Ejercicio 389** Usando derivación implícita calcule  $\frac{d(f(x))^{g(x)}}{dx}$ , donde  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones derivables con  $f(x) > 0$  y  $f(x) \neq 1$

Ayuda: Considere  $u(x) = (f(x))^{g(x)}$ , así  $\ln u(x) = g(x) \ln f(x)$  y luego derive en ambos lados de la última ecuación

**Ejercicio 390** Calcule la derivada de las siguientes funciones, usando

- a) Regla de la cadena.  
 b) Derivación implícita (como el problema anterior)

1.  $h(x) = (x+1)^{\operatorname{sen} x} \quad x > 0$

2.  $l(x) = (x^2 + 2 + \operatorname{sen} x)^{\operatorname{arcsen} x} \quad x \in ]-1, 1[$

3.  $m(x) = (\operatorname{sen} x + \pi)^{\ln(x^2+7)} \quad x \in \mathbb{R}$

**Ejercicio 391** Sea  $y$  una función de  $x$  que satisface la relación

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = c \quad c \text{ constante} \quad (5.7)$$

Muestre que  $y$  satisface la ecuación

$$(3x^2 + 4xy) + (2x^2 + 2y)\frac{dy}{dx} = 0$$

**Solución:** Derivando ambos lados de la ecuación 5.7 tenemos que

$$3x^2 + 4xy + 2x^2\frac{dy}{dx} + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$



por lo tanto

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 2y}$$

Sustituyendo  $\frac{dy}{dx}$  en

$$3x^2 + 4xy + (2x^2 + 2y)\frac{dy}{dx}$$

se verifica que

$$(3x^2 + 4xy) + (2x^2 + 2y) \cdot (-1)\frac{(3x^2 + 4xy)}{2x^2 + 2y} = 0$$

**Ejercicio 392** Verifique que la función  $y(x)$  satisface la ecuación diferencial

$$2x \cos y - x^2 \sin y \frac{dy}{dx} + 3x^2 y + x^3 \frac{dy}{dx} = y \frac{dy}{dx}$$

sabiendo que  $y$  cumple la relación  $x^2 \cos y + x^3 y - \frac{y^2}{2} = c$ .

Hasta el momento hemos calculado derivadas de primer orden de funciones definidas implícitamente. En el ejercicio que sigue mostraremos la derivadas de primer orden de este tipo de funciones (técnica que se repite para derivada de orden superior).

**Ejemplo 393** Calculemos  $\frac{dy}{dx}$  y  $\frac{d^2y}{dx^2}$  de una función  $y$  en la variable  $x$  definida implícitamente por la relación

$$x - \operatorname{tg} \sqrt{y} = 0$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} x - \operatorname{tg} \sqrt{y} &= 0 \quad / \frac{d}{dx} \\ 1 - (\sec^2 \sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} = \frac{2\sqrt{y}}{\sec^2 \sqrt{y}} &= 2\sqrt{y} \cos^2 \sqrt{y} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Usando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \frac{1}{2\sqrt{y}} \cos^2 \sqrt{y} - 2\sqrt{y} 2 \cos \sqrt{y} \sin \sqrt{y} \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{dy}{dx}$$

Factorizando por  $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left( \frac{\cos^2 \sqrt{y}}{\sqrt{y}} - 2 \cos(\sqrt{y}) \sin(\sqrt{y}) \right) \frac{dy}{dx}$$

Sustituyendo  $\frac{dy}{dx}$  y simplificando se obtiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 2 \cos^4 \sqrt{y} - 4\sqrt{y} \cos^3(\sqrt{y}) \sin(\sqrt{y}) \quad (5.9)$$

**Ejercicio 394** Verifique que

$$x - \operatorname{tg} \sqrt{y} = 0$$

satisface la ecuación diferencial

$$(x^2 + 1)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

**Solución:**

Puesto que  $x = \operatorname{tg} \sqrt{y}$  se tiene

$$(x^2 + 1)^2 = (\operatorname{tg}^2 \sqrt{y} + 1)^2 = (\sec^2 \sqrt{y})^2 = \sec^4 \sqrt{y} \quad (5.10)$$

Por otro lado

$$2x(x^2 + 1) = 2 \operatorname{tg} \sqrt{y} \cdot \sec^2 \sqrt{y} \quad (5.11)$$

luego por 5.10, 5.11 y por 5.8, 5.9 del ejemplo anterior se tiene

$$\begin{aligned} & (x^2 + 1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} - 2 \\ &= \sec^4 \sqrt{y} [2 \cos^4 \sqrt{y} - 4 \sqrt{y} \cos^3(\sqrt{y}) \operatorname{sen}(\sqrt{y})] + 2 \operatorname{tg} \sqrt{y} \sec^2(\sqrt{y}) [2 \sqrt{y} \cos^2 \sqrt{y}] - 2 \\ &= 2 - 4 \sqrt{y} \operatorname{tg} \sqrt{y} + 4 \sqrt{y} \operatorname{tg}(\sqrt{y}) - 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

**Observación:** Notemos que todas las ecuaciones del ejemplo anterior pueden ser escrita de la forma  $F(x, y) = 0$  donde  $f$  en cada caso es

1.  $F(x, y) = xy^4 + x^2y + 3x^3 - y + 2$
2.  $F(x, y) = \ln(xy) + \tan(y^2) + 1 - y^3$
3.  $F(x, y) = y \arctan(x) - e^{xy^2} - 2$
4.  $F(x, y) = \cos(x^2 + y) - 2y + 3 - y^x$
5.  $F(x, y) = \operatorname{sen}(x^2) + y - x^y$
6.  $F(x, y) = x^y + y^x - 2$

También podemos notar que la derivada requerida  $\frac{dy}{dx}$  corresponde al cuociente de las derivadas parciales de la función  $F$  multiplicada por  $-1$ .

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

Veamos en el caso

1.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= y^4 + 2xy + 9x^2 \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= 4xy^3 + x^2 - 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{y^4 + 2xy + 9x^2}{4xy^3 + x^2 - 1}$$

que es justamente la derivada requerida en el ejercicio a)

2.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= \frac{1}{xy} \cdot y = \frac{1}{x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= \frac{1}{xy} \cdot x + \sec^2(y^2)2y - 3y^2 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{y}} + 2y \sec^2(y^2) - 3y^2$$

y esto es igual a  $\frac{dy}{dx}$ .

Esto mismo ocurre con los ejercicios de (c) al (f).

Finalmente podemos notar que la existencia de  $\frac{dy}{dx}$ , (en cada caso) es posible si

$$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0.$$

Esencialmente esto es lo que establece el teorema de la función implícita.

**Teorema 5.14 (Función Implícita)** Sea  $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  una función tal que

1. Existe un punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $F(x_0, y_0) = 0$
2.  $F$  es una función continuamente diferenciable en una vecindad del punto  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  ( por ejemplo un disco sin orilla que contenga a  $(x_0, y_0)$ ).
3.  $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ .

Entonces existe una función implícita  $y = f(x)$  definida en un intervalo abierto  $I$  que contiene a  $x_0$  y cuyo recorrido contiene a  $y_0$  tal que  $y_0 = f(x_0)$  y por lo tanto  $F(x_0, f(x_0)) = 0$ , más aún  $F(x, f(x)) = 0$  para todo  $x \in I$  (es decir no tan sólo  $(x_0, y_0)$  satisface  $F(x, y) = 0$  sino que también los infinitos puntos  $(x, f(x))$ ,  $x \in I$ ).

Y finalmente, la mencionada función  $f$  es derivable en  $I$  y su derivada está dada por la expresión

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

La demostración no corresponde a un curso de este nivel, sino que para uno correspondiente a cálculo en varias variables. Para clarificar un poco las hipótesis, explicaremos esta en la observación y ejemplo que sigue.

**Observación:** El concepto de diferenciabilidad para funciones de dos variables es un poco más complicado que hasta ahora y seguro que lo veremos en un curso de cálculo en varias variables. Como ejemplo de funciones de dos variables continuamente diferenciables mencionaremos las siguientes funciones

1. Las funciones polinomiales en dos variables son continuamente diferenciables
2. Las funciones tales como seno, coseno, exponencial, logaritmo y raíz  $n$ -ésima son continuamente diferenciables en sus respectivos dominios.
3. La compuesta o alguna combinación algebraica (suma, resta, producto, o división de ellas) también son continuamente diferenciable en sus dominios de definición.

**Ejemplo 395** Las siguientes funciones son continuamente diferenciables

1.  $F(x, y) = x^3y + 4x^2y + y^2x + 1$
2.  $F(x, y) = \text{sen}(x^2y) + e^{xy} + yx + 1$
3.  $F(x, y) = \text{sen}(e^{xy^2}) + x^3y + \sqrt{y^2}x + 1$
4.  $F(x, y) = x \ln y$

**Ejemplo 396** Supongamos que la función

$$F(x, y) = y^2 \operatorname{sen} x - e^{x+y} + 1$$

es continuamente diferenciable en  $\mathbb{R}^2$ , es decir, satisface hipótesis (2) del teorema de la función implícita

El punto  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  satisface la ecuación  $F(x, y) = 0$ . Determine si existe una función  $y = f(x)$  definida implícitamente por la ecuación  $F(x, y) = 0$  y diferenciable en un intervalo abierto de  $x_0 = 0$

**Solución:** Considerando la ecuación  $F(x, y) = 0$ , es decir,

$$y^2 \operatorname{sen} x - e^{x+y} + 1 = 0$$

y derivando implícitamente con respecto a  $x$  se tiene;

$$2yy' \operatorname{sen} x + y^2 \cos(x) - (1 + y')e^{x+y} = 0$$

lo que implica

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{e^{x+y} - y^2 \cos x}{2y \operatorname{sen} x - e^{x+y}}$$

Puesto que  $\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = -1$ , ya que  $\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) = 2y \operatorname{sen} x - e^{x+y}$  y  $F(0, 0) = 0$  por el teorema de la función implícita, existe una función  $y = f(x)$  diferenciable en  $U$  (un intervalo abierto de  $x = 0$ ), definida implícitamente por la ecuación  $F(x, y) = 0$  y  $f(0) = 0$ .

**Ejemplo 397** Determine (si existe) la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  en el punto  $P = (0, 0)$ .

**Solución:** Puesto que  $P = (0, 0)$  satisface la ecuación  $F(x, y) = 0$  y  $\frac{dy}{dx}$  evaluada en  $P = (0, 0)$  existe, entonces existe la recta tangente en el punto  $(0, 0)$ , cuya ecuación es

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

donde  $(x_0, y_0) = (0, 0)$  y  $m = \frac{dy}{dx}|_{(0,0)} = -1$ , es decir,

$$y = -x$$

**Ejemplo 398** Suponga que la función

$$F(x, y) = x + x \ln y - \operatorname{sen}(xy) + y^2 - \frac{\pi}{2}$$

es continuamente diferenciable en una vecindad del punto  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  (lo es por observación anterior).

Determine si existe una función  $x = f(y)$  (“ $x$  en función de  $y$ ”) definida implícitamente por la ecuación  $F(x, y) = 0$  diferenciable en un intervalo abierto de  $y = 1$ .

**Solución:** <sup>5</sup> Derivando implícitamente con respecto a  $y$  tenemos

$$\begin{aligned} x + x \ln y - \operatorname{sen}(xy) + y^2 - \frac{\pi}{2} &= 0 & \Big| \frac{d}{dy} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} + \frac{dx}{dy} \ln y + x \frac{1}{y} - \cos(xy) \left( y \frac{dx}{dy} + x \right) + 2y &= 0 \\ \Rightarrow (1 + \ln y - \cos(xy)) \frac{dx}{dy} &= x \cos(xy) - \frac{x}{y} - 2y \\ \Rightarrow \frac{dx}{dy} &= \frac{x \cos(xy) - \frac{x}{y} - 2y}{1 + \ln y - y \cos(xy)} \end{aligned}$$

Puesto  $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, 1) = 1 \neq 0$ , ya que  $\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) = 1 + \ln y - y \cos(xy)$  y  $F(\frac{\pi}{2}, 1) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \ln 1 - \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}) + 1 - \frac{\pi}{2} = 0$  entonces existe

$$\begin{array}{ccc} f : U \subset \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ y & \longmapsto & x = f(y) \end{array}$$

función diferenciable en  $U$  (un intervalo abierto de  $y = 1$ ), definida implícitamente por  $F(x, y) = 0$ .

<sup>5</sup>Note que ahora se pide  $x = f(y)$ , por lo tanto debe satisfacerse la hipótesis  $\frac{\partial F}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, 1) \neq 0$ .

**Ejemplo 399** Determine  $k \in \mathbb{R}$  (si existe) de modo que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de  $y = f(x)$  en el punto  $P = (1, 2)$  pase por el origen, sabiendo que  $y = f(x)$  es una función diferenciable en un intervalo que contiene a  $x = 1$ , definida implícitamente por

$$y^2 + k \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}y\right) = xy + 2$$

**Solución:** Notemos que independiente del valor de  $k$ ,  $P = (1, 2)$  satisface la ecuación,

$$2^2 + k(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}2)) = 1 \cdot 2 + 2$$

Derivando implícitamente con respecto a  $x$

$$\begin{aligned} y^2 + k(\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2}y)) &= xy + 2 \quad \frac{d}{dx} \\ \Rightarrow 2yy' + k \cos(\frac{\pi}{2}y) \frac{\pi}{2}y' &= y + xy' \\ \Rightarrow (2y + \frac{k\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}y) - x)y' &= y \\ \Rightarrow y' = \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{2y + \frac{k\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2}y) - x} \end{aligned}$$

evaluando esta derivada en el punto  $P = (1, 2)$  tenemos la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto  $(1, 2)$ .

$$m = \frac{dy}{dx}|_P = \frac{2}{4 - \frac{k\pi}{2} - 1}$$

Luego ecuación de la recta tangente a la función  $y = f(x)$ , definida implícitamente, está dada por

$$y - 2 = \frac{2}{3 - \frac{k\pi}{2}}(x - 1)$$

Esta recta pasa por el origen si y sólo si el punto  $(0, 0)$  satisface su ecuación, es decir,

$$-2 = \frac{2}{3 - \frac{k\pi}{2}}(-1)$$

de donde obtenemos el valor de  $k$ .

$$k = \frac{4}{\pi}$$

**Ejemplo 400** Determine el (o los) punto(s) donde la gráfica de la relación

$$x^2 + y^2 = 6x - 4y + 5 \tag{5.12}$$

tiene tangente(s) paralela(s) a la recta  $y = 4 + x$  (gráficar la situación)

**Solución:** Derivando implícitamente ambos lados de la ecuación

$$x^2 + y^2 = 6x - 4y + 5$$

con respecto a  $x$ , tenemos;

$$\begin{aligned} 2x + 2yy' &= 6 - 4y' \\ (2y + 4)y' &= 6 - 2x \\ y' &= \frac{6 - 2x}{2y + 4}, \text{ con } 2y + 4 \neq 0 \end{aligned}$$

La recta tangente a la gráfica es paralela a la recta  $y = x + 4$  si y sólo si  $y'(x_0) = 1$  para algún  $(x_0, y_0)$  perteneciente a la curva.

Como

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \frac{6 - 2x_0}{2y_0 + 4} = 1 \\ \iff 6 - 2x_0 &= 2y_0 + 4 \\ \iff y_0 &= 1 - x_0 \end{aligned}$$

y el punto  $(x_0, y_0)$  debe cumplir la ecuación 5.12, tenemos por lo tanto

$$x_0^2 + y_0^2 = 6x_0 - 4y_0 + 5.$$

Reemplazando  $y_0 = 1 - x_0$  tenemos

$$x_0^2 + (1 - x_0)^2 = 6x_0 - 4(1 - x_0) + 5$$

de donde

$$x_0 = 0 \quad \text{ó} \quad x_0 = 6$$

Cuando  $x_0 = 0$ , el valor de  $y_0$  es 1 y cuando  $x_0 = 6$  se tiene  $y_0 = -5$

Por lo tanto los puntos pedidos (ver figura ??) son

$$P_1 = (0, 1) \quad , \quad P_2 = (6, -5)$$

Notemos que la relación

$$x^2 + y^2 = 6x - 4y + 5$$

es equivalente a;

$$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 18$$

luego, gráficamente la relación es una circunferencia con centro en  $(3, -2)$  y las rectas tangentes paralelas a  $y = 4 + x$  tienen ecuación

$$y - 1 = x \quad , \quad y + 5 = x - 6$$

**Ejercicio 401** Verifique si la función  $y = f(x)$  definida implícitamente por  $(1 + x)e^{y/x} = x$  es solución de  $x^3y'' = (xy' - y)^2$ .

**Solución:**

$$\begin{aligned} (1 + x)e^{y/x} &= x \frac{d}{dx} \\ e^{y/x} + (1 + x)e^{y/x} \frac{y'x - y}{x^2} &= 1 \\ \frac{y'x - y}{x^2} &= \frac{1 - e^{y/x}}{(1 + x)e^{y/x}} \\ y'x - y &= x^2 \frac{1 - e^{y/x}}{(1 + x)e^{y/x}} \end{aligned}$$

pero  $(1 + x)e^{y/x} = x$  entonces

$$\begin{aligned} y'x - y &= x^2 \frac{1 - e^{y/x}}{x} \\ y' &= 1 - e^{y/x} + \frac{y}{x} \end{aligned} \tag{5.13}$$

derivando nuevamente en forma implícita obtenemos

$$\frac{d^2f}{dx^2} = y'' = -e^{y/x} \frac{y'x - y}{x^2} + \frac{y'x - y}{x^2}$$

Por lo tanto

$$y'' = (1 - e^{y/x}) \frac{y'x - y}{x^2} \quad (5.14)$$

pero de 5.13 se tiene

$$1 - e^{y/x} = \frac{y'x - y}{x}$$

luego reemplazando en 5.14

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{y'x - y}{x} \cdot \frac{y'x - y}{x} \\ y'' &= \frac{(y'x - y)^2}{x^2} \end{aligned}$$

de donde  $x^3 y'' = (y'x - y)^2$ .

En consecuencia la función definida implícitamente por  $(1 + x)e^{y/x} = x$  es solución de la ecuación diferencial

$$x^3 y'' = (xy' - y)^2$$

## 5.4 Regla de L'Hopital

Se dice que el cociente  $\frac{f(x)}{g(x)}$  es del tipo  $\frac{0}{0}$  en  $x = p$  (o que el límite es del tipo  $\frac{0}{0}$ ) si ambas funciones  $f$  y  $g$  tienen límite 0 cuando  $x$  tiende a  $p$ .

Si los límites de  $f(x)$  y  $g(x)$  son  $\infty$  o  $-\infty$  cuando  $x$  tiende a  $p$ , se dice que  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tiene la forma indeterminada  $\frac{\infty}{\infty}$  o el límite es del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ .

**Teorema 5.15** (Regla de L'Hopital)

Sea  $V_p$  una vecindad de  $p$ . Sean  $f$  y  $g$  funciones derivables en  $V_p - \{p\}$ .

Si  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tiene la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$  o bien  $\frac{\infty}{\infty}$  en  $x = p$  entonces

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  exista o bien  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty$ .

**Observación:** La regla de L'Hopital también puede aplicarse a los límites laterales.

**Ejemplo 402** Calculemos usando L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$$

**Solución:** Este límite es de la forma  $\frac{0}{0}$  pues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

luego calculemos  $L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}'(x)}{(x)'} =$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}'(x)}{(x)'} = 1$$

**Observación:** Si  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$  es de la forma  $\frac{0}{0}$  y  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  no existe, **no** podemos afirmar que  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$  no existe, como veremos en el ejemplo que sigue.

**Ejemplo 403** Sea  $f(x) = x^2 \cos(1/x)$ ,  $g(x) = x$ . Como  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  entonces  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)}$  es de la forma  $\frac{0}{0}$  pero

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cos(1/x) + x^2(-\sin(1/x))(-1/x^2)}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos(1/x) + \sin(1/x) \end{aligned}$$

este límite no existe, pues  $\lim_{x \rightarrow 0} 2x \cos(1/x)$  existe pero  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$  no existe (ver ejercicio 303 capítulo de límite y continuidad).

Sin embargo, (a pesar de que  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  no existe),  $\lim_{x \rightarrow p} \frac{f(x)}{g(x)}$  existe, pues por teorema de cero aniquila.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cos(1/x) = 0.$$

**Ejemplo 404** Calcular

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$$

**Solución:**  $L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  (ver gráfica de logaritmo) y  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$  entonces el límite  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1/x}$  es de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$  luego, calculemos (si es que existe)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1/x)}{-(1/x^2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\ln x)'}{(1/x)'} = 0$$

**Ejemplo 405** Calcular

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log x}{\log(\sin(x))}$$

**Solución:** Este límite es del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$ , pues  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log \sin(x) = -\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\log x)'}{(\log \sin x)'} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x \ln 10}}{\frac{1}{\sin x \ln 10}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} = 1 \end{aligned}$$

luego

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log(x)}{\log(\sin(x))} = 1$$

**Ejercicio 406** Calcular

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsen x}{x} \right)^{1/x^2}$$

**Solución:** a) Como  $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsen x = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  luego  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x}$  es de la forma  $\frac{0}{0}$ , calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsen x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$



Por la regla de L'Hopital tenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsen x}{x} = 1$$

b) Calculemos

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x^2} \ln(\frac{\arcsen x}{x})}$$

notemos que  $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(\frac{\arcsen x}{x}) = \ln 1 = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ , luego

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\frac{\arcsen x}{x})}{x^2}$$

es de la forma  $\frac{0}{0}$ , veamos,

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(\frac{\arcsen x}{x}))'}{(x^2)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\arcsen x} \left( \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen x}{x^2} \right)}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsen x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen x}{2x^3} \quad \text{por (a)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen x}{2x^3} \end{aligned}$$

el cual nuevamente es de la forma  $\frac{0}{0}$

$$\begin{aligned} &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen x \right)'}{(2x^3)'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{6x^2} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{6(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Así por algebra de límite y por la regla de L'Hopital se tiene que  $L_1 = \frac{1}{6}$  y por consiguiente

$$L = e^{1/6}$$

**Observación:** La regla de L'Hopital también es válida si  $x \rightarrow +\infty$  o  $x \rightarrow -\infty$  y además note que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(1/x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(1/x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \end{aligned}$$

**Teorema 5.16** Sean  $f$  y  $g$  funciones diferenciables para todo  $x > N$ , donde  $N \in \mathbb{R}^+$  y supóngamos que para todo  $x > N$ ,  $g'(x) \neq 0$ . entonces

a) Si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$  (es decir,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tiene la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ ) y si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

Análogamente si  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \pm\infty$  y si  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

b) Si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  (es decir,  $\frac{f(x)}{g(x)}$  tiene la forma indeterminada  $\frac{0}{0}$ ) y si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

Análogamente si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \pm\infty$  y si  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ , entonces  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$ .

El teorema también es válido si  $L$  se sustituye por  $+\infty$  o  $-\infty$

**Ejemplo 407** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1}$$

**Solución:**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \pi - 2 \operatorname{arctg} x = 0$  pues  $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$ .

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{3/x} - 1 = e^0 - 1 = 0$ , luego el límite es de la forma  $\frac{0}{0}$ , aplicando L'Hopital

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\pi - 2 \operatorname{arctg} x)'}{(e^{3/x} - 1)'} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \frac{1}{1+x^2}}{e^{3/x} \left(-\frac{3}{x^2}\right)} \\ &= \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{3/x} (1+x^2)} \end{aligned}$$

dado que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 1$$

y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{3/x}} = 1$  entonces por algebra de límite,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{3/x} (1+x^2)} = 1$$

en consecuencia, por L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{e^{3/x} - 1} = \frac{2}{3}$$

**Ejemplo 408** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

**Solución:** Ya que  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$ , aplicando la regla de L'Hopital, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$$

pero  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}$  es de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$  luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$$

Observemos que en algunos casos debemos aplicar más de una vez la regla de L'Hopital.

**Ejemplo 409** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{1/x^2}$$

Este límite es del tipo  $1^\infty$

**Solución:**

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\ln(e^x - x)^{1/x^2}} \quad (5.15)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - x)^{1/x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln(e^x - x) \end{aligned}$$

es del tipo  $\frac{0}{0}$  entonces veamos si existe

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln(e^x - x))'}{(x^2)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - 1}{e^x - x}}{2x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{(e^x - x)2x} \end{aligned}$$

es del tipo  $\frac{0}{0}$ ,  
pero

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2xe^x - 2x^2)'} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{2xe^x + 2e^x - 4x} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Por lo anterior, tenemos

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - x)^{1/x^2} = \frac{1}{2}$$

luego en 5.15 usando la continuidad de la función exponencial se tiene

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - x)^{1/x^2}} = e^{\frac{1}{2}}$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 0} (e^x - x)^{1/x^2} = e^{1/2}$$

**Ejemplo 410** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\pi - 2x)^{\cos x}$$

*Este límite es del tipo  $0^0$*

**Solución:**

$$L = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} (\pi - 2x)^{\cos x} = \lim_{(\pi/2)^- \rightarrow 0} e^{\ln(\pi - 2x)^{\cos x}} \quad (5.16)$$

Calculemos

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\pi - 2x)^{\cos x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \cos x \ln(\pi - 2x) \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\ln(\pi - 2x)}{\sec x} \end{aligned}$$

es del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$   
 Calculemos

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{(\ln(\pi - 2x))'}{(\sec x)'} &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{\frac{-2}{\pi - 2x}}{\sec x \tan x} \\ &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{-2 \cos^2 x}{(\pi - 2x) \sin x}\end{aligned}$$

es del tipo  $\frac{0}{0}$ , luego aplicando L'Hopital nuevamente

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{(-2 \cos^2 x)'}{((\pi - 2x) \sin x)'} &= \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \frac{4 \cos x \sin x}{(\pi - 2x) \cos x - 2 \sin x} \\ &= 0\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\pi - 2x)^{\cos x} = 0$$

luego en 5.16 se tiene

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \ln(\pi - 2x)^{\cos x}} = e^0$$

de est forma llegamos a que

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\pi - 2x)^{\cos x} = e^0 = 1$$

**Ejemplo 411** Calcular

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{1/x}$$

*Este límite es del tipo  $\infty^0$*

**Solución:**

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{1/x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\ln(x + e^x)^{1/x}}$$

Calculemos

$$\begin{aligned}L_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x + e^x)^{1/x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \ln(x + e^x)\end{aligned}$$

pero este límite es del tipo  $(\frac{\infty}{\infty})$ , luego aplicando L'Hopital

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x + e^x))'}{(x)'} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1+e^x}{x+e^x}}{1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^x}{x + e^x}\end{aligned}$$

es del tipo  $\frac{\infty}{\infty}$  y será igual a  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+e^x)'}{(x+e^x)'}$  siempre que exista este último,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1 + e^x)'}{(x + e^x)'} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + 1/e^x} \\ &= 1\end{aligned}$$

En consecuencia, por regla de L'Hopital se tiene que

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x + e^x)^{1/x} = 1$$

luego en ?? obtenemos

$$L = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \ln(x+e^x)^{1/x}} = e^1$$

Por lo tanto,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{1/x} = e^1$$

1. **Ejercicio 412** Calcule el valor de los siguientes límites (L'Hopital)
2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - (1+x)}{x^2}$
3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$
4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$
6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{1/x} - 1)$
7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{2}{x})^x$
8.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$
9.  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\sqrt{2-x^2} - 1)^{x-1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + e^x)^{2/x}$
11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{1/x}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 1} (\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1})$
13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{\ln(x+1)}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{e^{2x} - 1}$
15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x^2})^{\operatorname{sen} x}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - 5 \cot^3 x)^{\tan^3 x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (2 \sec^2 x - \frac{1}{1 - \operatorname{sen} x})$
19.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x} - \cot x)$
20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{x/2}}{x + e^x}$
21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\cos(2/x))^{x^2}$
22.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{arctg} x}{\operatorname{sen} x} x - 3x$
23.  $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1)^{\ln x}$
24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{x}$
25.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{\operatorname{arcsen} x}{x})^{(1/x^2)}$
26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3e^x + \ln x}{e^x + x}$
27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^2 x + \operatorname{sen} x)^{(1/x)}$

## 5.5 Aplicaciones de la Derivada

### 5.5.1 Aplicaciones Geométricas

La aplicación geométrica más directa y clara obviamente está en el hecho que la derivada nos permite encontrar la pendiente de la recta tangente a ciertas gráficas de funciones, explicación que hemos dado antes del concepto de la derivada, como motivación a ella; pero no está de más hacer algunos ejemplos

**Ejemplo 413** *Encontrar el punto de la parábola*

$$y = 3x^2 + 2x + 1/4$$

*cuya recta tangente forma un ángulo  $\pi/4$  con el eje  $x$ .*

**Solución:**  $\text{tg}(\pi/4) = 1$ , así la pendiente de la recta tangente debe ser 1.

$$\begin{aligned} m &= \frac{dy}{dx} = 6x + 2 = 1 \\ \iff x &= -1/6 \end{aligned}$$

De esta forma el punto de la parábola es  $(-1/6, 0)$ .

**Ejemplo 414** *Usando derivada encontrar el vértice de la parábola*

$$y = x^2 + 4x - 8$$

**Solución:** En el vértice la tangente tiene pendiente cero

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 4 = 0 \iff x = -2$$

Por lo tanto el vértice está en el punto  $(-2, -12)$ .

**Ejemplo 415** *Usando derivada muestre que en una circunferencia de centro  $(h, k)$  y radio  $r$ .*

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

*la recta tangente en el punto  $P = (x_0, y_0)$  es perpendicular a la recta que une  $P$  con  $(h, k)$  (recta radial)*

**Solución:** Si  $y_0 = k$  las rectas tangentes son perpendiculares al eje  $x$  con ecuación  $x = r + h$  o  $x = r - h$  y la recta radial es  $y = k$  por lo tanto son perpendiculares.

Si  $y_0 \neq k$  entonces

$$\begin{aligned} 2(x - h) + 2(y - k) \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \iff \frac{dy}{dx} &= \frac{-2(x - h)}{2(y - k)} \end{aligned}$$

Pendiente de recta tangente a la circunferencia en el punto  $P = (x_0, y_0)$  es  $-\frac{x_0 - h}{y_0 - k}$ .

La ecuación de la recta tangente a la circunferencia en  $P = (x_0, y_0)$  es:

$$y - y_0 = -\frac{(x_0 - h)}{y_0 - k}(x - x_0)$$

La ecuación de la recta radial en el punto  $p$  es

$$y - k = \frac{y_0 - k}{x_0 - h}(x - h)$$

y claramente son perpendiculares.

### 5.5.2 Aplicaciones Físicas

Consideremos el problema de encontrar la velocidad en cualquier instante de un objeto que se mueve sobre una trayectoria recta (movimiento rectilíneo).

Una fórmula muy utilizada en la resolución de problemas acerca del movimiento de una partícula sobre una línea recta es

$$v = \frac{d}{t}$$

donde  $v$  es la velocidad media durante un intervalo de tiempo,  $t$  la magnitud del intervalo de tiempo y  $d$  es la distancia total recorrida.

Ejemplifiquemos esta situación. Supongamos que un automóvil sale de la ciudad  $A$  a las 11:00 AM y viaja a lo largo de una carretera recta hasta una ciudad  $B$  que se encuentra a 120 km de  $A$ , llegando a las 1:00 PM. Aplicando la fórmula  $v = \frac{d}{t}$  con  $d = 120$ ,  $t = 2$ , vemos que la velocidad media del automóvil es

$$v_{\text{med}} = \frac{120}{2} = 60 \text{ km/hrs}$$

Esto significa que un automóvil  $60 \text{ km/hrs}$  que mantenga su velocidad a  $60 \text{ km/hrs}$  durante todo el tiempo, tomara 2 horas en recorrer la distancia entre las dos ciudades. Pero, ¿Cuál es la velocidad (instantánea) que marcó el velocímetro (por ejemplo) a las 11 : 30hrs? Notemos que el automóvil pudo haber estado en reposo (detenido en un peaje) o haber marcado su velocímetro  $70 \text{ km/hrs}$  u otro valor.

Para determinar la velocidad con que el automóvil viajan cierto instante (en este caso a las 11:30hrs), se necesita conocer alguna información sobre la posición del automóvil alrededor de esa hora. Por ejemplo, supongamos que a las 11:30 hrs, el automóvil está a 20 kms de  $A$  y que a las 1:35 horas está a 24,5 kms de  $A$ , entonces en 5 minutos la distancia recorrida es 4,5 kms.

Sustituyendo en la fórmula  $v = \frac{d}{t}$  tenemos que la velocidad media durante ese intervalo de tiempo es  $v = \frac{4,5}{5/60} = 54 \text{ km/hrs}$

Pero este valor, no es el valor exacto de la velocidad a las 11:30hrs, es sólo una aproximación. Obviamente una mejor aproximación de la velocidad a las 11:30 hrs se obtiene si consideramos intervalos de tiempo más pequeños. Esto nos lleva a considerar el límite de la velocidad media cuando  $t$  tiende a 11:30hrs.

Supongamos que se conoce la posición  $s(t)$  de un punto  $P$  en todo instante en un intervalo de tiempo, entonces la velocidad de  $P$  en el tiempo  $t = t_0$  velocidad instantánea se define como

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

$s(t)$  se conoce como la función de posición de  $P$ .

**Definición 5.17** Si un punto  $P$  se mueve sobre una recta de modo que su posición en el tiempo  $t$  es  $s(t)$ , con  $t \in ]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ ,  $\delta > 0$ , entonces la **velocidad media** de  $P$  entre los tiempos  $t_0$  y  $t$  es

$$v = \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

y la **velocidad instantánea**  $v(t_0)$  de  $P$  en el tiempo  $t_0$  es

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$$

siempre y cuando el límite existe, es decir  $v(t_0) = s'(t_0)$ .

**La rapidez** de  $P$  al tiempo  $t = t_0$  se define como  $|v(t_0)|$  y la **aceleración** de  $P$  al tiempo  $t_0$  como

$$a(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{v(t) - v(t_0)}{t - t_0}$$

es decir,

$$a(t_0) = v'(t_0) = s''(t_0)$$

usando otra notación

$$a(t_0) = \frac{dv}{dt}|_{t=t_0} = \frac{d^2s}{dx^2}|_{t=t_0} \quad a(t_0) = \dot{v}(t_0) = \ddot{s}(t_0)$$

**Ejemplo 416** Una atleta corre los cien metros planos<sup>6</sup>, de manera que la distancia  $s(t)$  que ha recorrido a los  $t$  segundos está dada por

$$s(t) = \frac{1}{5}t^2 + 8t \text{ metros}$$

Calcular la velocidad del corredor

a) en el momento de la salida

b) a los 5 segundos de la salida

c) al cruzar la meta

**Solución:** a) Notemos que en el momento de la salida  $t = 0$ , la posición del atleta es  $s(0) = 0$  metros.

Usando la definición, la velocidad del atleta en  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} v(0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{s(t) - s(0)}{t - 0} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1/5t^2 + 8t}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} 1/5t + 8 \\ &= 8m/seg \end{aligned}$$

Que es equivalente a calcular  $v(t)$ , derivando  $s(t)$  con respecto al tiempo y luego evaluando en  $t = 0$ .

Así,

$$v(t) = \frac{2}{5}t + 8 \Rightarrow v(0) = 8$$

b) A los 5 segundos de la salida, tenemos

$$v(5) = \frac{2}{5}5 + 8 = 10m/seg$$

c) Al cruzar la meta, es decir, a los 100 metros se tiene,

$$S(t) = 100 \iff \frac{1}{5}t^2 + 8t = 100 \iff t = 10$$

por lo tanto a los 10 seg el atleta ha cruzado la meta y su velocidad es

$$v(10) = \frac{2}{5}10 + 8 = 12m/seg$$

**Ejemplo 417** Dos carreteras se cruzan formando en un ángulo de  $45^\circ$ . Sabiendo que en un instante  $t_0$  dos automóviles  $A$  y  $B$  distan del cruce 100 kms, el automóvil  $A$  alejándose con una rapidez de 80 km/hrs y  $B$  alejándose con una rapidez de 60 km/hrs.

Determine la rapidez con que se separa uno del otro en el instante  $t_0$ . (figura ??)

**Solución:** Sea  $x(t)$  la distancia desde el cruce al automóvil  $A$  en el instante  $t$ ,  $y(t)$  la distancia desde el cruce al automóvil  $B$ , y  $s(t)$  la distancia entre  $A$  y  $B$ , además  $v_A(t_0)$ ,  $v_B(t_0)$  velocidad de los automóviles  $A$ ,  $B$  respectivamente en el instante  $t_0$ .

Por hipótesis  $x(t_0) = y(t_0) = 100\text{kms}$ ,  $v_A(t_0) = x'(t_0) = 80\text{km/hrs}$  y  $v_B(t_0) = y'(t_0) = 60\text{km/hrs}$ . Nosotros buscamos  $\frac{ds}{dt}(t_0)$ .

<sup>6</sup>Todos los movimientos son considerados rectilíneos.



Aplicando el teorema del coseno al triángulo  $AOB$  tenemos

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t)\cos(45^\circ),$$

es decir,

$$s^2(t) = x^2(t) + y^2(t) - x(t)y(t)\sqrt{2} \quad (5.17)$$

Con el objeto de obtener  $\frac{ds}{dt}$  derivamos la expresión 5.17 con respecto a  $t$  tenemos;

$$2s\frac{ds}{dt} = 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - \sqrt{2}y\frac{dx}{dt} - \sqrt{2}x\frac{dy}{dt}. \quad (5.18)$$

Evaluando en  $t_0$  la expresión 5.17 obtenemos la distancia entre los automóviles en el instante  $t_0$ .

$$\begin{aligned} s(t_0) &= \sqrt{x^2(t_0) + y^2(t_0) - \sqrt{2}x(t_0)y(t_0)} \\ s(t_0) &= \sqrt{100^2 + 100^2 - \sqrt{2}100^2} \\ s(t_0) &= 100\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Así, usando<sup>7</sup> esto en 5.18 obtenemos la velocidad requerida

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} \big|_{t=t_0} &= \frac{1}{100\sqrt{2 - \sqrt{2}}} (100 \cdot 80 + 100 \cdot 60 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 100 \cdot 80 - \frac{\sqrt{2}}{2} 100 \cdot 60) \\ \frac{ds}{dt} \big|_{t=t_0} &= \frac{140 - 70\sqrt{2}}{\sqrt{2 - \sqrt{2}}} = 70\sqrt{2 - \sqrt{2}} \end{aligned}$$

Luego los automóviles en el instante  $t_0$  se separan a una velocidad de  $70\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  km/hrs.

Otra forma de dar esta respuesta es: Luego los automóviles en el instante  $t_0$  se separan a “razón” de  $70\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  km/hrs.

### 5.5.3 Razón de Cambio, tasa de variación

A continuación veremos una de las múltiples aplicaciones de la derivada, la que refiere a **variación o razón de cambio**. Por ejemplo, la velocidad que ha sido definida anteriormente es la variación de la posición  $s(t)$  con respecto al tiempo (su rapidez de variación). La aceleración  $a(t)$  de  $P$  al tiempo  $t$  es la razón de cambio de la velocidad con respecto al tiempo.

Consideremos la siguiente situación general;

Sea  $y = f(t)$  donde  $f$  es una función derivable respecto al tiempo  $t$

1. La tasa (o razón) media de variación de  $y = f(t)$  en el intervalo  $[t, t + h]$  es

$$\frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

2. La tasa (o razón) de variación de  $y = f(t)$  con respecto a  $t$  es

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

Notar que esta definición es análoga al concepto de velocidad.

Las unidades que deben usarse en las definiciones anteriores dependen de la naturaleza de la cantidad representada por  $f$ .

---

<sup>7</sup> Como lo más directo y fácil de obtener  $s(t_0)$  usando 5.17, el estudiante comete el error de hacer el cálculo, perdiendo de vista que la ecuación 5.17 le permite calcular la derivada.

Se aconseja al lector a plantear siempre los problemas de este tipo en variables, sin evaluar hasta después de derivar.

**Ejemplo 418** El volumen  $V$  (en  $\text{pie}^3$ ) de una pequeña represa durante la época de lluvia, está dado por

$$V = 5000(t + 1)^2$$

donde  $t$  se mide en meses y  $0 \leq t \leq 3$ . La tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo es el flujo instantáneo hacia la represa. Calcule el flujo en los tiempos  $t = 0$  y  $t = 2$  ? ¿Cuál es el valor del flujo cuando el volumen es de  $11.250\text{pie}^3$ ?

**Solución:** Por definición la tasa de cambio del volumen con respecto al tiempo es  $\frac{dV}{dt}$ .

En este problema  $\frac{dV}{dt}$  representa el flujo hacia la represa, entonces derivando la función  $V$  respecto del tiempo tenemos

$$\frac{dV}{dt} = 10.000(t + 1)$$

evaluando en  $t = 0$  y  $t = 2$  obtenemos el flujo;

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} \big|_{t=0} &= 10.000\text{pie}^3/\text{meses} \\ \frac{dV}{dt} \big|_{t=2} &= 30.000\text{pie}^3/\text{meses}\end{aligned}$$

Si el volumen  $V = 11.250 \text{ pie}^3$  entonces

$$11.250 = 5.000(t + 1)^2$$

de donde  $t = 0.5$  meses

$$\frac{dV}{dt} \big|_{t=0.5} = 15.000\text{pie}^3/\text{meses}$$

**Ejemplo 419** La Temperatura  $T$  (en grados Celsius) de una solución al tiempo  $t$  (en minutos) está dada por

$$T(t) = 10 + 4t + \frac{3}{t + 1}$$

para  $1 \leq t \leq 10$

1. Calcule aproximadamente la tasa media de cambio o variación de la temperatura durante el intervalo de tiempo  $[2, 2.35]$ .
2. Calcule la tasa de variación o razón de cambio de  $T(t)$  con respecto al tiempo  $t$  en  $t = 2$  y  $t = 9$ .

**Solución:**

1. Sustituyendo  $t = 2, h = 0.35$  en la definición se obtiene que la tasa media de cambio de  $T$  en  $[2, 2.35]$  es

$$\frac{T(2.35) - T(2)}{0.35} \approx 3.7$$

2. Por definición la tasa de variación de  $T(t)$  con respecto al tiempo es

$$T'(t) = 4 - \frac{3}{(t + 1)^2}$$

Así,

$$T'(2) = 4 - \frac{3}{(2 + 1)^2} \quad T'(9) = 4 - \frac{3}{(9 + 1)^2}$$

**Ejemplo 420** Los extremos de un abrevadero de 3 mt de largo tienen la forma de triángulo equilátero con lados de 60cm (perfil). Se suministra agua al abrevadero a razón de 20 L/min. ¿Cuál es la rapidez de cambio o variación del nivel del agua cuando la profundidad es de 20cm? (1L(litro)= 1000cm<sup>3</sup>)

**Solución:** Sea  $h(t)$  el nivel del agua en el instante  $t$ ,  $V(t)$  el volumen del agua en el instante  $t$ ,  $r(t)$  la longitud que se muestra en la figura ??

Luego el volumen  $V(t)$  está dado por

$$V(t) = 300h(t)r(t)$$

pero por teorema de Thales, en el triángulo  $CDB$ , se tiene

$$\frac{30}{30\sqrt{3}} = \frac{r(t)}{h(t)}$$

donde  $30\sqrt{3}$  es la altura del triángulo equilátero  $ACB$ . Luego  $r(t) = \frac{h(t)}{\sqrt{3}}$  y  $V(t) = 300\frac{h^2(t)}{\sqrt{3}}$ .

Así, derivando con respecto al tiempo  $t$ , tenemos

$$\frac{dV}{dt} = 2\frac{300}{\sqrt{3}}h(t)\frac{dh}{dt}$$

de donde

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{600h(t)} \frac{dV}{dt}.$$

Evaluando cuando  $h = 20\text{cm}$  tenemos

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\sqrt{3}}{600 \cdot 20} \cdot 20000 \text{ cm}^3/\text{min}$$

Así la rapidez de cambio del nivel del agua cuando la profundidad es  $20\text{cm}$  es  $\frac{5\sqrt{3}}{3}\text{cm}^3/\text{min}$ .

**Ejemplo 421** La orilla de una piscina es un rectángulo de 60 pie de largo y 30 pie de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 4 a 9 pie en un tramo horizontal de 40 pie y después continúa al mismo nivel los 20 pie restantes como se ilustra en la figura ??, la cual representa una sección transversal. La piscina se está llenando a razón de 500 gal/min de agua. Calcule aproximadamente la rapidez de cambio del nivel del agua en el momento en que;

1. La profundidad en la parte más honda es de 4 pie ( $1\text{gal} \approx 0.1337\text{pie}^3$ ).
2. La profundidad es de 6 pie.
3. La profundidad es de 5 pie.

**Solución:**

1. En el ejemplo 107 del capítulo de funciones obtuvimos que la función volumen en término de  $h$  es

$$V(h) = \begin{cases} 600h + 120h^2 & 0 < h < 5 \\ 600h + 3000 + 1200(h - 5) & 5 \leq h \leq 9 \end{cases}$$

donde  $h$  es el nivel del agua en el lado más profundo. Luego para calcular la rapidez de cambio del nivel del agua con respecto al tiempo cuando  $h = 4$  pie consideramos la función volumen para  $0 < h < 5$ ;

$$V(h) = 600h + 120h^2$$

Así, derivando con respecto al tiempo, por (regla de la cadena) tenemos

$$\frac{dV}{dt} = 600\frac{dh}{dt} + 120 \cdot 2h\frac{dh}{dt}$$

por lo tanto

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dV}{dt} \cdot \frac{1}{600 + 240h}$$

donde  $h = h(t)$ , pero  $\frac{dV}{dt} = 500 \cdot 0.1337 \text{pie}^3/\text{min}$  y  $h = 4\text{pie}$  luego

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{h=4} = 500 \cdot 0.1337 \cdot \frac{1}{600 + 240 \cdot 4} \approx 0.0429 \text{pie}^3/\text{min}$$

Así la rapidez de cambio del nivel del agua en el instante en que el nivel del agua es 4 pies es aproximadamente  $0.0429 \text{pie}^3/\text{min}$ .

2. Para calcular la razón de cambio cuando  $h = 6$  se procede de manera análoga a la parte (a) considerando

$$V(h) = 600h + 3000 + 1200(h - 5)$$

pues esta función está definida para  $5 \leq h \leq 9$ .

3. ejercicio para el lector

**Ejemplo 422** *Un tanque cónico de 12 pie de altura y 8 de diámetro en la tapa, se llena con agua a una razón constante. Al encontrar el nivel a media altura, la razón de cambio de esta altura es de  $1 \text{pie}/\text{min}$ . ¿Cuánto tardaría en llenarse el tanque?*

**Solución:** Sea  $h$  la altura del nivel de agua y  $r$  la longitud del radio del cono cuando la altura es  $h$  (ver figura ??).

Como  $\frac{dV}{dt} = k$  donde  $k$  constante entonces  $V = kt + C$ . Como  $V = 0$  en  $t = 0$  entonces  $C = 0$  Luego

$$V = kt \tag{5.19}$$

pero

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

luego

$$V = kt = \frac{1}{3}\pi r^2 h \tag{5.20}$$

pero del triángulo  $ABC$  se tiene

$$\frac{4}{12} = \frac{r}{h}$$

de donde  $r = \frac{1}{3}h$ . Así reemplazando en ( 5.20) tenemos

$$kt = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}\right)^2 h^3$$

derivando con respecto a  $t$  tenemos

$$k = \frac{1}{27}\pi 3h^2 \frac{dh}{dt} \tag{5.21}$$

pero al encontrar el nivel del agua a media altura, es decir, cuando  $h = 6$  se tiene;

$$\frac{dh}{dt} \Big|_{h=6} = 1$$

Así evaluando la expresión ( 5.21) cuando  $h = 6$ ;

$$k = \frac{\pi}{9} \cdot 6^2 \cdot 1 = 4\pi$$

Por lo tanto

$$V = 4\pi t$$

Por otra parte el tanque está lleno cuando  $V = \frac{1}{3}\pi 4^2 12 = 64\pi$ , es decir el tanque se llena cuando  $4\pi t = 64\pi$  de donde  $t = 16$ .

Así el estanque tardaría en llenarse 16 minutos.

No tan sólo interesa las razones de cambio con respecto al tiempo, sino también con respecto a otras variables.

**Definición 5.18** Sea  $y = f(x)$  donde  $x$  es cualquier variable

1. La **tasa media de variación** de  $y$  con respecto a  $x$  en el intervalo  $[x, x + h]$  es el cociente

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

2. La **tasa instantánea de variación** de  $y$  con respecto a  $x$  es el límite de la razón promedio cuando  $h$  tiende a 0, es decir,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Esto significa que si la variable  $x$  cambia, entonces  $y$  cambia a razón de  $\frac{dy}{dx}$  unidades por unidad de cambio de  $x$ .

**Ejemplo 423** La relación entre la temperatura  $F$  en la escala Fahrenheit y la temperatura  $C$  en la escala Celsius está dada por

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

¿Cuál es la razón de cambio de  $F$  con respecto a  $C$ ?

**Solución:** Derivando con respecto a  $C$ , tenemos

$$1 = \frac{5}{9} \frac{dF}{dC}$$

de donde la razón de cambio de  $F$  con respecto a  $C$  es

$$\frac{dF}{dC} = \frac{9}{5}$$

**Ejemplo 424** Demuestre que la tasa de cambio del volumen de una esfera con respecto al radio es igual al área de la superficie

**Solución:** El volumen y el área de una esfera están dados por las fórmulas

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3, \quad A = 4\pi r^2$$

donde  $r$  es el radio. Es claro que si derivamos  $V$  con respecto a  $r$  tenemos

$$\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi 3r^2 = 4\pi r^2 = A,$$

es decir, la tasa de cambio del volumen es igual al área de la superficie.

### Ejemplos típicos

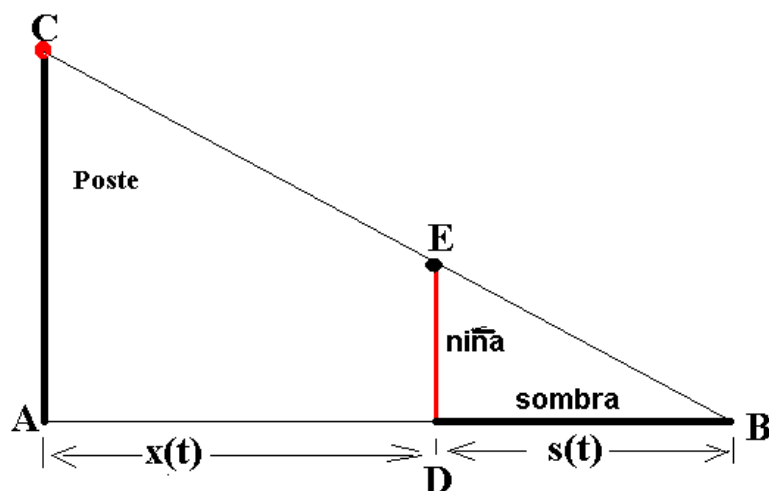
#### Problema de la sombra

Paulina, de 1,2 metros de alto, corre en la noche alejándose de un poste a la velocidad de  $5 \frac{mts}{seg}$ ; el foco del poste que ilumina a Paulina está a 7,5 metros de altura. A medida que se aleja del poste la sombra de ella crece (¿es verdad? o ¿realmente decrece?).

Contestemos las siguientes preguntas

a.- ¿A qué velocidad cambia el largo de la sombra de Paulina?

b.- El extremo de la sombra se aleja también del poste, la velocidad de este alejamiento ¿es la misma velocidad de la niña? o ¿es la misma velocidad dada como respuesta a la pregunta anterior?



Sea:

$x(t)$  la distancia de la niña al poste en el instante  $t$ ,  
 $s(t)$  el largo de la sombra de la niña en el tiempo  $t$

Entonces la velocidad de la niña es  $\frac{dx(t)}{dt}$  y en término de estas variables, lo que buscamos para contestar la primera pregunta es  $\frac{ds(t)}{dt}$

Lo que debemos hacer es encontrar una relación en donde aparezca  $s(t)$  y después derivar.

Como los triángulos  $ABC$  y  $DEB$  son semejantes (tienen los mismos ángulos), se da la siguiente relación entre los lados

$$\frac{AC}{DE} = \frac{AB}{DB}$$

y de esta forma tenemos

$$\frac{7,5}{1,5} = \frac{x(t) + s(t)}{s(t)}$$

Que es lo mismo que

$$\begin{aligned} 7,5s(t) &= 1,5x(t) + 1,5s(t) \\ 6s(t) &= 1,5x(t) \\ s(t) &= 0,25x(t) \end{aligned}$$

derivando a ambos lados

$$\frac{ds(t)}{dt} = 0,25 \frac{dx(t)}{dt} = 0,25 * (5) \frac{mts}{seg} = 1,25 \frac{mts}{seg}$$

La pregunta b se refiere a la derivada de la suma  $x(t) + s(t)$  y como conocemos cada derivada, la respuesta es no es igual a ninguna de las dos sugeridas, la velocidad del extremo de la sombra es  $6,25 \frac{mt}{seg}$ .

Supongamos ahora que Pedrito es el que corre, pero a  $20 \frac{km}{hr}$ ,

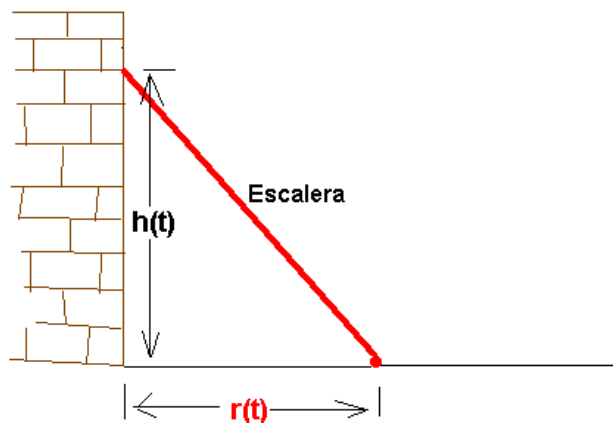
¿Cuál corre más rápido, Pedrito o la niña?

Si Pedrito mide  $135\text{cm}$ , ¿A qué velocidad el extremo de la sombra se aleja del poste?

### Problema de la escalera

Una escalera de metal con ruedas en su base esta apoyada en una muralla de tal forma que su extremo superior esta a  $3\text{mts}$  del suelo. El bloqueo de sus ruedas le impide moverse. La escalera mide  $4\text{mts}$  de largo y es pesada de modo tal que cuando se desbloquean las ruedas la escalera se desliza en la muralla moviéndose su extremo superior a la velocidad de  $100\frac{\text{mt}}{\text{seg}}$ . Cuando esta a un metro del suelo ¿a qué velocidad se mueven las ruedas en ese instante?

Para contestar esa pregunta necesitamos definir algunas variables y hacer un diagrama del problema. El diagrama del problema es:.



Sean:

$r(t)$  la distancia de las ruedas a la muralla y  
 $h(t)$  la distancia del extremo superior de la escalera al suelo.

Por lo tanto  $\frac{dh}{dt}(t) = 100\frac{\text{mt}}{\text{seg}}$  y lo que buscamos es  $\frac{dr}{dt}$  en  $t_0$  que es el instante en que la escalera está a  $1\text{metro}$  del suelo, es decir,  $h(t_0) = 1$  metro.

Como se ve, la muralla con la escalera y el suelo en todo tiempo  $t$  forman un triángulo rectángulo así tenemos el teorema de Pitágoras,

$$(h(t))^2 + (r(t))^2 = (4)^2, \quad \clubsuit$$

derivando en ambos lados de la igualdad (y usando la regla de la cadena) tenemos

$$2h(t)\frac{dh(t)}{dt} + 2r(t)\frac{dr(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dr(t)}{dt} = -\frac{h(t)}{r(t)}\frac{dh(t)}{dt}$$

y por lo tanto en el instante  $t_0$

$$\frac{dr}{dt}(t_0) = -\frac{h(t_0)}{r(t_0)}\frac{dh}{dt}(t_0) = -\frac{1}{r(t_0)}100\frac{\text{mt}}{\text{sg}} \quad \blacktriangle$$

Usando  $\clubsuit$  podemos obtener  $r(t_0)$

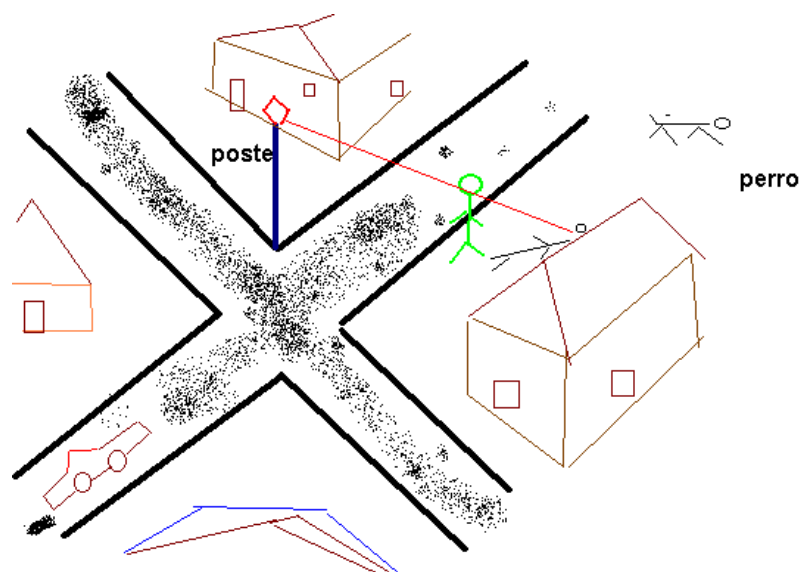


Figure 5.2:

$$(h(t_0))^2 + (r(t_0))^2 = (4)^2 \Leftrightarrow (1)^2 + (r(t_0))^2 = 16$$

$$r(t_0) = \sqrt{15}$$

Por lo tanto las ruedas se deslizan a la velocidad de

$$\frac{dr}{dt}(t_0) = -\frac{1}{\sqrt{15}} 100 \frac{mt}{sg} \approx -25,820 \frac{mt}{sg}$$

¿Por qué nos dió una respuesta negativa?

Por el sistema de referencia elegido; como la distancia  $h(t)$  disminuye, la velocidad de caída de la escalera debería ser negativa, es decir, en vez de haber puesto en  $\blacktriangle 100 \frac{mt}{sg}$  deberíamos haber puesto  $-100 \frac{mt}{sg}$ .

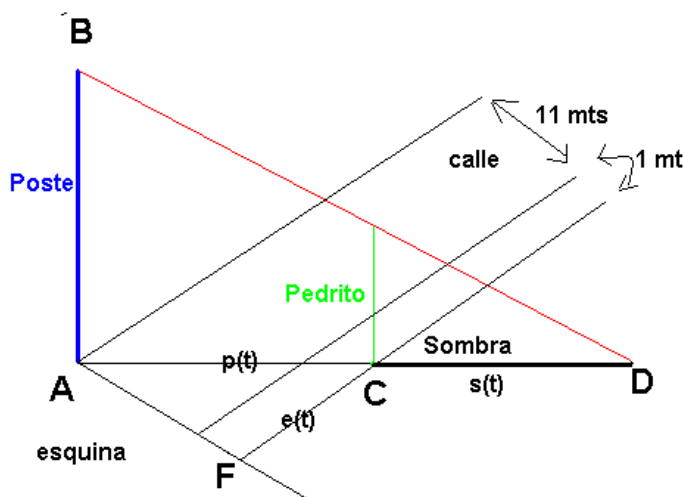
### Problema de la Sombra 2

En el cruce de dos calles, que tienen ancho 11 *metros* cada una, hay un poste de 3 metros de alto en una de las esquinas. En la noche Pedrito, de 1,9 *metros*, camina a  $1,3 \frac{mt}{sg}$  alejándose de la esquina por la vereda contraria al poste y a un metro de la orilla de la calle.

¿A qué velocidad se alarga la sombra de Pedrito cuando este se encuentra a 13 *metros* de la orilla de la calle que recién cruzó?

Como podemos ver en el diagrama este se puede simplificar a un triángulo rectángulo como sigue





Sea

$p(t)$  distancia de Pedrito a la base del poste ( $p(t) = AC$ )

$s(t)$  largo de la sombra de Pedrito ( $s(t) = CD$ )

$e(t)$  distancia de Pedrito a la calle transversal a la calle donde camina ( $e(t) = CF$ )

Sea  $t_0$  el instante que Pedrito está a 13 metros

¿Qué buscamos?, El valor de  $\frac{ds}{dt}(t_0)$ ,

¿Qué conocemos?  $\frac{de}{dt}(t_0) = 1,3 \frac{mt}{sg}$

Como tenemos dos triángulos rectángulos semejantes

$$\begin{aligned} \frac{3}{1,9} &= \frac{p(t) + s(t)}{s(t)} \\ (3 - 1,9)s(t) &= 1,9p(t) \\ \frac{ds(t)}{dt} &= \frac{1,9}{(3 - 1,9)} \frac{dp(t)}{dt} \\ \frac{ds}{dt}(t_0) &= 1,7273 \frac{dp}{dt}(t_0) \end{aligned}$$

Por lo tanto necesitamos conocer  $\frac{dp}{dt}(t_0)$ . Como  $AFC$  forma un triángulo rectángulo, tenemos

$$(p(t))^2 = (11 + 1)^2 + (e(t))^2 \quad \star$$

derivado

$$2p(t) \frac{dp}{dt} = 2e(t) \frac{de}{dt}$$

así, en el instante  $t_0$

$$\frac{dp}{dt}(t_0) = \frac{e(t_0)}{p(t_0)} \frac{de}{dt}(t_0) = \frac{13}{p(t_0)} 1,3 \frac{mt}{sg}$$

En el instante  $t_0$ , usando  $\star$  tenemos

$$\begin{aligned} (p(t_0))^2 &= 144 + (e(t_0))^2 = 144 + 169 = 313 \\ p(t_0) &= \sqrt{313} \end{aligned}$$

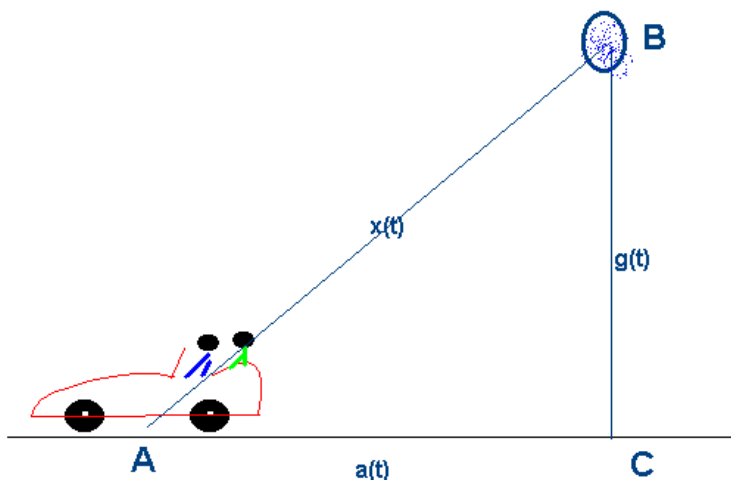
De esta forma logramos  $\frac{dp}{dt}(t_0) = \frac{13}{\sqrt{313}} 1,3 \frac{mt}{sg}$ , y así,

$$\frac{ds}{dt}(t_0) = 1,7273 \frac{13}{\sqrt{313}} 1,3 \frac{mt}{sg} \approx 1,6500 \frac{mt}{sg}$$

### El globo de Pedrito

En una carretera un auto va a  $90 \frac{km}{hr}$ , en el interior va Pedrito con un globo con helio. Pedrito suelta el globo y este sube en forma perpendicular a  $10 \frac{mt}{sg}$ . Veamos a qué velocidad se separa Pedrito del globo después de 7 segundos.

Esquema del problema



Sea  $t = 0$  el instante que Pedrito suelta el globo y sea  $x(t) = AB$  la distancia entre el globo y el auto,  $g(t) = CB$  la distancia del globo al suelo,  $a(t) = AC$  la distancia del auto al punto de  $C$ , donde se forma un ángulo recto.

¿Qué buscamos?. Respuesta:  $\frac{dx}{dt}(7)$

¿Qué tenemos?. Respuesta:  $\frac{dg}{dt}(t) = 10 \frac{mt}{seg}$ , en particular  $\frac{dg}{dt}(t_0) = 10 \frac{mt}{seg}$ ,

$\frac{da}{dt}(t)$ , el cual esta en kilómetros por hora, así que debemos cambiarla a metros segundos

$$\frac{da}{dt}(t) = 90 \frac{km}{horas} = 90 \frac{1000metros}{3600segundos} = 25 \frac{metros}{segundos}$$

Como  $ABC$  forma un triángulo rectángulo

$$\begin{aligned} x^2(t) &= g^2(t) + a^2(t) & \boxtimes \\ 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) &= 2g(t) \frac{dg}{dt}(t) + 2a(t) \frac{da}{dt}(t) \\ \frac{dx}{dt}(7) &= \frac{g(7)}{x(7)} \frac{dg}{dt}(7) + \frac{a(7)}{x(7)} \frac{da}{dt}(7) \\ \frac{dx}{dt}(7) &= \frac{g(7)}{x(7)} 10 \frac{mt}{seg} + \frac{a(7)}{x(7)} 25 \frac{mt}{seg} & \heartsuit \end{aligned}$$

por lo tanto necesitamos  $g(7), x(7), a(7)$

$\frac{dg}{dt}(t) = 10 \frac{mt}{seg}$ , después de 7 segundo el globo esta a  $10 * 7 = 70$  metros

$\frac{da}{dt}(t) = 25 \frac{metros}{segundos}$  después de 7 segundo el auto está a  $25 * 7 = 175$  metros y utilizando  $\boxtimes$  en  $t = 7$

$$x^2(7) = g^2(7) + a^2(7) = 70^2 + (175)^2 = 35\,525$$

De esta forma tenemos toda la información para ponerla en  $\heartsuit$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt}(7) &= \sqrt{\frac{1}{35\,525}} \left( 70 * 10 \frac{mt}{seg} + 175 * 25 \frac{mt}{seg} \right) \\ \frac{dx}{dt}(7) &= \sqrt{\frac{1}{35\,525}} (70 * 10 + 175 * 25) \frac{mt}{seg} = \frac{145}{\sqrt{5}} \frac{mt}{seg}\end{aligned}$$

### La Teletón

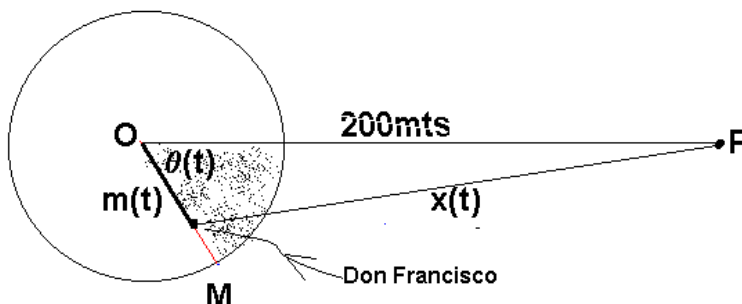
El círculo de la figura representa un escenario redondo, de radio 3 metros, ubicado al centro del Estadio Nacional y que gira a 0,5 revoluciones por minutos. Don Francisco camina desde el centro del escenario (punto  $O$ ) en forma recta hasta el punto  $M$  ubicado a la orilla del escenario. La recta  $OM$  forma un ángulo  $\theta = \frac{\pi}{4}$  con la recta que une  $O$  con la ubicación de Paula que esta en la galería (punto  $P$ ) a docientos metros del centro.

¿A que velocidad varia la distancia entre Don Francisco y Paula si Don Francisco camina a  $0,2 \frac{mt}{seg}$ ?

Sea  $x(t)$  la distancia entre Don Francisco y Paula en el tiempo  $t$ ,

$m(t)$  la distancia de Don Francisco al centro del escenario en el tiempo  $t$ , así  $\frac{dm}{dt}(t) = 0,2 \frac{mt}{seg}$

$\theta(t)$  el ángulo que forma la ruta de Don Francisco en el escenario con la recta  $OP$ .



Lo que buscamos es  $\frac{dx}{dt}(t_0)$ , donde  $t_0$  es el instante que Don Francisco llega a  $M$ .

Como la ubicación de Don Francisco, Paula y el centro del escenario en todo tiempo  $t$  forman un triángulo, usaremos la ley del coseno

$$x^2(t) = m^2(t) + 200^2 - 2m(t) * 200 \cos(\theta(t)) \quad \diamond$$

Derivando en  $\diamond$  respecto al tiempo nos queda

$$\begin{aligned}2x(t) \frac{dx}{dt}(t) &= 2m(t) \frac{dm}{dt}(t) + 0 - 2 \frac{dm}{dt}(t) 200 \cos(\theta(t)) + 2m(t) * 200 \sin(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) \\ \frac{dx}{dt}(t) &= \frac{1}{x(t)} \left( m(t) \frac{dm}{dt}(t) - 200 \frac{dm}{dt}(t) \cos(\theta(t)) + 200m(t) \sin(\theta(t)) \frac{d\theta}{dt}(t) \right) \quad \blacktriangledown\end{aligned}$$

Como en  $t_0, m(t_0) = 3 \text{ metros}$  y  $\theta(t_0) = \frac{\pi}{4}$ , utilizando  $\diamond$  lograremos  $x(t_0)$

$$x^2(t_0) = m^2(t_0) + 200^2 - 2m(t_0) * 200 \cos(\theta(t_0)) = 3^2 + 200^2 - 2 * 3 * 200 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$x(t_0) = \sqrt{40\,009 - 1200\frac{1}{2}\sqrt{2}}$$

De esta forma ▼ nos queda

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{40\,009 - 1200\frac{1}{2}\sqrt{2}}} \left( 3 \frac{dm}{dt}(t_0) - 200 \frac{dm}{dt}(t_0) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 600 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{d\theta}{dt}(t_0) \right)$$

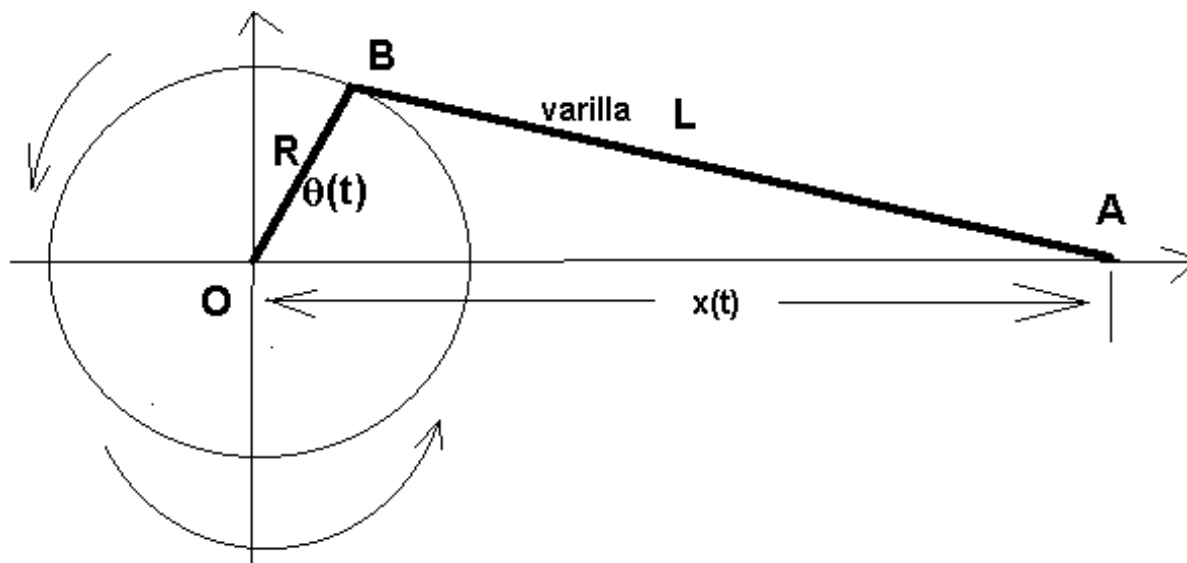
$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{1}{\sqrt{40\,009 - 1200\frac{1}{2}\sqrt{2}}} \left( 3 \frac{dm}{dt}(t_0) - 200 \frac{dm}{dt}(t_0) \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 600 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \frac{d\theta}{dt}(t_0) \right)$$

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{160\,036 - 4802\sqrt{2}}} \left( 3 * 0,2 - 200 * \frac{1}{2}\sqrt{2} * 0,2 + 600 * \frac{1}{2}\sqrt{2} * 0,5 \right)$$

$$\frac{dx}{dt}(t_0) = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{160\,036 - 4802\sqrt{2}}} (0,6 + 130\sqrt{2}) \approx 0,942\,35 \frac{m}{seg}.$$

### Problema del tren a vapor:

En la figura hay una varilla de largo  $L$  fija (en el punto B), en el aro de una rueda de radio  $R$  el otro extremo de la varilla (A) se mueve en forma horizontal (eje  $x$ ). La rueda rota fija en su centro  $O$  contra el sentido del reloj a 3 revoluciones por segundo



Veamos la velocidad del movimiento del extremo A.

Sea  $x(t)$  la distancia desde el centro  $O$  hasta el punto A (OA) en el tiempo  $t$ . Con esta notación podemos decir que buscamos  $\frac{dx}{dt}(t)$ .

Sea  $\theta(t)$  el ángulo que forma el eje horizontal con el radio que une el centro con el extremo B de la varilla en el tiempo  $t$ .

Utilizando la ley del coseno en el triángulo  $OBA$

$$L^2 = x^2(t) + R^2 - 2x(t)R \cos \theta(t)$$

derivando en ambos lados (no olvidar la derivada del producto y la regla de la cadena) tenemos

$$2L * 0 = 2x(t) \frac{dx}{dt}(t) + 2R * 0 - 2 \frac{dx}{dt}(t) R \cos \theta(t) + 2x(t) R \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}(t)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) [2R \cos \theta(t) - 2x(t)] = 2x(t)R \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}(t)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) [2R \cos \theta(t) - 2x(t)] = 6x(t)R \sin \theta(t)$$

$$\frac{dx}{dt}(t) = \frac{3x(t)R \sin \theta(t)}{R \cos \theta(t) - x(t)}$$

¿Qué relación deben cumplir  $R$  y  $L$ ?

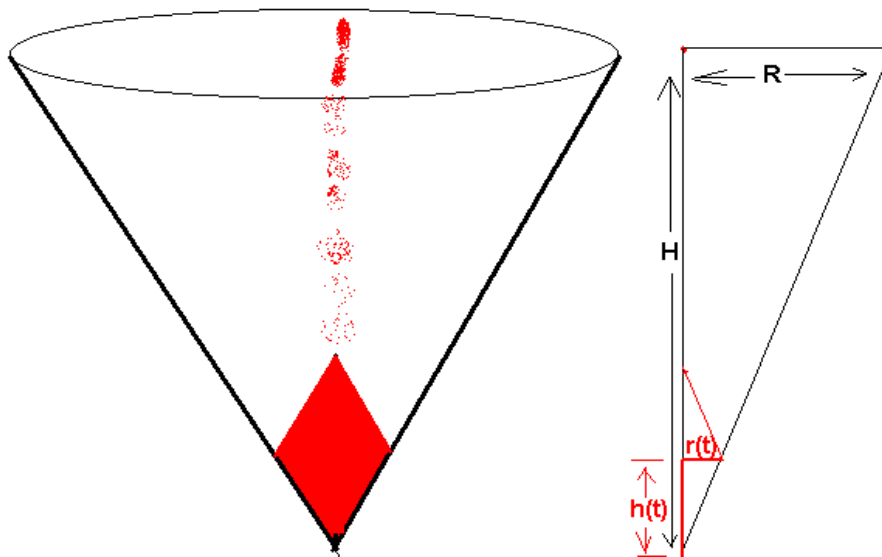
¿En que posición del ángulo  $\theta$  se tiene mayor velocidad?

¿En que momento se tiene velocidad 0 ?

Con un mismo  $\theta$ . Las velocidades aumentan o disminuyen si la rueda es mas grande?.

### Problema de arena

En un estanque en forma de cono circular recto de radio  $R$  y altura  $H$  se deja caer arena de tal forma que a medida que se llena el estanque se forma dos conos iguales.



Si se deja caer  $A \frac{m^3}{seg}$  ¿Con qué velocidad sube el extremos de superior de la pila de arena cuando se hecha el máximo de arena?

Sea  $h(t)$  el nivel de la arena en la pared del cilindro en el tiempo  $t$ ,  $r(t)$  el radio de los conos asociados al nivel  $h(t)$ .

Dada estas notaciones, se puede decir que buscamos  $\frac{d^2h}{dt}(t_0)$ , donde  $t_0$  es el instante que se llena el estanque, es decir,  $h(t_0) = H$ .

Si  $V(t)$  denota el volumen de la arena en el tiempo  $t$ , como el volumen total de arena en el tiempo  $t$  es dos veces el volumen del cono recto de altura  $h(t)$  y radio  $r(t)$ , se tiene

$$V(t) = 2 * \frac{1}{3} h(t) r^2(t)$$

De esta relación se puede obtener  $\frac{d^2h}{dt}(t_0)$  via derivación, pero también aparecería la derivada de  $r(t)$ , como se ve a continuación

$$\frac{dV}{dt}(t) = 2 * \frac{1}{3} \frac{dh}{dt}(t) r^2(t) + 2 * \frac{1}{3} h(t) 2r(t) \frac{dr}{dt}(t) \quad \textcircled{S}$$

Pero si vemos el triángulo dibujado al lado del cono (como modelo matemático), vemos dos triángulos semejantes, por lo tanto tenemos la siguiente relación entre sus lados

$$\frac{R}{r(t)} = \frac{H}{h(t)}$$

y por lo tanto

$$r = \frac{R}{H}h \quad \text{y} \quad \frac{dr}{dt}(t) = \frac{R}{H} \frac{dh}{dt}(t)$$

reemplazando en ⑧ tenemos

$$\begin{aligned} A &= 2 * \frac{1}{3} \frac{dh}{dt}(t) \left( \frac{R}{H} h(t) \right)^2 + 2 * \frac{1}{3} h(t) 2r(t) \frac{R}{H} \frac{dh}{dt}(t) = \frac{dh}{dt}(t) \left[ \frac{2}{3} \left( \frac{R}{H} h(t) \right)^2 + \frac{4}{3} h(t) r(t) \frac{R}{H} \right] \\ \frac{dh}{dt}(t_0) &= \frac{A}{\frac{2}{3} \left( \frac{R}{H} h(t_0) \right)^2 + \frac{4}{3} h(t_0) r(t_0) \frac{R}{H}} = \frac{1}{2} \frac{A}{R^2} \end{aligned}$$

¿Cuándo el nivel sube más rápido, cuando la altura de la arena es más poca ´ cuando está cerca de  $H$ ?

## 5.6 Máximo y Mínimo

Hemos visto algunas aplicaciones de la derivada. Ahora veremos que la derivada además nos da información sobre el crecimiento y decrecimiento de la funciones, y nos permitirá encontrar los puntos donde hay máximos o mínimos.

Hay dos técnicas directas para encontrar tales puntos, estas técnicas generalmente se denominan criterio de la primera derivada y criterio de la segunda derivada.

Para entrar en materia necesitamos definir con precisión que entenderemos por máximo, mínimo, etc.

**Definición 5.19** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ , diremos que  $f(a)$  es el **valor máximo** de la función  $f$  (ó Valor Máximo absoluto de  $f$  o simplemente el máximo de  $f$ ) si para todo elemento  $x \in A$  se cumple  $f(x) \leq f(a)$

En forma totalmente análoga se define mínimo absoluto o mínimo.  $f(a)$  es el valor mínimo absoluto en  $A$  si

$$f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in A$$

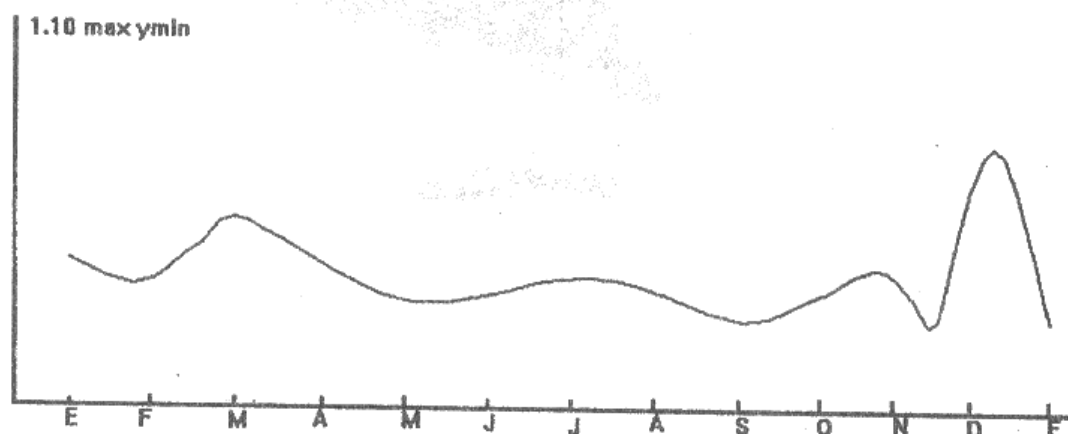
Note que necesariamente el valor máximo (el valor mínimo) es la imagen de un punto  $a \in A = \text{Dom} f$ ; Se dice “en  $a$  está el máximo de  $f$ ” (“en  $a$  está el mínimo de  $f$ ”).

Si  $f$  no es inyectiva, puede existir varios otros elementos de  $A$  donde  $f$  alcance el valor máximo o el valor mínimo, sin embargo el valor máximo o el valor mínimo absoluto si existen son únicos.

Por ejemplo la función  $f(x) = \sin x$  no es inyectiva, el valor máximo de  $f$  es 1 y el valor mínimo de  $f$  es  $-1$  y estos valores son alcanzados en más de un punto.

Hay otro concepto de máximo (o mínimo) de  $f$  que es menos exigente, este es máximo local o relativo (mínimo local o relativo).

En el gráfico de ventas de un producto en el año, una multitienda tiene dos “grandes” meses de ventas Marzo y Diciembre (ver gráfico siguiente)

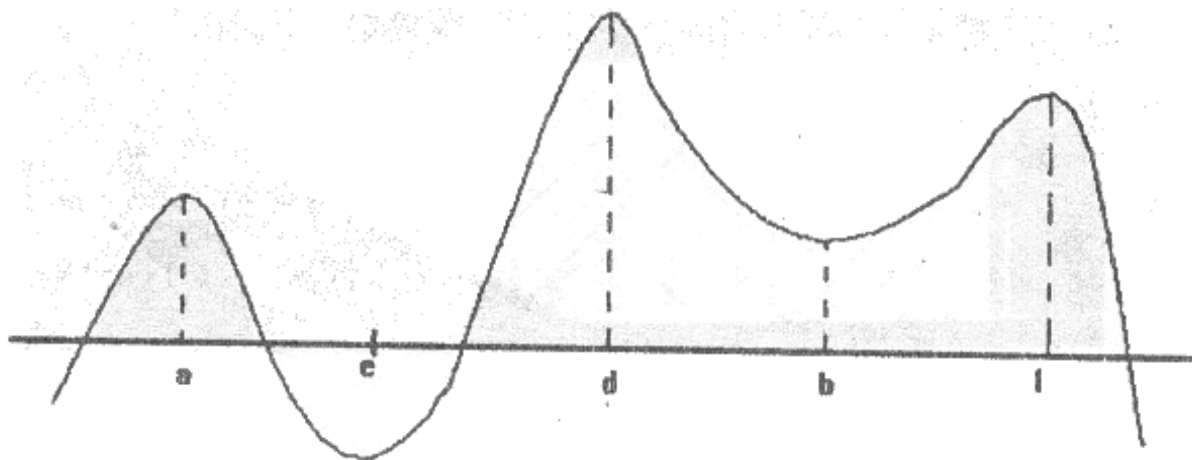


pero claramente ambos no son máximo absolutos.

**Definición 5.20** a) Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que en  $\alpha \in A$  hay un **máximo relativo o máximo local** si existe una vecindad de  $\alpha$ ,  $V_\alpha$  tal que  $f(\alpha)$  es el máximo absoluto de la función  $f|_{V_\alpha}$ , es decir,  $f(\alpha) \geq f(x) \quad \forall x \in V_\alpha$ , análogamente se define **mínimo local**

b) Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Diremos que  $f$  tiene un **máximo relativo estricto** en  $\alpha \in A$  si existe una vecindad de  $\alpha$ ,  $V_\alpha$  tal que  $f(\alpha) > f(x) \quad \forall x \in V_\alpha^* = V_\alpha - \{\alpha\}$ . Análogamente se define **mínimo relativo estricto**

**Ejemplo 425** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua con gráfica dada en la figura



. Claramente  $f(d)$  es el máximo absoluto, a diferencia de los valores  $f(a)$ ,  $f(l)$  que son solamente máximo relativo y de los valores  $f(e)$ ,  $f(b)$  que son mínimos relativos únicamente ( $f(d)$ ,  $f(c)$  son también relativos)

**Definición 5.21** Diremos que un valor  $f(a)$  con  $a \in A$  es un **valor extremo** de  $f$  en  $A$  si es el máximo o mínimo de alguna especie en  $A$  y **punto extremo** al punto  $a$  donde alcanza el valor extremo.

**Ejemplo 426** Sea  $f(x) = 3x^2 + 2$ ,  $x \in [-4, 1]$ .

La gráfica de  $f$  es un trozo de una parábola y claramente se puede notar mediante su gráfica que  $f(0) = 2$  es el mínimo absoluto y que  $f(-4)$  es el máximo absoluto (también relativo) y  $f(1)$  máximo absoluto estricto.

En este caso  $f$  tiene tres valores extremos  $f(0), f(-4), f(1)$ .

**Ejemplo 427** Sea  $f(x) = e^{-2x}$ ,  $x \in [-\ln(5), \ln(7)]$ .

Como la función es estrictamente decreciente  $f$  tiene sólo dos valores extremos

$f(-\ln(5)) = 25$  que es el máximo absoluto en  $A$ .

$f(\ln(7)) = \frac{1}{49}$  que es el mínimo absoluto en  $A$ .

**Ejemplo 428** Sea  $f(x) = 3x - 2$ ,  $x \in ]2, 5]$ .

Claramente  $f$  es estrictamente creciente, por lo tanto el máximo se encuentra en 5, y este es  $f(5) = 13$ . Pero esta función no tiene un mínimo, ya que  $2 \notin \text{Dom} f$ , sin embargo  $f(x)$  es acotado inferiormente por 4, pues

$$4 < f(x) \quad , \quad \forall x \in ]2, 5]$$

No podemos decir que 4 es mínimo absoluto ni local ya que él debe ser imagen de un elemento del dominio que se está utilizando, en este caso  $]2, 5]$

En estos dos últimos ejemplos se puede visualizar lo útil que resulta tener la información relativa al decrecimiento o crecimiento de una función.

Consideremos la figura ★

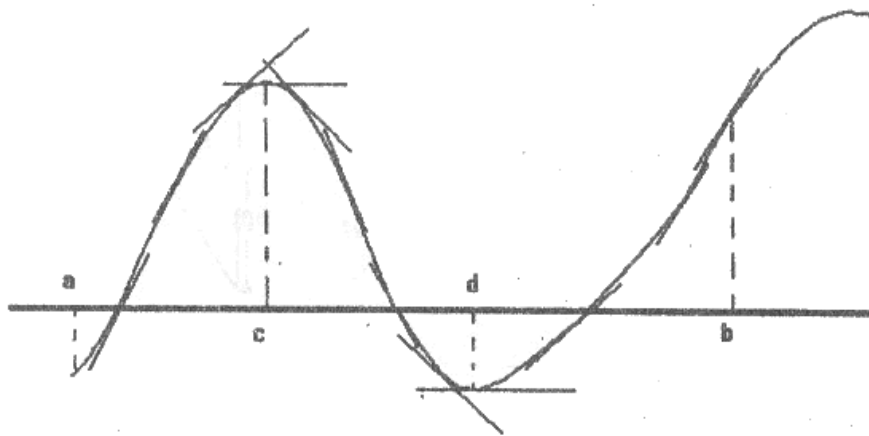


Figura ★

Supongamos que ella representa la gráfica de una función continua en  $[a, b]$  y diferenciable en  $]a, b[$

Notemos que en el intervalo  $]a, c[$ , donde la función es creciente, la pendiente de la tangente a la gráfica de  $f$  en  $(u, f(u))$  es positiva, por lo tanto  $\frac{df}{dx}(u) > 0$ . Esto ocurre para cualquier  $u \in ]a, c[$ , así  $f'(x) > 0$  para todo  $x$  en  $]a, c[$ .

Lo mismo ocurre en el intervalo  $]d, b[$ , es decir,  $f$  es creciente ahí y también  $f'(x) > 0$  en  $]d, b[$ .

Sin embargo en el intervalo  $]c, d[$  la función es decreciente y la recta tangente trazada en  $(v, f(v))$  tiene pendiente negativa, así  $f'(x) < 0$  si  $x \in ]c, d[$ .

Finalmente, usando figura ★ se tiene que las tangentes a la gráfica en los puntos extremos  $c$  y  $d$  tienen pendiente cero, es decir;

$$f'(c) = 0 \wedge f'(d) = 0$$



Note que  $f(a)$ ,  $f(b)$  son también extremos pero las “derivadas derechas e izquierda<sup>8</sup>”, de existir no son nulas.

Como conclusión del caso anterior tenemos que los extremos se pueden encontrar donde la derivada se anula, donde no existe la derivada o en los extremos del intervalo.

Veamos a continuación algunos ejemplos donde estos casos ocurre.

**Ejemplo 429** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada se anula en 0, es decir,  $f'(0) = 0$  y  $f$  tiene un mínimo en 0 (ver figura ♡, gráfico izquierdo.).

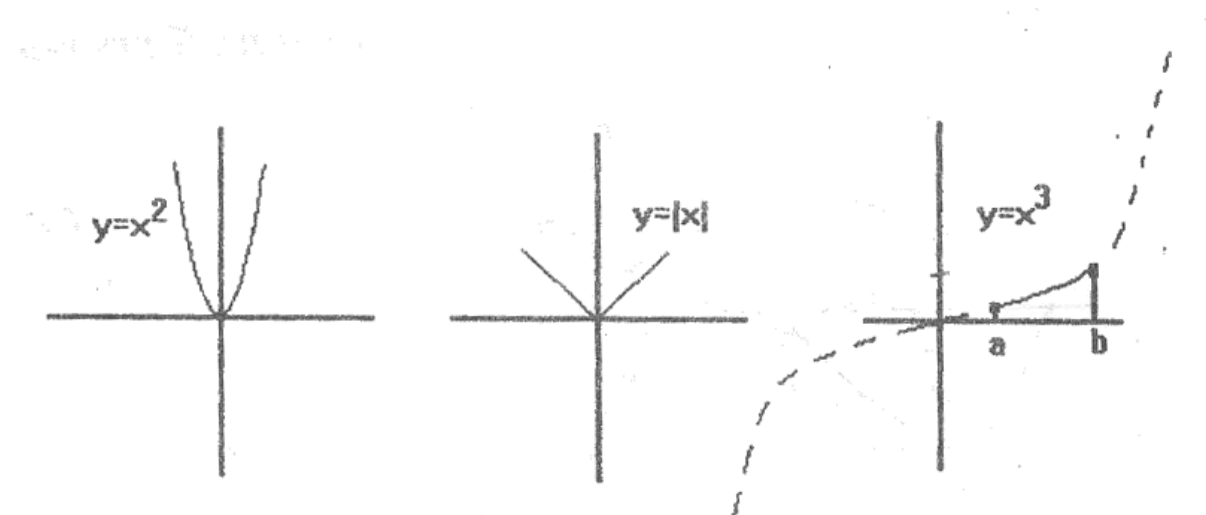


Figura ♡

**Ejemplo 430** Sea  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada no existe en 0, sin embargo  $f$  tiene un mínimo en 0 (ver figura ♡, gráfico central.).

**Ejemplo 431** Sea  $a \neq 0$  y sea  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , la derivada de  $f$  no se anula en  $a$ , es decir,  $f'(a) \neq 0$  y  $f$  tiene un mínimo en  $a$ . (ver figura ♡, gráfico derecho.).

**Teorema 5.22** Sea  $f$  derivable en  $a \in A \subset \text{Dom} f$ ,  $A$  vecindad de  $a$  y  $f(a)$  un mínimo relativo entonces  $f'(a) = 0$ .

**Demostración:** Como  $f(a)$  es un mínimo relativo se tiene que

$$f(a) \leq f(a+h) \text{ para } h \in ]-\varepsilon, \varepsilon[ \text{ (algún } \varepsilon)$$

De esta forma

$$f(a+h) - f(a) \geq 0$$

Así, si  $h > 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0$$

y si  $h < 0$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

<sup>8</sup> la derivada derecha de  $f$  en  $a$  es  $f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$  y la derivada izquierda de  $f$  es  $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ .

luego

$$f'_+(a) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \geq 0 \wedge f'_-(a) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leq 0$$

y como  $f$  es derivable en  $a$  si tiene obtenemos la siguiente cadena

$$0 \geq f'_-(a) = f'(a) = f'_+(a) \geq 0$$

de donde se concluye que  $f'(a) = 0$  □

**Corolario 5.23** Sea  $f(M)$  un valor máximo de  $f$ ,  $f$  derivable en  $M$ , entonces  $f'(M) = 0$

**Demostración:** Si  $f(M)$  es un valor máximo de  $f$ ,  $-f(M)$  es un valor mínimo de  $-f$ , por teorema anterior  $-f'(M) = 0$ . □

**Observación:** Si  $f'(a) = 0$ , no necesariamente  $f$  tiene un extremo en  $a$ .

Por ejemplo;  $f(x) = x^3$  definida en  $\mathbb{R}$  tiene derivada en  $x = 0$  pero no tiene extremos, a pesar que en 0 la derivada es anula.

**Conclusión:** Si  $f$  esta definida en una vecindad de  $p$  y  $f'(p) = 0$  (por lo tanto es derivable en  $p$ ) entonces puede ocurrir que:

- a)  $f(p)$  sea un máximo relativo.
- b)  $f(p)$  sea un mínimo relativo.
- c)  $f(p)$  no sea valor extremo.

¿Pero cómo decidir cuál de estos casos se cumple?

Primero veamos cómo decidir en el caso que sean extremos, trabajando con una función  $f$  continua definida en un intervalo cerrado  $[a, b]$  y derivable en  $]a, b[$ .

Por lo tanto, si  $f$  es un función derivable en  $]a, b[$  y continua en  $[a, b]$  podemos asegurar que  $f$  alcanza el máximo y el mínimo en algún punto  $c \in ]a, b[$  donde  $f'(c) = 0$  o en los bordes  $x = a$  o  $x = b$ .

Así, para determinar cuál es el valor máximo y cuál es el valor mínimo basta evaluar la función en los extremos del intervalos  $x = a$  o  $x = b$ , y los puntos donde la derivada se anula y considerar el valor máximo y el valor mínimo entre estos valores.

**Ejemplo 432** Sea  $f: [-1, 3] \longrightarrow \mathbb{R}$  .  

$$x \longmapsto x^2 - 1$$

Tenemos que  $f$  es continua en  $[-1, 3]$  y derivable en  $] -1, 3[$ .

Puesto que  $f'(x) = 2x = 0 \iff x = 0 \in ] -1, 3[$  entonces evaluando  $f$  en los puntos  $x = 0, x = -1, x = 3$  obtenemos;

$$f(0) = -1 \quad f(-1) = 0 \quad f(3) = 8$$

Así el máximo absoluto de  $f$  es 8 y el mínimo absoluto es -1.

**Ejemplo 433** Se desea construir un oleoducto de un punto  $A$  a otro punto  $B$  que distan 5km y se encuentran en riberas opuestas de un río de cauce recto de 3km de ancho. El oleoducto irá bajo el agua de  $A$  a un punto  $P$  en la ribera opuesta y luego sobre el suelo de  $P$  a  $B$ .

El costo por kilómetro de tubería bajo el agua es el cuádruple del costo sobre tierra. Calcule la posición de  $P$  que minimizará el costo (desprecie la pendiente de lecho del río).

**Solución:** Sea  $x$  la distancia (en kms) del punto  $O$  al punto  $P$  ver figura ♡♡

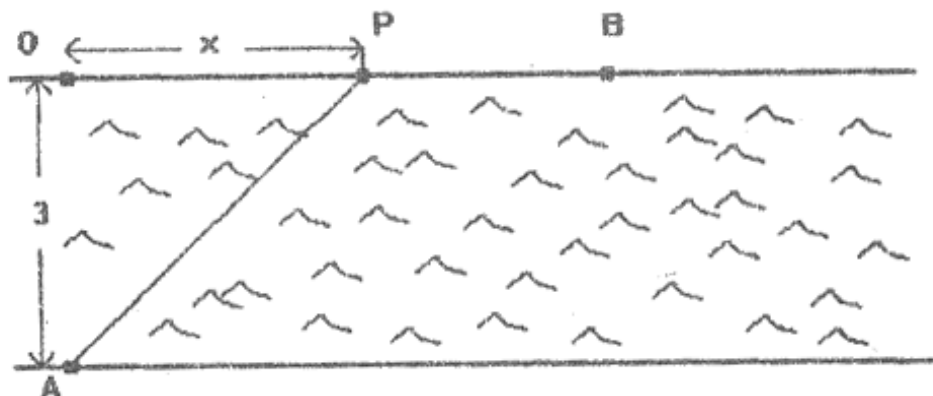


figura ♡♡

Por Pitágoras en el triángulo  $AOB$  se tiene

$$\overline{OB}^2 + 3^2 = 5^2$$

luego  $\overline{OB} = 4$ , de donde  $\overline{PB} = 4 - x$ .

Además, en el triángulo  $AOP$ , se tiene

$$\overline{AP}^2 = 3^2 + x^2 \Rightarrow \overline{AP} = \sqrt{9 + x^2}$$

Sea  $c$  el costo por  $km$  de tubería sobre tierra, entonces el costo por  $km$  de tubería bajo el agua es  $4c$ . Luego la función que representa el costo de construcción del oleoducto es

$$C(x) = 4c\sqrt{9 + x^2} + c(4 - x)$$

donde  $0 \leq x \leq 4$ .

Como  $C(x)$  es una función continua en  $[0, 4]$  y derivable en  $]0, 4[$  entonces  $C(x)$  alcanza su máximo en algún punto  $a$  donde  $f'(a) = 0$  o en los bordes del intervalos  $[0, 4]$ .

$$C'(x) = \frac{4cx}{\sqrt{9 + x^2}} - c$$

Como  $C'(x) = 0 \iff x = \frac{\sqrt{15}}{5} \in ]0, 4[$ ,

evaluando la función  $C(x)$  en  $x = \frac{\sqrt{15}}{5}$  y en los puntos  $x = 0$  y  $x = 4$  se tiene;

$$C(0) = 16c \quad C(4) = 20c \quad C\left(\frac{\sqrt{15}}{5}\right) = 3\sqrt{15}c + 4c$$

Como  $c > 0$  y  $(3\sqrt{15} + 4)c < 16c < 20c$ ,

entonces el mínimo costo es  $(3\sqrt{15} + 4)c$  y la posición del punto  $P$  debe ser  $4 - \frac{\sqrt{15}}{5} km$  del punto  $B$ .

**Ejemplo 434** Un campo petrolero tiene ocho pozos que producen un total de 1600 barriles de crudo al día. Por cada pozo nuevo que se tiene, la producción media por pozo disminuye en 10 barriles diarios. ¿Cuántos pozos adicionales se deben formar para obtener la mayor producción de crudo al día?

**Solución:** Sea  $x$ : el número de pozos adicionales;  $x \geq 0, x \in \mathbb{Z}$ . Si se tiene 8 pozos que producen un total de 1600 barriles entonces la producción media por pozo es 200 barriles diarios. Por cada pozo nuevo que se tiene la producción media por pozo disminuye en 10 barriles luego, la producción media por pozo es

$$200 - 10x$$

por lo tanto la producción de crudo al día es

$$P(x) = (8 + x)(200 - 10x)$$

Como  $x \geq 0$  y  $P(x) \geq 0$ , entonces  $200 - 10x \geq 0$  (de donde  $0 \leq x \leq 20$ ).

En consecuencia la función a maximizar es;

$$P(x) = (8 + x)(200 - 10x), \text{ con } x \in [0, 20].$$

Como  $P$  es una función continua en el intervalo cerrado  $[0, 20]$  y derivable en  $]0, 20[$ ,  $P$  alcanza su máximo en algún punto  $a$  donde  $f'(a) = 0$  o en los bordes del intervalo.

$$P'(x) = (200 - 10x) + (8 + x)(-10)$$

luego;

$$P'(x) = 0 \iff x = 6 \in ]0, 20[.$$

Así al evaluar la función  $P$  de producción en los puntos  $x = 0, x = 6, x = 20$  tenemos;

$$P(0) = 1600 \quad P(6) = 1960 \quad P(20) = 0$$

De esta forma la producción máxima se obtiene con 6 pozos adicionales.

**Ejemplo 435** *El propietario de un huerto de manzana, calcula que si siembra 24 árboles por acre, entonces cada árbol adulto dará 600 manzanas al año.*

*Por cada tres árboles más que se planten por acre el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año. ¿Cuántos árboles se deben plantar por acre para obtener el mayor número posible de manzanas al año?*

**Solución:** Sea  $3x$  el número de árboles que se plantan (sobre los 24 árboles) por acre.

Puesto que por cada tres árboles más que se planten por acre el número de manzanas que produce cada árbol disminuye en 12 al año, entonces si se plantan  $(24 + 3x)$  árboles por acre el número de manzanas que produce cada árbol será  $600 - 12x$ , luego la producción de manzanas al año será;

$$P(x) = (24 + 3x)(600 - 12x).$$

Como  $x \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  y  $P(x) \geq 0$ , entonces  $600 - 12x \geq 0$  (de donde  $x \leq 50$ ).

Así;

$$P(x) = (24 + 3x)(600 - 12x) \text{ con } x \in [0, 50]$$

Luego

$$P'(x) = 3(600 - 12x) + (24 + 3x)(-12)$$

$$P'(x) = 0 \iff x = 21.$$

Dado que  $P$  es continua en  $[0, 50]$  y derivable en  $]0, 50[$  entonces evaluando en los puntos  $x = 0, x = 21, x = 50$  tenemos

$$P(0) = 14400 \quad P(21) = 30276 \quad P(50) = 0$$

luego la máxima producción de manzana se obtiene cuando se plantan 63 árboles más por acre es, es decir, 87 árboles por acre.

### 5.6.1 Test de la Primera Derivada

**Observación:** En los ejemplos anteriores sólo bastó evaluar en los puntos donde  $f'(p) = 0$  y en los bordes del intervalo  $[a, b]$ , pero en general si queremos determinar los extremos de una función necesitamos información sobre el crecimiento y decrecimiento de la función  $f$  en una vecindad de  $p$ .

Así, para  $\epsilon > 0$  se obtiene los siguientes casos:

- a) Si  $f$  es estrictamente creciente en la vecindad izquierda de  $p$ ,  $]p - \epsilon, p[$  y estrictamente decreciente en la vecindad derecha de  $p$ ,  $]p, p + \epsilon[$  se tiene que  $f(p)$  es un máximo local estricto. (figura ♡★ izquierda).

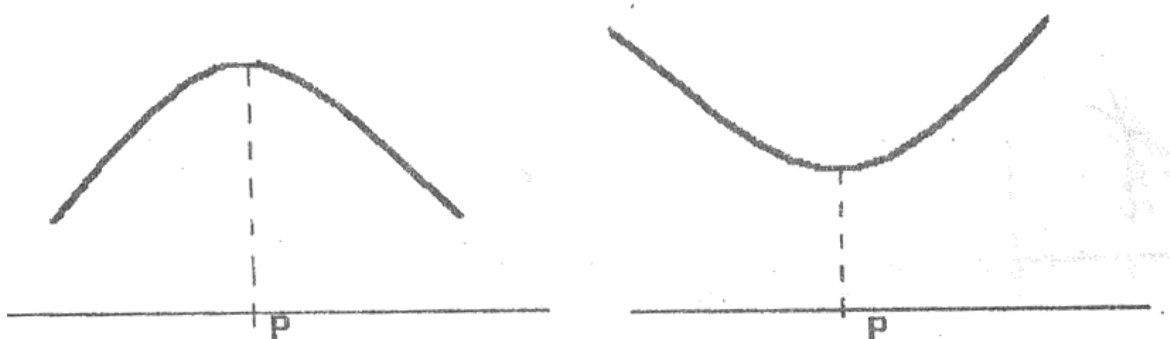


Figura ♡★

- b) Análogamente si  $f$  es estrictamente decreciente en  $]p - \epsilon, p[$  y  $f$  es estrictamente creciente en  $]p, p + \epsilon[$  entonces  $f(p)$  es un mínimo relativo estricto (figura ♡★ gráfico derecho).
- c) Si no ocurre alguna de las dos alternativas anteriores,  $f(p)$  no es valor extremo.

De lo anterior es claro que necesitamos una forma de visualizar cuando  $f$  es creciente y cuando es decreciente. Con ese objeto enunciaremos los teoremas siguientes.

**Definición 5.24** Un punto  $c \in \text{Dom} f$ , se dice que es un punto crítico de  $f$  si ocurre una de las siguientes posibilidades;

$$f'(c) = 0 \text{ ó bien } f'(c) \text{ no existe}$$

**Ejemplo 436** Sea  $f(x) = 3(x - 2)^2$ .

$x = 2$  es un punto crítico de  $f$ , pues  $f'(2) = 0$ .

**Ejemplo 437** Sea  $f(x) = |x - 5|$  luego tenemos que su derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 5 \\ -1 & x < 5 \end{cases}$$

Puesto que  $5 \notin \text{Dom} f'$ ,  $x = 5$  es un punto crítico

**Ejemplo 438** Sea  $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ , entonces tenemos que  $f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$  si  $x \neq 0$ . Por lo tanto  $x = 0$  es un punto crítico.

### 5.6.2 Teorema del valor medio y Rolle

**Teorema 5.25 (Teorema de Rolle)** Sea  $f$  es una función continua en el intervalo  $[a, b]$  y derivable en el intervalo abierto  $]a, b[$ , tal que  $f(a) = f(b)$ , entonces  $f$  tiene al menos un punto crítico en  $]a, b[$ , es decir, existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $f'(c) = 0$ . (ver figura ▼★♠ gráfico izquierdo).

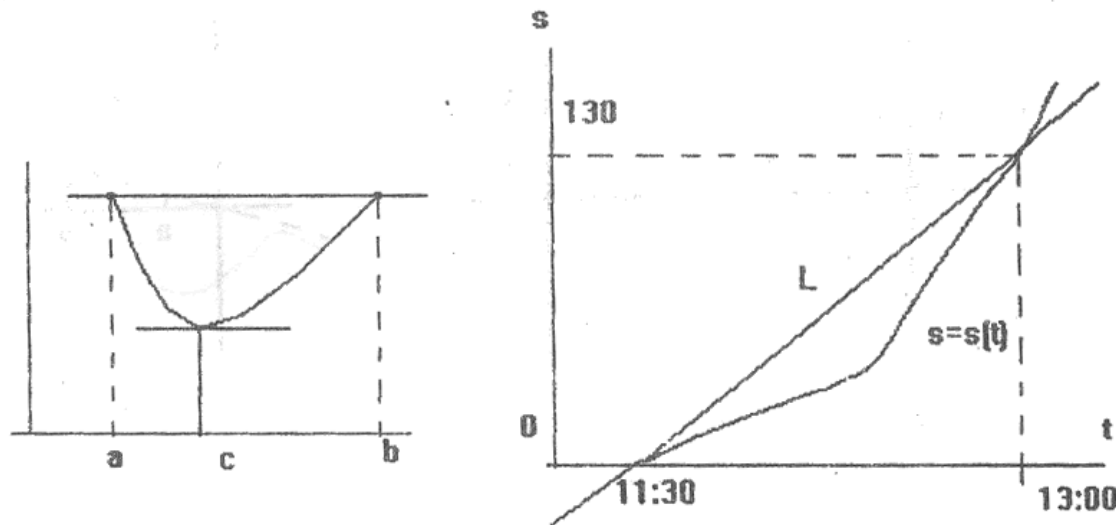


Figura ▼★♠

**Demostración:** <sup>9</sup>

- a) Si la función es constante en  $[a, b]$ , su derivada es cero en  $]a, b[$ , es decir  $f'(x) = 0, \forall x \in ]a, b[$
- b) Si no ocurre lo anterior,  $f$  no es constante y tenemos dos casos, (i) existe un intervalo donde la función crece y luego decrece o bien (ii)  $f$  decrece en un intervalo para luego crecer (ya que  $f(a) = f(b)$ ).

En el primer caso se obtiene un máximo local  $f(c)$  y en el segundo un mínimo local  $f(c)$  en ambos caso la tangente en esos puntos será de pendiente cero  $f'(c) = 0$ . De esta forma  $c$  es un punto crítico .

□

Una generalización en este teorema es el **teorema de valor medio** que se puede motivar de la siguiente forma.

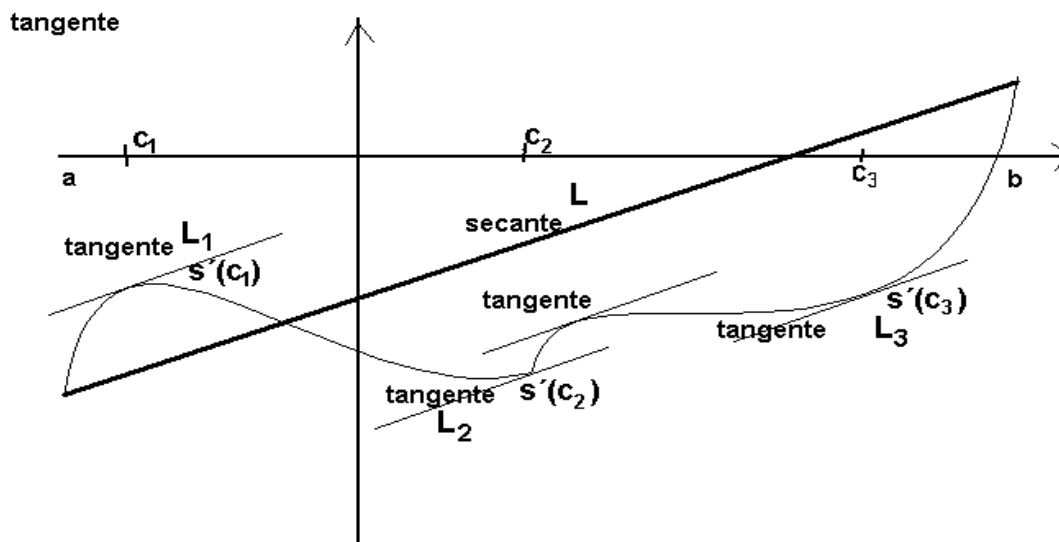
Consideremos un auto (un jeep para estar en onda) que parte de Viña a las 11:30 horas y llega a una parte cercana a Santiago a las 13:00 horas. Si recorre 130 kilómetros, entonces la velocidad promedio o media es

$$\frac{(130 - 0)\text{kilómetros}}{(11:30 - 13:00)\text{horas}} = \frac{130}{1,5} = 86, \overline{6} \text{ km/h.}$$

Esto significa que al menos algún momento de su viaje el velocímetro marcó  $86, \overline{6} \text{ km/h}$ , es decir, la velocidad instantánea en algún momento entre 11:30 y las 13:00 horas fue de  $86, \overline{6} \text{ km/h}$ .

En la figura ▼★♠ se ha graficado la recta  $L$  que indica la velocidad media (recta secante a la gráfica de la función  $s(t)$  que nos da la distancia recorrida por el móvil en el tiempo  $t \in ]11:30, 13:00[$ )

<sup>9</sup>Como  $f$  es continua, la gráfica de  $f$  es como una cuerda que une los puntos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$ . Como estos puntos están al mismo nivel, o bien la cuerda está tensa (constante) o bien tiene ondulaciones (hay máximo y/o mínimo locales).



Las rectas  $L_1$ ,  $L_2$ ,  $L_3$  son paralelas a  $L$ , luego tiene la misma pendiente de la recta secante; ellas están dadas por las derivadas en el punto, en este caso obtenemos la pendiente de la secante

$$\frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

que es igual la pendiente de las tangentes en  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$ , es decir, a los valores  $s'(c_1)$ ,  $s'(c_2)$ ,  $s'(c_3)$ .

Así tenemos la existencia a lo menos de un punto  $c \in ]a, b[$  en este caso ( $c = c_1$ ,  $c = c_2$ ,  $c = c_3$ ) tal que

$$s'(c) = \frac{s(b) - s(a)}{b - a}$$

**Teorema 5.26 (Teorema del Valor Medio)** Sea  $f$  una función definida en  $A$ ,  $[a, b] \subset A$  tal que

1.  $f$  sea continua en  $[a, b]$
2.  $f$  sea derivable en  $]a, b[$

Entonces se tiene que existe al menos un  $c \in ]a, b[$  tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Demostración:** La función

$$g(x) = f(x) - \left[ f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \right]$$

satisface las hipótesis del teorema de Rolle por lo tanto existe  $c \in ]a, b[$  tal que  $g'(c) = 0$  o  $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$   
□

**Observación:** Lo que dice es que la recta tangente secante que pasa por los puntos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  es paralela al menos a una de las rectas tangentes a la gráfica de  $f$  entre los puntos mencionados.

La aplicación más directa de este teorema es en la demostración del siguiente teorema

**Teorema 5.27** Sea  $f$  una función derivable en su dominio.

1. Si  $f'(x) \geq 0$  en  $]a, b[$ , se tiene que  $f$  es creciente en  $[a, b]$ .

2. Si  $f'(x) > 0$  en  $]a, b[$ , se tiene  $f$  es estrictamente creciente en  $[a, b]$ .
3. Si  $f'(x) \leq 0$  en  $]a, b[$ , se tiene que  $f$  es decreciente en  $[a, b]$
4. Si  $f'(x) < 0$  en  $]a, b[$ , se tiene que  $f$  es estrictamente decreciente en  $[a, b]$ .

**Demostración:** Mostraremos sólo (4)

Tenemos que suponer que  $x, y \in [a, b]$  y debemos probar que:  $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$

Sean  $x, y \in [a, b]$ ,  $x < y$ . Como  $f$  satisface el teorema del Valor Medio, tenemos que existe  $c \in [x, y]$  tal que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c)$$

Como  $y - x > 0$  y  $f'(c) < 0$  se tiene que  $f(y) - f(x) < 0$ . Así se ha probado que

$$(\forall x, y \in [a, b])(x < y \Rightarrow f(x) > f(y))$$

□

**Ejemplo 439** Sea  $f$  una función cuya derivada es  $f'(x) = (x - 3)(4 - x)(x - 5)$ .

Determine en que intervalos  $f$  es estrictamente decreciente

**Solución:** Usando la tabla de signos

|         |   | 3 |   | 4 |   | 5 |   |  |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|--|
| $x - 3$ | - | 0 | + |   | + |   | + |  |
| $4 - x$ | + |   | + | 0 | - |   | - |  |
| $x - 5$ | - |   | - |   | - | 0 | + |  |
| $f'(x)$ | + | 0 | - | 0 | + | 0 | - |  |

tenemos  $f'(x) < 0$  en  $]3, 4[$ , por lo tanto  $f(x)$  es estrictamente creciente allí, lo mismo ocurre en el intervalo  $[5, \infty[$ .

**Ejemplo 440** Sea  $f(x) = e^x$ , como  $f'(x) = e^x$  es positiva para todo valor  $x$ , se concluye que  $f$  es estrictamente creciente, sin embargo  $g(x) = e^{-3x}$ ,  $g'(x) = -3e^{-3x}$ , por lo tanto  $g$  es estrictamente decreciente.

**Ejemplo 441** Sea  $f(x) = \log_a(x)$ ,  $x > 0$ ,  $0 < a \neq 1$ , como

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln_a(x)}$$

y la variable  $x$  es positiva, se tiene que  $\ln a$  determina el signo de la derivada de  $f$  por lo tanto tenemos que:

1. Si  $a > 1$ ,  $f$  es estrictamente creciente
2. Si  $a < 1$ ,  $f$  es estrictamente decreciente

**Ejemplo 442** Sea  $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right)$ , veamos en que intervalos  $f$  es decreciente

El dominio de la función es  $] - \infty, -2[ \cup ]1, \infty[$ , y su derivada la obtenemos utilizando regla de la cadena y la derivada de un cociente

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x+2}{x-1}\right) \left(\frac{(x+2) - (x-1)}{(x+2)^2}\right) \\ &= \frac{3}{(x-1)((x+2))} \end{aligned}$$

Como  $f'(x) > 0$  en su dominio se concluye que  $f$  es estrictamente creciente en la cada intervalo (no podemos decir que es creciente en la unión).

Erróneamente podríamos decir que  $f'(x) < 0$  en intervalo  $] - 2, 1[$ , la razón del error es que la función no esta definida en este intervalo, así que es imposible que  $f'(x)$  este definida en un conjunto mayor.



**Ejemplo 443** Sea  $v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5t^2}{2} + 6t + 8$  la velocidad de un móvil en el tiempo  $t$ ,  $t \in [0, 8]$ .

Determinemos los intervalos de tiempo donde el móvil esta aumentando de velocidad (acelerando) y en que momento está disminuyendo su velocidad (frenando o aceleración negativa)

**Solución:** Necesitamos determinar el signo de  $v'(t) = t^2 - 5t + 6 = (t - 3)(t - 2)$ .

Tenemos que  $v(t) < 0$ ,  $\forall t \in [2, 3]$ , así el móvil esta frenando entre los valores  $t \in [2, 3]$ , además  $v'(t) > 0$  en  $(]-\infty, 2[ \cup ]3, \infty[) \cap [0, 8]$ . Por lo tanto el móvil acelera desde 0 a 2 y posteriormente acelera de 3 a 8.

?‘Cuando se detiene el móvil

**Observación:** En teorema anterior es sólo de la forma  $p \Rightarrow q$  ya que la función  $f(x) = x^3$  es estrictamente creciente en  $\mathbb{R}$  pero  $f'(x) = 3x^2$  no es positiva siempre ya que  $f(0) = 0$ .

Basados en el teorema anterior podemos enunciar el criterio de la primera derivada para máximos y/o mínimos relativos estricto.

**Teorema 5.28 (Criterio de la primera derivada)** Sea  $f$  continua en  $[a, b] = A$  y derivable en  $]a, b[$  no necesariamente en  $p \in A$

a) Si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f'(x) > 0$  en  $]p - \epsilon, p[$  y  $f'(x) < 0$  en  $]p, p + \epsilon[$  entonces  $f$  tiene un máximo relativo estricto en  $x = p$

b) Si existe  $\epsilon > 0$  tal que  $f'(x) < 0$  en  $]p - \epsilon, p[$  y  $f'(x) > 0$  en  $]p, p + \epsilon[$  entonces  $f$  tiene un mínimo relativo estricto en  $x = p$

Generalmente, las hipótesis en (a), para un máximo relativo, se escribe resumidamente así

|         |                |     |                |
|---------|----------------|-----|----------------|
| $x$     | $p - \epsilon$ | $p$ | $p + \epsilon$ |
| $f'(x)$ | +              |     | -              |
| $f(x)$  | $\nearrow$     |     | $\searrow$     |

y las hipótesis para un mínimo relativo se escribe;

|         |                |     |                |
|---------|----------------|-----|----------------|
| $x$     | $p - \epsilon$ | $p$ | $p + \epsilon$ |
| $f'(x)$ | -              |     | +              |
| $f(x)$  | $\searrow$     |     | $\nearrow$     |

**Ejemplo 444** Sea  $f(x) = 3x^2 + 7x$ , como  $f'(x) = 6x + 7$

$$\begin{aligned} f'(x) = 6x + 7 > 0 &\iff x > -\frac{7}{6} \\ f'(x) = 6x + 7 < 0 &\iff x < -\frac{7}{6} \end{aligned}$$

Luego

|         |            |        |            |
|---------|------------|--------|------------|
| $x$     |            | $-7/6$ |            |
| $f'(x)$ | -          | 0      | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |        | $\nearrow$ |

de donde  $f$  es estrictamente creciente en  $]-\frac{7}{6}, \infty[$  y estrictamente decreciente en  $]-\infty, -\frac{7}{6}[$ , así por el criterio de la primera derivada podemos concluir que  $f(-\frac{7}{6})$  es un valor mínimo relativo estricto, que además es absoluto.

Este resultado también lo podemos obtener graficando la parábola que representa a  $y = f(x) = 3x^2 + 7x$  con vértice en  $(-\frac{7}{6}, f(-\frac{7}{6}))$

**Ejemplo 445** Considere una función  $f$  derivable tal que

$$f'(x) = (x - 3)(x + 2)(x - 5).$$

Determinar los extremos de  $f$ .

**Solución:** Determinemos en qué intervalos  $f'(x) > 0$  y donde  $f'(x) < 0$ . Para esto formemos una tabla para la función  $f'$  que nos indique resumidamente donde es positiva y donde es negativa.

|         |   |    |   |   |   |   |   |  |
|---------|---|----|---|---|---|---|---|--|
|         |   | -2 |   | 3 |   | 5 |   |  |
| $x - 3$ | - |    | - | 0 | + |   | + |  |
| $x + 2$ | - | 0  | + |   | + |   | + |  |
| $x - 5$ | - |    | - |   | - | 0 | + |  |

De esta forma tenemos información sobre  $f$  resumidas en el siguiente cuadro;

|         |   |            |   |            |   |            |   |            |
|---------|---|------------|---|------------|---|------------|---|------------|
| $x$     |   | -2         |   | 3          |   | 5          |   |            |
| $f'(x)$ | - | 0          | + | 0          | - | 0          | + |            |
| $f(x)$  |   | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ |

Del resumen se puede concluir que  $f(-2)$ , y  $f(5)$  son mínimo locales estricto y  $f(3)$  es un máximo local estricto.

**Ejemplo 446** Sea  $f(x) = (x - 1)^{2/3}$ . Determinemos los extremos de  $f$ .

**Solución:**  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$  y  $f'(x) = \frac{2}{3}(x - 1)^{-1/3} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x-1}}$ ;  $x \in \mathbb{R} - \{1\}$  notemos que  $f$  no es derivable en  $x = 1$ , sin embargo es continua y

$$\begin{aligned} \text{si } x > 1, \quad f'(x) &> 0 \\ \text{si } x < 1, \quad f'(x) &< 0 \end{aligned}$$

es decir,

|         |            |            |            |
|---------|------------|------------|------------|
| $x$     |            | 1          |            |
| $f(x)$  |            | 0          |            |
| $f'(x)$ | -          | $\nexists$ | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |            | $\nearrow$ |

luego por el criterio de la primera derivada  $f$  tiene un mínimo en  $x = 1$  que es también absoluto (notar que el  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$  no es acotado),  $f$  no tiene máximo.

**Ejemplo 447** Determinemos si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificaremos nuestras respuesta.

a) Sea  $\alpha > 0$ , la función  $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ , definida en su dominio máximo tiene sólo un valor extremo.

b) La función  $f(x) = \begin{cases} \sin^2(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$  no tiene extremos.

c) La función  $f(x) = x^3 e^{2x}$  es estrictamente decreciente en el intervalo  $] -\infty, -3/2[$

d) La función  $f(x) = \sqrt{x-3}$  no tiene máximo y no tiene mínimo.

e) La función  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos^2(1/x) & -1 \leq x < 0 \\ \sin x & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$  tiene máximo y mínimo.

f) La función  $f(x) = \alpha e^x - 2e^x$  definida en  $] -\infty, 5]$  tiene un máximo si  $\alpha > 2$ .

g) La función  $f(x) = -x^3$  definida en  $[-1, 2[$  no tiene extremos.

**Solución:**

- a) **Verdadero.**  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$   $f'(x) = -2\alpha x e^{-\alpha x^2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , como  $e^{-\alpha x^2} > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  entonces;  
 $f'(x) > 0 \iff -2\alpha x > 0 \iff x < 0$  pues  $\alpha > 0$

De esta forma

|         |            |   |            |
|---------|------------|---|------------|
| $x$     |            | 0 |            |
| $f(x)$  | +          | 1 | +          |
| $f'(x)$ | +          | 0 | -          |
| $f(x)$  | $\nearrow$ |   | $\searrow$ |

Por criterio de la primera derivada  $f$  tiene un máximo relativo estricto que es también absoluto (pues la función sube y baja sólo una vez), y no tiene mínimo.

- b) **Falso.** Por definición es claro que  $f$  tiene un mínimo local absoluto en  $x = 0$ , pues

$$f(x) = \sin^2(1/x) \geq 0, \quad \forall x \in \text{Dom} f = \mathbb{R}$$

por lo tanto  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \text{Dom} f$ .

- c) **Verdadero.**  $f'(x) = 3x^2 e^{2x} + x^3 e^{2x} 2 = x^2 e^{2x} (3 + 2x)$  analizando los signos de  $f'(x)$ , obtenemos

|         |            |      |            |   |            |
|---------|------------|------|------------|---|------------|
| $x$     |            | -3/2 |            | 0 |            |
| $f(x)$  | -          |      | -          | 0 | +          |
| $f'(x)$ | -          | 0    | +          | 0 | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |      | $\nearrow$ |   | $\nearrow$ |

Luego  $f$  es estrictamente decreciente en  $] -\infty, -3/2[$ .

**Observación:** Notar que por criterio de la primera derivada podemos afirmar que  $f$  tiene un mínimo en  $x = -3/2$ , más aún él es el mínimo absoluto.

- d) **Falso.**  $\text{Dom} f = [3, \infty[$  además  $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-3}} > 0 \quad \forall x \in [3, \infty[$ , es decir,  $f$  es estrictamente creciente y definida en un dominio acotado inferiormente por  $x = 3 \in \text{Dom} f$ , luego  $f$  tiene un mínimo en  $x = 3$ . Este resultado también es claro graficando la función  $f$ :
- e) **Verdadero.** Notemos que  $f$  es una función continua definida en el intervalo cerrado  $[-1, 1]$ , luego por el teorema de los valores extremos  $f$  tiene un máximo y mínimo que son absolutos.
- f) **Verdadero.** Notemos que  $f'(x) = f(x) = (\alpha - 2)e^x$ . Si  $\alpha > 2$  entonces  $f'(x) > 0 \quad \forall x \in ]-\infty, 5]$ , luego  $f$  es creciente en su dominio acotado superiormente por  $x = 5 \in \text{Dom} f$  de esta forma  $f$  tiene un máximo (absoluto) que es  $f(5)$ .
- g) **Falso.**  $f'(x) = -3x^2 \leq 0 \quad \forall x \in [-1, 2[$   
luego  $f$  es decreciente definida en un dominio acotado inferiormente por  $x = -1 \in [-1, 2[$ , así  $f$  tiene como máximo  $f(-1)$ ; claramente podemos ver que  $f$  no tiene mínimo.

En base a la información que hemos obtenido hasta el momento, podemos graficar algunas funciones considerando; dominio, dominio de continuidad, interceptos con los ejes coordenados, intervalos de crecimiento y decrecimiento, máximos y/o mínimos.

**Ejemplo 448** Gráficamos  $f(x) = 3x^3 - x$ .

**Solución:**

- a)  $\text{Dom} f = \mathbb{R}$ .
- b)  $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$  (función polinomial).
- c) Interceptos con el eje  $y$   $P_0 = (0, 0)$   
Interceptos con el eje  $x$   $P_1 = (\sqrt{1/3}, 0)$ ;  $P_2 = (-\sqrt{1/3}, 0)$

d) Intervalos de crecimiento y decrecimiento:  $f'(x) = 9(x - 1/3)(x + 1/3)$

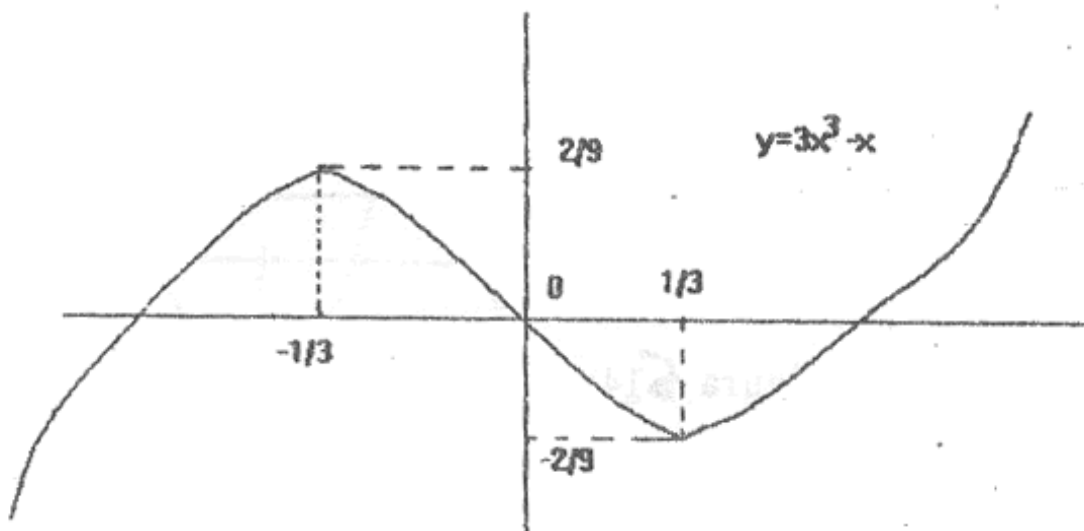
|           |            |        |            |       |            |
|-----------|------------|--------|------------|-------|------------|
| $x$       |            | $-1/3$ |            | $1/3$ |            |
| $x - 1/3$ | -          |        | -          | 0     | +          |
| $x + 1/3$ | -          | 0      | +          |       | +          |
| $f'(x)$   | +          |        | -          |       | +          |
| $f(x)$    | $\nearrow$ |        | $\searrow$ |       | $\nearrow$ |

De la tabla, se tiene que  $f'(x) > 0$ , y en consecuencia estrictamente creciente en el intervalo  $] -\infty - 1/3[$  y también en  $]1/3, \infty[$ , y  $f'(x) < 0$  (en consecuencia estrictamente decreciente) en el intervalo  $] -1/3, 1/3[$ .

Resumiendo tenemos la siguiente información de  $f$ ;

|         |            |        |            |        |            |
|---------|------------|--------|------------|--------|------------|
| $x$     |            | $-1/3$ |            | $1/3$  |            |
| $f(x)$  |            | $2/9$  |            | $-2/9$ |            |
| $f'(x)$ | $\nearrow$ | 0      | $\searrow$ | 0      | $\nearrow$ |

Por el criterio de la primera derivada  $f$  tiene un máximo relativo estricto en  $x = -1/3$  y un mínimo relativo estricto en  $x = 1/3$ . Así la gráfica de  $f$  es aproximadamente como la de la figura



**Ejemplo 449** Sea  $f(x) = \sin^2(x)$ . Determinemos los puntos extremos y especifiquemos de que tipo son.

**Solución:**  $f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x)$  los puntos críticos son las soluciones de la ecuación

$$\sin(x) \cos(x) = 0$$

que es equivalente a la unión de las soluciones de las ecuaciones

$$\sin(x) = 0 \quad \cos(x) = 0$$

Así, los puntos críticos son  $x = n\pi$ ,  $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Usando el signo de las funciones  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  en los cuadrantes de  $\mathbb{R}^2$ , tenemos que:

En el primer y tercer cuadrantes ambas tienen el mismo signo por lo tanto la derivada es positiva. es decir,

$$f'(x) > 0 \text{ si } x \in ]0, \frac{\pi}{2}[ \cup ]\pi, \frac{3\pi}{2}[$$

y en los otros cuadrantes se tiene

$$f'(x) < 0 \text{ si } x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi[ \cup ]\frac{3\pi}{2}, 2\pi[$$

Usando la periodicidad de  $\sin(x)$  y  $\cos(x)$  se obtiene el signo de  $f'(x)$  en toda la recta real.

Si

$$x \in \cup_{n \in \mathbb{Z}} (]2n\pi, \frac{\pi}{2} + 2n\pi[ \cup ](2n+1)\pi, \frac{3\pi}{2} + 2n\pi[), \quad f'(x) > 0$$

y en caso contrario  $f'(x) \leq 0$ .

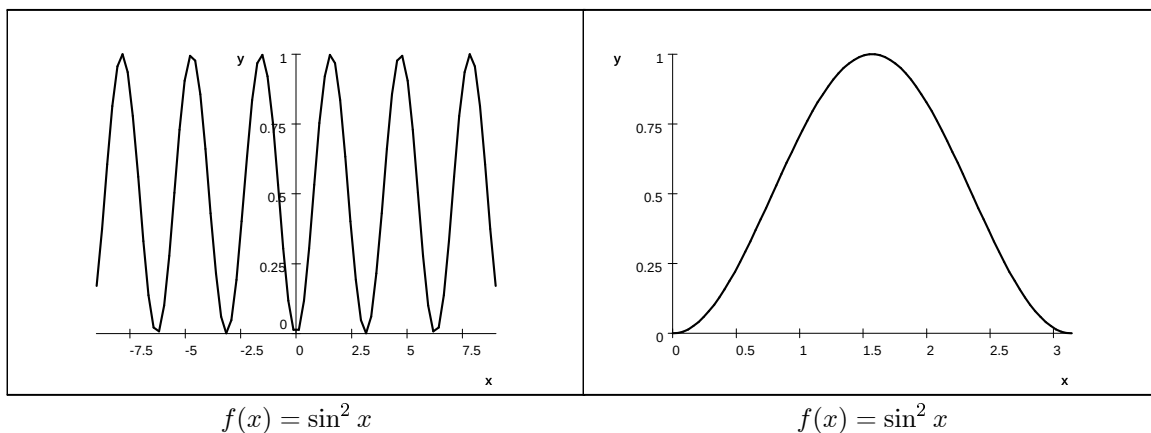
De esta forma se tienen máximos locales en los puntos  $\frac{\pi}{2} + 2n\pi$  y  $\frac{3\pi}{2} + 2n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , y mínimos locales los puntos  $n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Por otra parte

$$f(0) = 0; f(2\pi) = 0; f(\frac{\pi}{2}) = 1; f(\frac{3\pi}{2}) = -1; f(\pi) = 0$$

Con la información que hemos obtenido, podemos hacer la gráfica de  $f$  en forma aproximada.

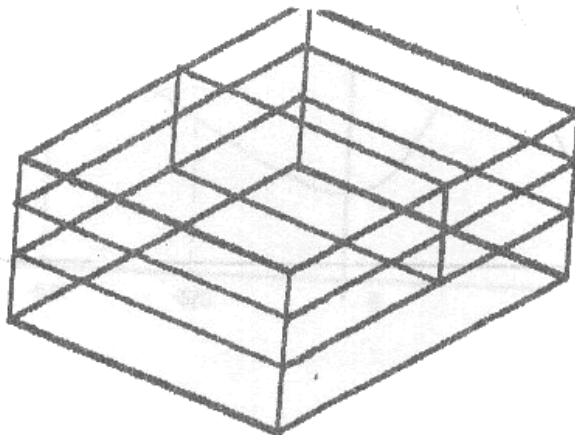
Sabemos que la función es creciente en el intervalo  $]0, \frac{\pi}{2}[$  y que 0 y 1 son mínimo y máximo relativos respectivamente, como  $f$  es una función continua, la gráfica en  $[0, \frac{\pi}{2}]$  corresponda a unir los puntos  $(0, f(0))$  y  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  en forma creciente, a diferencia de la unión de los puntos  $(\frac{\pi}{2}, 1)$  y  $(\pi, 0)$  que es en forma decreciente

El gráfico se puede hacer completo, por la periodicidad basta saber lo que ocurre en  $[0, \pi]$ .



El siguiente problema de aplicación es necesario obtener previamente una función que se buscará el máximo o mínimo y luego aplicar algún criterio de obtención de máximo o de mínimo.

**Ejemplo 450** Se intenta cercar un campo rectangular con 4 hebras de alambre y después subdividir el campo en dos partes (como en la figura ■) con una cerca paralela a uno de los lados, utilizando 2 hebras de alambre. Determinar las dimensiones del terreno de área máxima.



■

**Solución:** Sean  $x$  e  $y$  las dimensiones del terreno, entonces el área está dada por la fórmula

$$A = xy$$

pero al distribuir los 600 metros de alambre se tiene la ecuación;

$$600 = 10x + 8y$$

de donde  $y = 75 - 5x/4$  luego;

$$A = x(75 - \frac{5}{4}x)$$

pero  $x > 0$  y  $y > 0$ , es decir,  $x > 0$  y  $75 - \frac{5x}{4} > 0$

Por lo tanto la función que se necesita maximizar es;

$$A(x) = 75x - \frac{5x^2}{4}$$

definida en el intervalo abierto  $]0, 60[$ .

Ahora apliquemos el criterio de la primera derivada;

$$\begin{aligned} A'(x) &= 75 - \frac{10x}{4} \\ \text{luego} \quad A'(x) > 0 &\iff 75 - \frac{5x}{2} > 0 \\ A'(x) > 0 &\iff 30 > x \\ A'(x) < 0 &\iff 30 < x \end{aligned}$$

Resumiendo tenemos

|         |   |      |   |
|---------|---|------|---|
| $x$     |   | 30   |   |
| $A(x)$  | + | 1125 | + |
| $A'(x)$ | + | 0    | - |
| $A(x)$  | ↗ |      | ↘ |

luego el área máxima se alcanza cuando  $x = 30$ .

Así las dimensiones del terreno son

$$x = 30\text{mts} \quad , \quad y = 37,5\text{mts}$$

**Observación:** Aquí no se evalúa en los extremos del intervalo, pues no están considerados en el dominio de la función.

**Teorema 5.29 (Criterio de la segunda derivada)** Sea  $f$  una función derivable en un intervalo abierto que contiene a  $p$  tal que  $f'(p) = 0$ . (es decir,  $p$  es un punto crítico).

a) Si  $f''(p) < 0$  entonces  $f$  tiene un máximo local estricto en  $x = p$ .

b) Si  $f''(p) > 0$  entonces  $f$  tiene un mínimo local estricto en  $x = p$ .

**Observación:** (1) Es importante hacer notar que a diferencia del criterio de la primera derivada este criterio exige que  $f$ , sea derivable dos veces en  $p$  con  $f'(p) = 0$ .

(2) Si  $f''(p) = 0$  este criterio no nos da información, y se debe recurrir al criterio de la primera derivada.

**Ejemplo 451** Resolvamos el ejemplo 450 usando este nuevo criterio

La función a maximizar es:

$$A(x) = 75x - \frac{5x^2}{4}, \quad \text{con } x \in ]0, 60[$$

Determinemos  $p \in ]0, 60[$  tal que  $A'(p) = 0$ .

$$A'(x) = 75 - \frac{10x}{4} \iff x = 30$$

Luego  $p = 30$  es un punto crítico que debemos evaluar en la segunda derivada. Como

$$A''(x) = \frac{-10}{4} < 0 \quad \forall x \in ]0, 60[$$

en particular  $A''(30) < 0$ , así podemos afirmar que  $A(30)$  es el máximo buscado.

**Ejemplo 452** Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro recto y semiesfera en los extremos (vease la figura ▲) para almacenar gas propano. El costo de fabricación por pie cuadrado de los extremos es el doble al de la parte cilíndrica. ¿Qué dimensiones minimizan el costo, si la capacidad deseada del tanque es de  $10\pi \text{ pie}^3$ ?

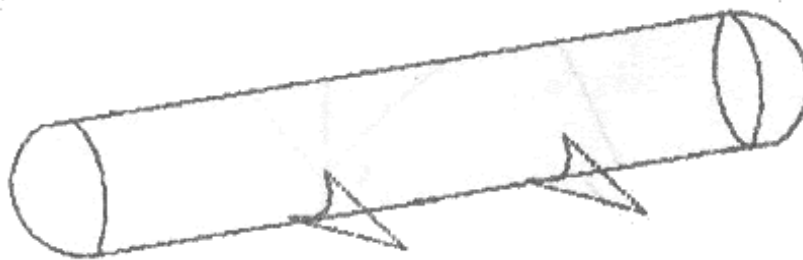


Figura ▲

**Solución:** Sea  $P$  el costo del pie cuadrado de la parte cilíndrica entonces el costo del pie cuadrado de los extremos es  $2P$ .

Puesto que en la parte cilíndrica se tiene  $2\pi rh \text{ pie}^2$  y en los extremos  $4\pi r^2 \text{ pie}^2$  entonces el costo de construcción es

$$C = 2\pi rhP + 4\pi r^2 2P$$

pero el volumen es

$$V = \pi r^2 h + \frac{4}{3}\pi r^3 = 10\pi$$

entonces

$$h = \frac{10 - \frac{4}{3}r^3}{r^2}$$

y la función costo en términos de  $r$  es;

$$C(r) = 2\pi r\left(\frac{10}{r^2} - \frac{4r}{3}\right)P + 4\pi r^2 2P$$

es decir;

$$C(r) = 4\pi P\left(\frac{5}{r} + \frac{4r^2}{3}\right)$$

Como  $r > 0, h > 0$  entonces

$$h = \frac{10 - \frac{4}{3}r^3}{r^2} > 0$$

de donde  $r^3 < \frac{30}{4}$ , luego  $0 < r < \sqrt[3]{\frac{30}{4}}$

Así la función costo a minimizar es

$$C(r) = 4\pi P\left(\frac{5}{r} + \frac{4r^2}{3}\right) \quad , \quad r \in ]0, \sqrt[3]{\frac{30}{4}}[$$

Ahora determinemos el mínimo por el criterio de la segunda derivada (notemos que  $C(r)$  es dos veces diferenciable en su dominio)

$$C'(r) = 4\pi P\left(\frac{-5}{r^2} + \frac{8r}{3}\right)$$

luego

$$\begin{aligned} C'(r) = 0 & \iff \frac{-5}{r^2} + \frac{8r}{3} = 0 \\ & \iff r^3 = \frac{15}{4} \\ & \iff r = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \end{aligned}$$

Como  $\frac{\sqrt[3]{15}}{2} \in \text{Dom}C$  y  $C'(r)$  es derivable podemos aplicar el criterio de la segunda derivada. La derivada de  $C'(r)$  es

$$C''(r) = 4\pi P\left(\frac{10}{r^3} + \frac{8}{3}\right)$$

luego  $C''\left(\frac{\sqrt[3]{15}}{2}\right) > 0$ , de donde  $C$  tiene un mínimo en  $r = \frac{\sqrt[3]{15}}{2} \in \text{Dom}C$ .

Las dimensiones que minimizan el costo de fabricación del tanque son

$$r = \frac{\sqrt[3]{15}}{2}, \quad h = \frac{40}{\sqrt[3]{15}} - \frac{4\sqrt[3]{15}}{6}$$

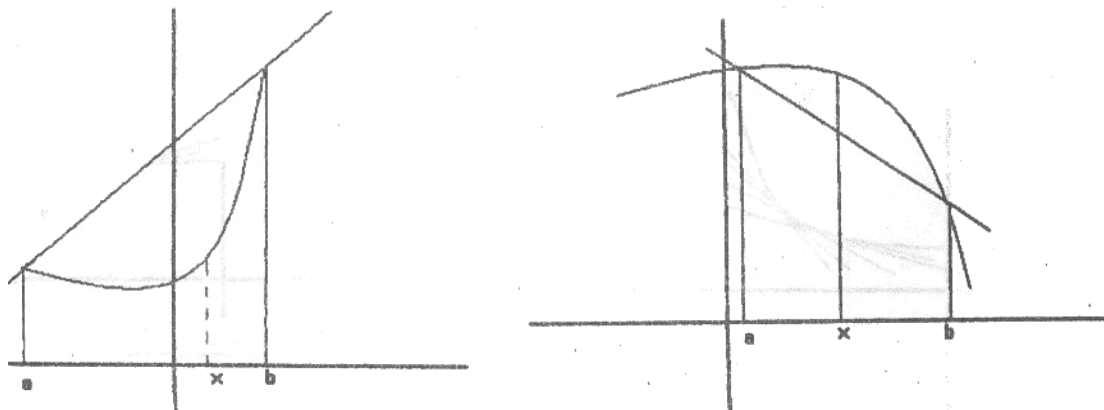
## 5.7 Concavidad

**Definición 5.30** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I$  un intervalo

1. Diremos que la función  $f$  es **convexa o concava hacia arriba** en  $I$  si  $\forall a, b, x \in I$  tal que  $a < x < b$  el punto  $(x, f(x))$  (de la gráfica de  $f$ ) está abajo de la recta secante que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  figura  $\cup$  gráfico izquierdo.



2. Diremos que la función  $f$  es **concava o concava hacia abajo** en  $I$  si  $\forall a, b, x \in I$  tal que  $a < x < b$  el punto  $(x, f(x))$  (de la gráfica de  $f$ ) está sobre la recta secante que une los puntos  $(a, f(a))$  y  $(b, f(b))$  figura  $\cup \cap$  gráfico. derecho

Figura  $\cup \cap$ 

**Ejemplo 453** La parábola  $y = 3x^2 + 6x + 2$  es concava hacia arriba o convexa.

La parábola  $y = -3x^2 + 6x + 2$  es concava hacia abajo o concava.

La función  $y = \sin x$  es concava hacia abajo en el intervalo  $[0, \pi]$  y concava hacia arriba en el intervalo  $[\pi, 2\pi]$ .

**Definición 5.31** Sea  $f$  una función y sea  $x \in \text{Dom} f$ .

1. Diremos que  $f$  es concava hacia arriba o convexa en el punto  $(x, f(x))$  si existe una vecindad  $I = ]a, b[$  tal que  $x \in I \subset \text{Dom} f$  y la función  $f|_I$  es concava hacia arriba en  $I$ .
2. Diremos que  $f$  es concava hacia abajo o concava en el punto  $(x, f(x))$  si existe una vecindad  $I = ]a, b[$  tal que  $x \in I \subset \text{Dom} f$  y la función  $f|_I$  es concava hacia abajo en  $I$ .

**Observación:**

1. De la definición se puede concluir que concavidad se refiere a una propiedad de la gráfica.

En el caso de tener una función estrictamente creciente en el intervalo  $I = [a, b]$  se puede tener que  $f$  sea concava en  $I$  o convexa en  $I$  o en un sector concava y en otro convexa (ver figura  $\diamond$ ), lo mismo se puede decir de una función estrictamente decreciente.

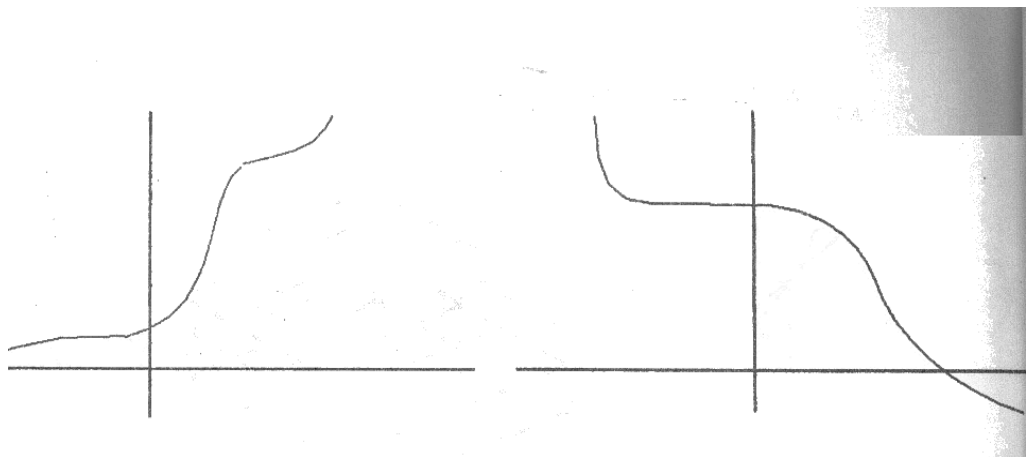


Figura ◇

2. Como la ecuación de la recta secante que pasa por los puntos  $(a, f(a))$ ,  $(b, f(b))$  es

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a)$$

o

$$y = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b)$$

Decir que para  $a < x < b$ , el punto está debajo de la secante significa por lo tanto

$$f(x) < \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a) + f(a) \quad (5.22)$$

y que

$$f(x) < \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - b) + f(b) \quad (5.23)$$

operando en la desigualdad 5.22

$$f(x) - f(a) < \frac{f(a) - f(b)}{a - b}(x - a)$$

ahora operando en la desigualdad 5.23

$$\frac{f(x) - f(b)}{x - b} > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Usando las últimas desigualdades se tiene que  $f$  es cóncava hacia arriba si y sólo si  $a < x < b$  se tiene

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} < \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

3. Hay una caracterización geométrica más clara para el caso de una función que sea derivable en un punto  $x_0$

- (a) La gráfica de  $f$  es cóncava hacia arriba en el punto  $(x_0, f(x_0))$  si existe un intervalo  $I$  que contiene a  $x_0$ , tal que la gráfica de  $f|_I$  está por encima de la recta tangente en  $(x_0, f(x_0))$  figura ♠, gráfica izquierda

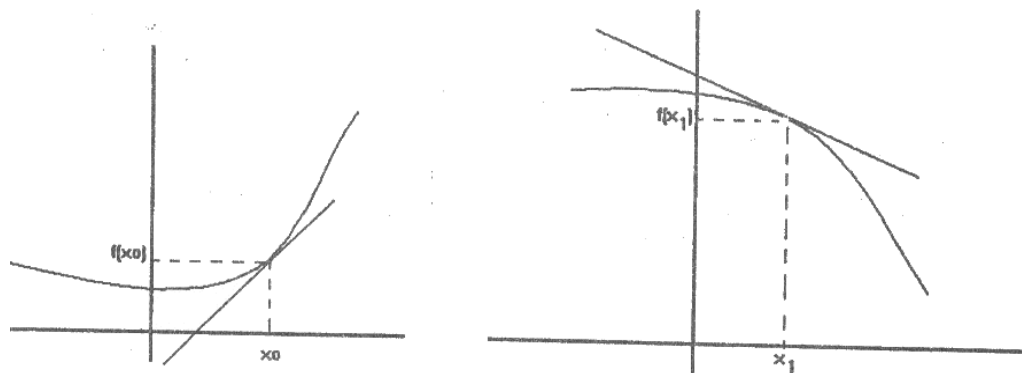


Figura ♠

- (b) La gráfica de  $f$  es concava hacia abajo en  $(x_1, f(x_1))$  si existe un intervalo  $I$  que contiene a  $x_1$  tal que la gráfica de  $f|_I$  está por abajo de la recta tangente en  $(x_1, f(x_1))$  figura ♠, gráfica derecha

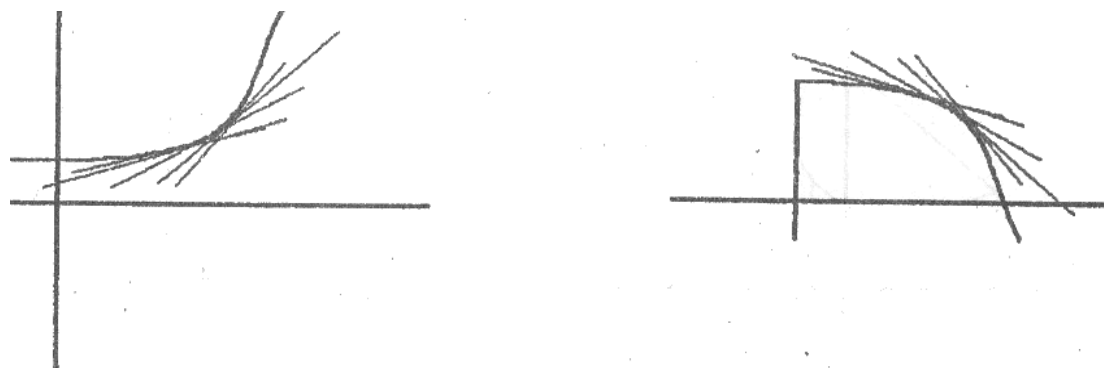


Figura ▼▼

4. En la figura ▼▼ izquierda tenemos la gráfica de una función derivable concava hacia arriba en el intervalo  $I$ , en ella hemos dibujado distintas rectas tangentes, las pendientes de estas rectas aumentan a medida que nos movemos de izquierda a derecha. Como las pendientes están determinadas por las derivadas se concluye que  $f'(x)$  es creciente. Si la función  $f'(x)$  es también derivable se concluye que  $f''(x)$  es positiva o cero por el hecho que  $f'(x)$  es una función creciente.

En la figura ▼▼ derecho hemos dibujado varias rectas tangentes a la gráfica de  $f$ , cuyas pendientes son los valores de las derivadas de  $f$ ,  $f'$ .  $f'(x)$  es decreciente ya que las pendientes de las tangentes disminuye a medida que cambian de puntos de izquierda a derecha en la gráfica de la derecha de figura ▼▼.

Como la función  $f'(x)$  es decreciente, de ser ella derivable, su derivada es negativa o cero, es decir,  $f''(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in I$ .

**Teorema 5.32** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , dos veces derivable en el intervalo abierto  $I$

1.  $f$  es **concava hacia arriba** en  $I \iff f''(x) \geq 0$  para todo  $x \in I$ .
2.  $f$  es **concava hacia abajo** en  $I \iff f''(x) \leq 0$  para todo  $x \in I$ .

La forma como generalmente se aplica este teorema es: usando la información de la segunda derivada se obtiene la concavidad o convexidad de la gráfica

**Corolario 5.33** Sea  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $x_0 \in I$ ,  $f$  derivable en  $I$  y supongamos que existe  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ .

1.  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) > 0 \Rightarrow$  la gráfica de  $f$  es concava hacia arriba en  $(x_0, f(x_0))$
2.  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0) < 0 \Rightarrow$  la gráfica de  $f$  es concava hacia abajo en  $(x_0, f(x_0))$

Con este corolario queda abierto el caso que la segunda derivada se anule.

**Definición 5.34** Un punto  $(x_0, f(x_0))$  de la gráfica de  $f$  se dice que es un **punto de inflexión** si existe un abierto  $I$  tal que para todo  $x \in I - \{x_0\}$ ,  $f''(x)$  existe y además  $f''(x)$  cambia de signo en  $x_0$ .

**Ejemplo 454** Sea  $f(x) = 3x^2 + 6x + 8$  una parábola. Como se dijo anteriormente es el ejemplo más simple de concava hacia arriba,  $f''(x) = 6 > 0$ .

**Ejemplo 455** Sea  $f(x) = -6x^2 + 6x + 8$ ,  $f''(x) = -6$  que es negativa, por lo tanto la gráfica de  $f$  (la parábola) es concava hacia abajo.

Los dos ejemplos anteriores le deberían permitir recordar cual es el signo de la segunda derivada exigido para concavidad y cual es exigido para convexidad.

En los dos ejemplos anteriores no tenemos puntos de inflexión, a continuación veremos uno

**Ejemplo 456** Sea  $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 148/27$ , veamos si  $f$  tiene puntos de inflexión.

$$f'(x) = 6x^2 + 10x \quad , \quad f''(x) = 12x + 10$$

por lo tanto los puntos de inflexión tiene primera componente que probablemente satisface la ecuación  $f''(x) = 0$ , en este casos  $x = -5/6$ . Como  $f''(x)$  cambia de signo en  $-5/6$  se tiene que  $(-5/6, f(-5/6))$  es el punto de inflexión.

Podemos hacer una tabla resumen de la segunda derivada y su conclusión

|                |         |           |         |
|----------------|---------|-----------|---------|
| $x$            |         | $-5/6$    |         |
| $f''(x)$       | -       |           | +       |
| gráfica de $f$ | Concava | Inflexión | Convexa |

Ahora usando la primer derivada podemos hacer una tabla resumen que nos permitirá graficar  $f$  con mayor precisión

$$f'(x) = 0 \iff 6x^2 + 10x = 0$$

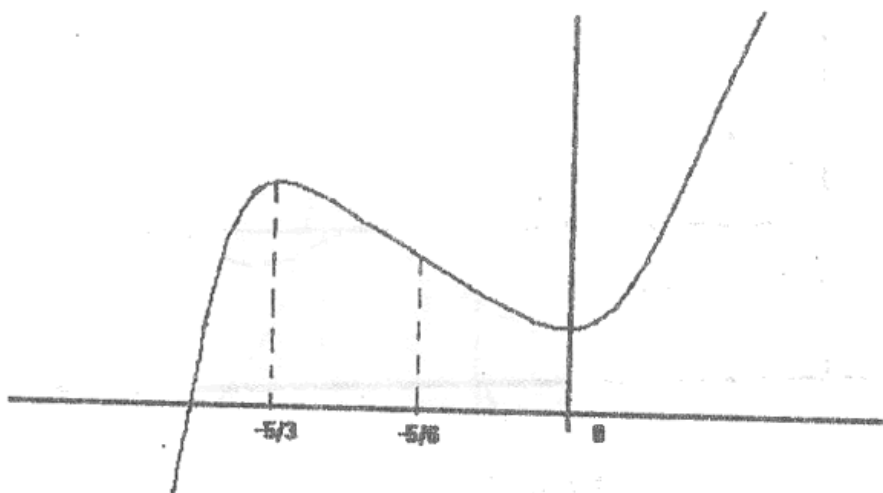
Así, los puntos críticos son  $x = 0$  y  $x = -5/3$ .

|                |            |        |            |        |            |     |            |
|----------------|------------|--------|------------|--------|------------|-----|------------|
| $x$            |            | $-5/3$ |            | $-5/6$ |            | $0$ |            |
| $f'(x)$        | +          | $0$    | -          |        | -          | $0$ | +          |
| $f''(x)$       | -          |        | -          | $0$    | +          |     | +          |
| $f(x)$         | $\nearrow$ |        | $\searrow$ |        | $\searrow$ |     | $\nearrow$ |
| gráfica de $f$ | Concava    |        | Concava    |        | Convexa    |     | Convexa    |

o una tabla mas resumida y gráfica mas explícita en la última línea

|          |                      |        |                      |        |                      |     |                      |
|----------|----------------------|--------|----------------------|--------|----------------------|-----|----------------------|
| $x$      |                      | $-5/3$ |                      | $-5/6$ |                      | $0$ |                      |
| $f'(x)$  | +                    | $0$    | -                    |        | -                    | $0$ | +                    |
| $f''(x)$ | -                    |        | -                    | $0$    | +                    |     | +                    |
| $f(x)$   | $\searrow$<br>$\cap$ |        | $\nearrow$<br>$\cap$ |        | $\nearrow$<br>$\cup$ |     | $\searrow$<br>$\cup$ |

Así, la gráfica de  $f$  debería ser la unión de los puntos  $(-5/3, f(-5/3))$ ,  $(-5/6, f(-5/6))$ ,  $(0, f(0))$  como se indica en la última línea de la tabla, obtenemos de esta forma el gráfico de la figura



$$f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 148/27$$

**Ejemplo 457** El ejemplo anterior nos podría llevar a pensar que los puntos de inflexión siempre se obtiene de la ecuación  $f''(x) = 0$ . Al igual que en el caso de valores extremos estos no se obtiene siempre de la ecuación  $f'(x) = 0$ . Este ejemplo nos muestra en que otros casos aparecen los puntos de inflexión.

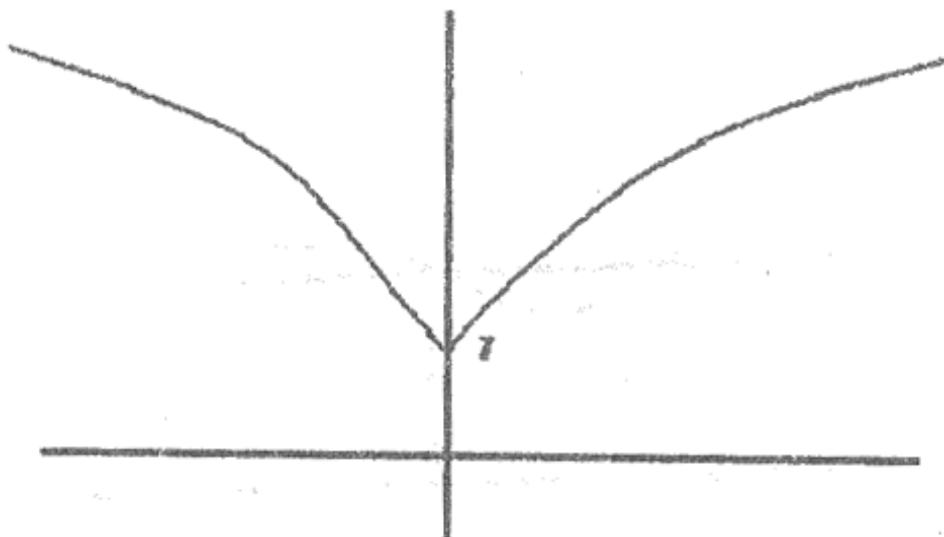
Sea  $f(x) = (x - 4)^{5/3} + 7$ . El dominio de  $f(x)$  es  $\mathbb{R}$  y sus derivadas de orden 1 y de orden 2 son respectivamente.

$$f'(x) = \frac{5}{3}(x - 4)^{2/3} \quad f''(x) = \frac{10}{9}(x - 4)^{-1/3}$$

Claramente  $f''(x) = 0$  no nos arroja solución, pero si podemos notar que  $f''(x)$  no existe en  $x = 4$  y que su  $f''(x)$  cambia de signo en 4 por lo tanto  $(4, f(4)) = (4, 7)$  es un punto de inflexión

|                |         |            |         |
|----------------|---------|------------|---------|
| $x$            |         | 4          |         |
| $f''(x)$       | -       | $\nexists$ | +       |
| gráfica de $f$ | concava |            | convexa |

Tabla resumen para gráfica de  $y = (x - 4)^{5/3} + 7$  en la figura



$$f(x) = (x-4)^{5/3} + 7$$

$$f'(x) = 0 \iff x = 4$$

|          |   |        |   |  |  |  |
|----------|---|--------|---|--|--|--|
| $x$      |   | 4      |   |  |  |  |
| $f'(x)$  | - | 0      | + |  |  |  |
| $f''(x)$ | - | $\neq$ | + |  |  |  |
| $f(x)$   |   |        |   |  |  |  |

**Ejemplo 458** Grafiquemos la función  $f(x) = \frac{1}{(x-2)^4}$ , indicando intervalo de crecimiento, de decrecimiento, concavidad y concavidad hacia arriba, y si los hubiere, valores extremos y punto de inflexión.

**Solución:** Notemos en primer lugar que  $\text{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$ ,  $\text{Rec} f = \mathbb{R}^+$  por lo tanto la gráfica es sobre eje  $x$ .

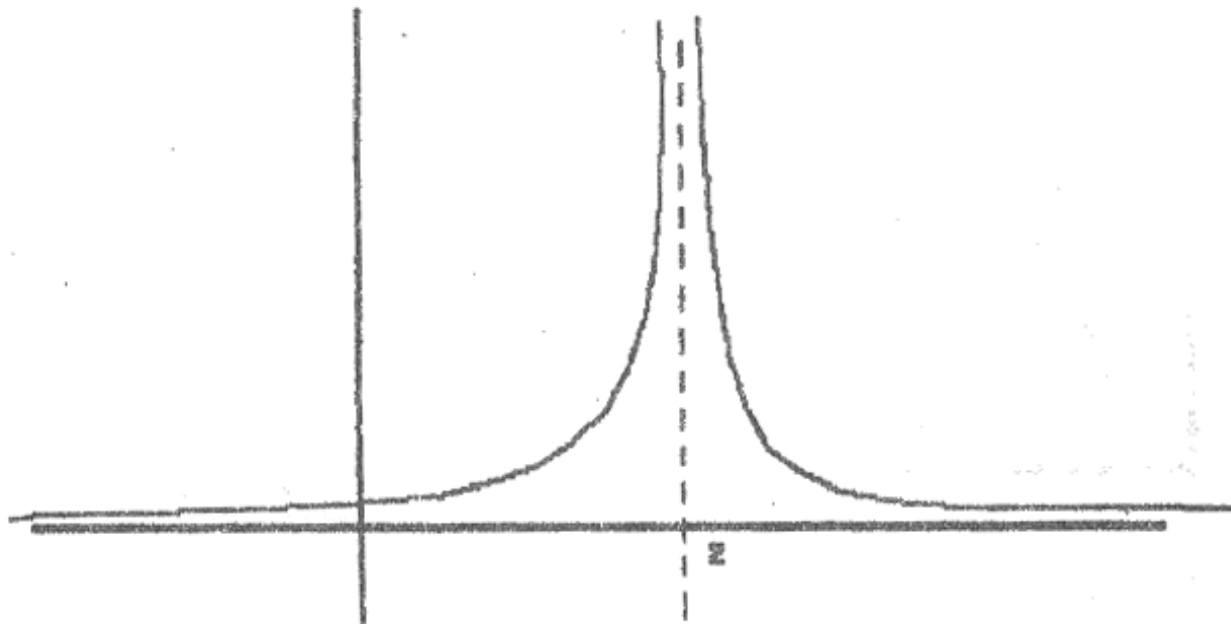
Las derivadas son  $f'(x) = \frac{-4}{(x-2)^5}$  y  $f''(x) = \frac{20}{(x-2)^6}$ .

|          |        |        |        |  |  |  |
|----------|--------|--------|--------|--|--|--|
| $x$      |        | 2      |        |  |  |  |
| $f'(x)$  | +      | $\neq$ | -      |  |  |  |
| $f''(x)$ | +      | $\neq$ | +      |  |  |  |
| $f(x)$   | $\cup$ | $\neq$ | $\cup$ |  |  |  |

Según los ejemplos anteriores deberíamos unir puntos de las gráficas como se indica en la última línea de la tabla, pero no es posible ya que no hay tales puntos (Nota  $(-\infty, f(-\infty))$ ,  $(2, f(2))$ ,  $(\infty, f(\infty))$  no son puntos de la gráfica) pero podemos ver a que valores tienden cuando  $x \rightarrow 2$ ,  $x \rightarrow \infty$  y cuando  $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$$

De esta forma la gráfica debería ser como se indica en figura



Así de la misma tabla podemos decir que

$f$  es creciente en  $] - \infty, 2[$ .

$f$  es decreciente en  $]2, \infty[$ .

$f$  es concava hacia arriba en  $] - \infty, 2[$  y también en  $]2, \infty[$ .

$f$  no tiene valores extremos ( $-\infty$  no es valor extremo ya que no pertenece a  $\mathbb{R}$ ).

$f$  no tiene puntos de inflexión ya que el único candidato a tal era  $(2, f(2))$ , pero no pertenece a la gráfica de  $f$  ( $f(2)$  no existe) amén de que  $f''(x)$  no cambia de signo en  $x = 2$ .

### 5.7.1 Test de la Segunda Derivada:

Los resultados de concavidad enunciados en el corolario anterior nos permiten en muchos casos clasificar rápidamente los puntos extremos en máxima locales o mínimos locales mediante lo que suele llamarse criterio de la segunda derivada

**Ejemplo 459** De una plancha metálica de  $100 \text{ cm} \times 2 \text{ mts}$  se desea construir dos tubos de 2 metros de largo uno con sección transversal una circunferencia y otro sección cuadrada ?'Como se debe cortar la plancha a lo largo de tal forma que la suma de los volúmenes interiores sea máximo. ?'Cuando es mínimo?

**Solución:** Supongamos que la plancha se cortan en  $x \text{ cm} \times 2 \text{ mts}$  y  $(100 - x) \text{ cm} \times 2 \text{ mts}$ , con la primera haremos el cilindro de radio  $r$ , entonces  $2\pi r = x$  y con la segunda el tubo con sección cuadrada, es decir, cada lado es de  $(\frac{100-x}{4}) \text{ cms}$ .

El volumen del cilindro es

$$\pi r^2 \cdot 2000 \text{ cm}^3 = \pi \left( \frac{x}{2\pi} \right)^2 \cdot 2000 \text{ cm}^3$$

El volumen del otro tubo es

$$\left( \frac{100 - x}{4} \right)^2 \cdot 2000 \text{ cm}^3$$

La suma de los volúmenes de los tubos en término de  $x$  es

$$\begin{aligned} V(x) &= 500\left(\frac{x^2}{\pi} + \frac{(100-x)^2}{4}\right), \quad \text{con } 0 \leq x \leq 100 \\ \frac{dV}{dx} &= 500\left(\frac{2x}{\pi} - \frac{(200-2x)}{4}\right) \end{aligned}$$

Puntos críticos son solución de la ecuación

$$\begin{aligned} \frac{8x - 200\pi + 2\pi x}{4\pi} &= 0 \\ (8 + 2\pi)x &= 200\pi \\ x_0 &= \frac{100\pi}{4 + \pi} \end{aligned}$$

Como  $\frac{d^2V}{dx^2} = 500(\frac{2}{\pi} + \frac{1}{2})$ ,  $\frac{d^2V}{dx^2}(x_0) > 0$ ; se tiene de esta forma que con el corte en  $\frac{100\pi}{4+\pi}$  se obtiene dos tubos cuya suma de los volúmenes es lo mínimo posible de obtener.

Como no se obtuvo otro punto crítico via la derivada, el o los máximos deben encontrarse en la frontera del intervalo  $[0, 100]$ .

a) Si hacemos un tubo cilíndrico  $x = 100$ .

$$V(100) = \frac{500(100)^2}{\pi} = \frac{5(10)^6}{\pi}$$

b) Si sólo hacemos un tubo con sección cuadrada  $x = 0$

$$V(0) = \frac{500(100)^2}{4} = \frac{5(10)^6}{4}$$

Como  $\pi < 4$  se tiene que cuando sólo hacemos un tubo cilíndrico obtenemos máximo volumen.

Este ejemplo nos muestra una vez más que los extremos se buscan no tan sólo donde la derivada se anula, sino que también en los extremos del intervalo cerrado donde la función está definida.

### Test de la Segunda Derivada:

Sea  $f$  una función continua en un intervalo cerrado<sup>10</sup>  $[a, b]$  y supongamos que es derivable en  $]a, b[$ .

Si  $\alpha \in ]a, b[$  es un punto crítico de  $f$  (i.e., su derivada se anula,  $\frac{df}{dx}(\alpha) = 0$ ) y  $\frac{d^2f}{dx^2}(\alpha)$  existe se tiene

dos posibilidades dependiendo del signo de  $\frac{d^2f}{dx^2}(\alpha)$

1.- Si  $\frac{d^2f}{dx^2}(\alpha) > 0$  se concluye que en  $\alpha$  hay un **mínimo relativo**, este es  $f(\alpha)$

2.- Si  $\frac{d^2f}{dx^2}(\alpha) < 0$  se concluye que en  $\alpha$  hay un **máximo relativo**, este es  $f(\alpha)$

Como puedes notar si  $\frac{d^2f}{dx^2}(\alpha) = 0$ , no se dice nada, podría ocurrir cualquier cosa como se pueden ver en las funciones

- $f(x) = x^3$  en un intervalo cerrado cerca del cero no tiene máximo ni mínimo en cero,
- $f(x) = x^4$ , tiene un mínimo en cero y
- $f(x) = -2x^4$  tiene una máximo en cero

Observación: Esto de poner un intervalo cerrado es sólo para garantizar la existencia de valores extremos, pero el test es aplicable en otros casos ya que se debe cumplir las hipótesis en una vecindad del punto crítico.

Recuerde que también puede haber máximo o mínimos en lugares que la función no es derivable, así menos será dos veces derivable y en ese caso sólo nos queda el test de la primera derivada.

<sup>10</sup>Por lo tanto ya sabemos que ella tiene máximo y mínimo



### 5.7.2 Límite Infinito

Como un elemento más que nos permitirá graficar  $f$  con mayor precisión estudiaremos los siguientes tipos de límites

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \\ 2) & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \\ 3) & \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \\ 4) & \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \end{array}$$

La razón de estudiar aparte este tipo de límites en forma separada a los otros se debe al hecho que  $+\infty$  y  $-\infty$  no son números reales, por lo tanto no tienen sentido las expresiones  $-\infty + \infty$ ,  $+\infty - \infty$  y en general operaciones que están definidas entre números reales. Por lo anterior no podemos hablar de vecindad  $\infty$  como se definió anteriormente ya que de hecho no hay subconjuntos de  $\mathbb{R}$  que contenga a infinito, pero para ampliar nuestra definición de límites a este caso, damos la definición siguiente.

**Definición 5.35 :**

1. Todo intervalo abierto de la forma  $]N, \infty[$ ,  $N \in \mathbb{R}$  es una vecindad de infinito, una vecindad de  $-\infty$  es cualquier intervalo abierto de la forma  $] - \infty, M[$ ,  $M \in \mathbb{R}$
2. Diremos que límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a infinito es  $L$ ,  $L \in \mathbb{R}$ .  
Si para toda vecindad de  $L$ ,  $V_{L, \varepsilon}$ , existe una vecindad de infinito  $V_N$  tal que

$$f(V_N) \subset V_{L, \varepsilon}$$

Introduciendo la notación anterior, natural de este caso, e indicando lo que significa las vecindades tenemos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in \text{Dom}f \wedge x > N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

3. Diremos que límite de  $f$  cuando  $x$  tiende a menos infinito es  $L$ ,  $L \in \mathbb{R}$ .  
Si para toda vecindad de  $L$ ,  $V_{L, \varepsilon}$ , existe una vecindad de menos infinito,  $V_{-\infty, M}$ , tal que

$$f(V_{-\infty, M}) \subset V_{L, \varepsilon}$$

**Definición 5.36** • *Es así que*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(\forall x \in \text{Dom}f \wedge x < -N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

**Ejemplo 460** Si  $f(x) = \frac{1}{x}$  se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

*Esta afirmación es válida por la propiedad Arquimедiana puesto que*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})\left(\frac{1}{N} < \varepsilon\right).$$

*De esta forma, si  $x > N$  se tiene  $\frac{1}{x} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ , luego*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(x > N \Rightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon)$$

*o equivalentemente*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})(x > N \Rightarrow |f(x) - 0| < \varepsilon)$$

**Ejemplo 461** Si  $f(x) = \frac{1}{x^k}$ ,  $k \geq 1$ , se tiene que  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

**Demostración:** Para  $x \in [1, \infty[$  se tiene que  $0 < \frac{1}{x^k} < \frac{1}{x}$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} 0 = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$ , se tiene, mediante el teorema de acotamiento (que es válido también aquí)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^k} = 0$

**Ejemplo 462** En general, para  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{x^k} = 0 \text{ si } k > 0$$

## Observaciones Importantes

- 1) Toda el algebra de límites se cumple en este tipo de límites
- 2) El Teorema de sustitución también
- 3) Sean  $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ ,  $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_lx^l$  polinomio de grado  $n$  y  $l$  respectivamente entonces

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} \frac{a_n}{b_n} & n = l \\ 0 & n < l \end{cases}$$

**Demostración:** Caso (1) supongamos que  $n = l$ .

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n} \cdot \frac{1/x^n}{1/x^n} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \dots + a_n}{\frac{b_0}{x^n} + \frac{b_1}{x^{n-1}} + \dots + b_n}. \end{aligned}$$

Por ejemplo anterior se tiene que los  $n$  primeros límites del numerador y los  $n$  primeros límites del denominador son nulos, así

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_n}$$

Caso(2)  $n < l$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p(x)}{q(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \dots + b_lx^l} \cdot \frac{1/x^l}{1/x^l} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_0}{x^l} + \frac{a_1}{x^{l-1}} + \dots + \frac{a_n}{x^{l-n}}}{\frac{b_0}{x^l} + \frac{b_1}{x^{l-1}} + \dots + b_l} \\ &= \frac{0 + 0 + \dots + 0}{0 + 0 + \dots + b_l} = 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo 463** *Calculemos*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 5x^3 + 7x + 2}{4x^2 + 6x + 15x^3 + 9}$$

**Solución:**  $1/3$

**Ejemplo 464** *Calcular*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 + 7x^2 + 2}}{5x^2 + 6x + 7}$$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8x^6 + 7x^2 + 2}}{5x^2 + 6x + 7} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt[3]{8x^6 + 7x^2 + 2}}{x^2}}{\frac{5x^2 + 6x + 7}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8\frac{x^6}{x^6} + 7\frac{x^2}{x^6} + \frac{2}{x^6}}}{5 + \frac{6}{x} + \frac{7}{x}} \\ &= \frac{\sqrt[3]{8 + 0 + 0}}{5 + 0 + 0} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

**Ejemplo 465** *Calculemos*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x^3}{x^3}$$

Como  $\cos x^3$  es acotada entre  $-1$  y  $1$  se tiene que

$$\frac{-1}{x^3} \leq \frac{\cos x^3}{x^3} \leq \frac{1}{x^3}$$

y como además  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} = 0$  usando acotamiento se obtiene

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos x^3}{x^3} = 0$$

**Ejemplo 466** Un material radio activo en el tiempo  $t$  tiene una masa  $m(t) = ke^{-\alpha t}$  donde  $k, \alpha \in \mathbb{R}^+$ .  
Muestre que la masa tiende a desaparecer cuando  $t \rightarrow \infty$

**Solución:**  $\lim_{t \rightarrow \infty} ke^{-\alpha t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{\alpha t}}$  pero como

$$e^{\alpha t} \geq 1 + \alpha t \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

Así,

$$0 \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{e^{\alpha t}} \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \alpha t} = 0$$

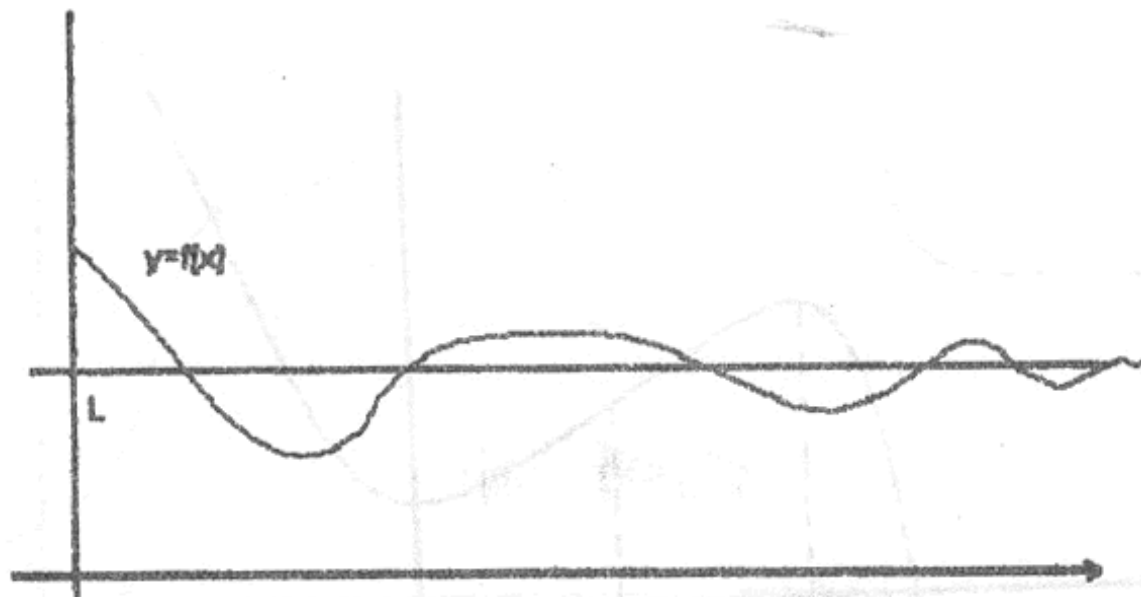
### 5.7.3 Asíntotas

#### Asintotas Horizontales

Sea  $f$  definida en  $\mathbb{R}^+$  y con  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$  se tiene que para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $x > N$ ,  $|f(x) - L| < \varepsilon$ , pero esto último es equivalentemente a  $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$ ,  $\forall x > N$ .

Tomamos la recta  $y = L$ , recta horizontal, se tiene que a medida que  $x$  se acerca al infinito  $f$  se acerca a esta recta como la figura.

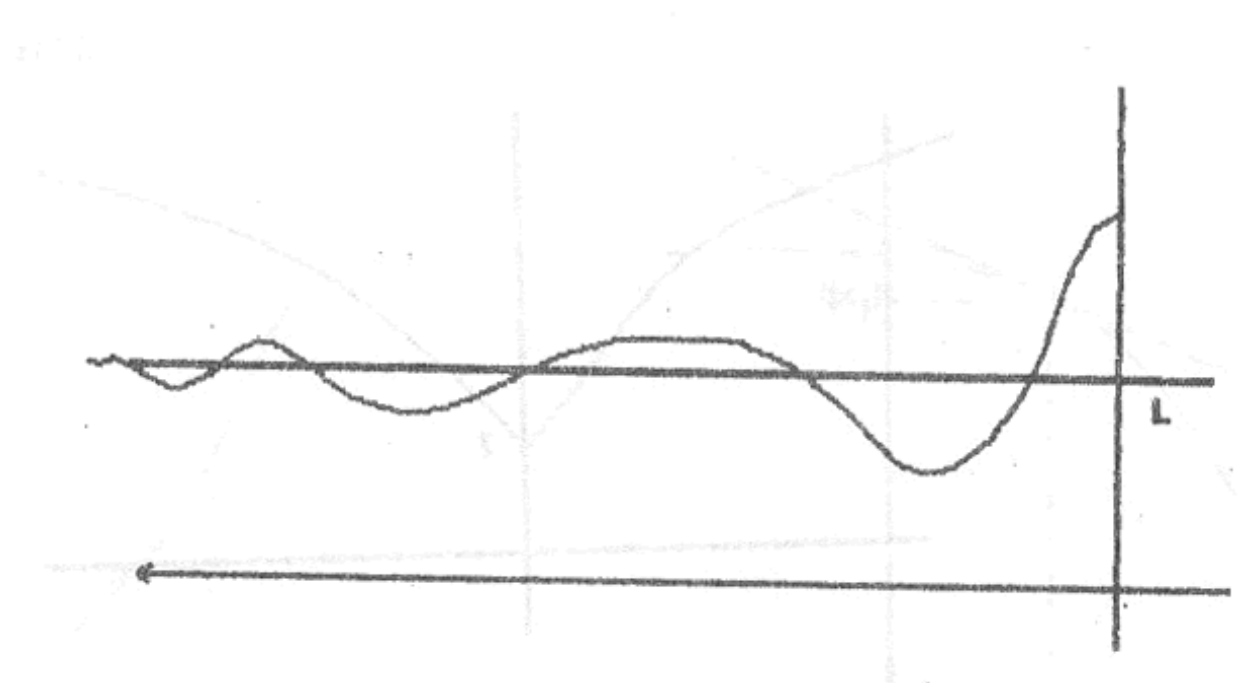


Asíntota Horizontal

En el caso de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$  ocurre lo mismo para funciones definidas en dominio que contenga intervalo de la forma  $] -\infty, N]$ , ya que

$$\begin{aligned} (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(x < N \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon) &\iff \\ (\forall \varepsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{R})(x < N \Rightarrow L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon) \end{aligned}$$

En la figura siguiente se ilustra esta situación



Asíntota Horizontal

**Definición 5.37** Sea  $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  función tal que  $A$  contiene un intervalo del tipo  $]N, \infty[$ . Diremos que la recta  $y = L$  es una **asíntota horizontal** de  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \quad \text{o bien} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

**Ejemplo 467** Calcule las asíntota horizontal de

$$f(x) = \frac{7x^2 + 5x}{4x^2 + 2x - 4}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \frac{7}{4}$ ,  $y = \frac{7}{4}$ ; es una asíntota horizontal.

Como  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{7}{4}$ ,  $y = \frac{7}{4}$  se obtiene la misma asíntota horizontal.

**Ejemplo 468** Calcule las asíntotas horizontales de

$$f(x) = \frac{5\sqrt{2x^2 + 4}}{x + 3}$$

**Solución:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{\frac{x+3}{x}} = \frac{5\sqrt{2+0}}{1+0} = 5\sqrt{2}$$

luego  $y = 5\sqrt{2}$  es una asíntota horizontal.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-5\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{\frac{x+3}{x}} = \frac{-5\sqrt{2+0}}{1+0} = -5\sqrt{2}$$

(Recuerde que  $\sqrt{x^2} = |x|$ ).

Por lo tanto  $y = -5\sqrt{2}$  es otra asíntota horizontal.

Ahora estudiaremos límites que van a infinito, como es el caso de

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} \quad \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{|x-9|}$$

### Definición 5.38 •

- 1) Diremos que el límites de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $p$  es infinitos (y lo denotamos por  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$ ) si para toda vecindad de infinito,  $V_{\infty, N}$ , existe una vecindad de  $p$ ,  $V_{p, \delta}$  tal que

$$f(V_{p, \delta}) \subset V_{\infty, \varepsilon}$$

Haciendo la traducción de las vecindades tenemos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty \iff (\forall N)(\exists \delta > 0)(0 < |x - p| < \delta \wedge x \in \text{Dom} f \Rightarrow f(x) > N)$$

En forma análogamente se tiene

- 2) Diremos que el límites de  $f$  cuando  $x$  tiende a  $p$  es menos infinitos (y lo denotamos por  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty$ ) si para toda vecindad de menos infinitos  $V_{-\infty, N}$  existe una vecindad de  $p$ ,  $V_{p, \delta}$  tal que

$$f(V_{p, \delta}) \subset V_{-\infty, \varepsilon}$$

Haciendo la traducción de las vecindades tenemos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = -\infty \iff (\forall N)(\exists \delta > 0)(0 < |x - p| < \delta \wedge x \in \text{Dom} f \Rightarrow f(x) < N)$$

### Ejemplo 469 Demostremos que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

Sea  $N \in \mathbb{R}^+$ , entonces por propiedad Arquimediana tenemos existe  $M \in \mathbb{N}$  tal que  $N < M$ .

Sea  $\delta = \frac{1}{M}$ , luego si

$$0 < |x| < \delta \Rightarrow N < M = \frac{1}{\delta} < \frac{1}{|x|} = f(x)$$

es decir,

$$(\forall N)(\exists \delta > 0)(0 < |x - 0| < \delta \Rightarrow N < f(x))$$

### Ejemplo 470 Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{|x-9|}$$

**Solución:** Sea  $u = x - 9$ , así si  $x \rightarrow 9$  se tiene que  $u \rightarrow 0$  por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{|x-9|} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{|u|}$$

Este último límite es  $\infty$  por ejemplo anterior

**Observación:** Recuerde si  $|x| < 1$  entonces  $|x|^k < |x|, \forall k \geq 1$ . De esta forma si  $|x| < 1$  entonces  $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{|x|^k}$ .

**Ejemplo 471** *Calcule*

$$\begin{array}{ll} i) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^k}, \quad k \geq 1 \\ iii) & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^k}, \quad k \text{ impar} \end{array} \quad \begin{array}{ll} ii) & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x-p|^k}, \quad k \geq 1 \\ iv) & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{(x-p)^k}, \quad k \text{ impar} \end{array}$$

**Solución:**

i)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = \infty$  y como  $\frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|x|^k}$  si  $|x| < 1$  y  $k \geq 1$ , se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|^k} = \infty$$

ii) Tomando  $u = x - a$ , se tiene

$$\lim_{x \rightarrow p} \frac{1}{|x-p|^k} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{|u|^k}$$

iii) Dado  $-N \in \mathbb{R}^-$ ,  $N \in \mathbb{R}^+$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$0 \neq |x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x|} > N$$

Así

$$-\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{-x} > N$$

Por lo tanto

Dado  $-N \in \mathbb{R}^-$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $-\delta < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -N$ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Como  $\frac{1}{x^k} < \frac{1}{x}$  si  $-1 < x < 0$ ,  $k$  impar, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^k} = -\infty$$

iv)

$$\lim_{x \rightarrow p^-} \frac{1}{(x-p)^k} = \lim_{u \rightarrow 0^-} \frac{1}{u^k} = -\infty$$

Como  $\infty$ ,  $-\infty$  no son números reales, no se puede utilizar el algebra de límites ya que no tiene sentido expresiones del tipo  $3 + \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $4 - \infty$ .

El siguiente teorema nos ayudará a calcular algunos límites.

**Teorema 5.39** Si  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  se tiene

$$1. \lim_{x \rightarrow p} (f + g)(x) = \infty$$

$$2. \text{ Para } \alpha > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = \infty \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{f}{g}(x) = \infty$$

$$3. \text{ Para } \alpha < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow p} (fg)(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow p} \frac{f}{g}(x) = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow p} \frac{g}{f}(x) = 0$$

**Demostración:** (4) Sea  $\alpha$  positivo, como  $\lim_{x \rightarrow p} g(x) = \alpha$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_g > 0)(0 < |x - p| < \delta \wedge x \in \text{Dom}g \Rightarrow \alpha - \varepsilon < g(x) < \alpha + \varepsilon)$$

Por otro lado, como  $\lim_{x \rightarrow p} f(x) = \infty$ , para todo  $N_f \in \mathbb{R}^+$  existe  $\delta_f$  tal que

$$0 < |x - p| < \delta_f \wedge x \in \text{Dom}f \Rightarrow f(x) > N_f \text{ ( luego } \frac{1}{N_f} > \frac{1}{f(x)} \text{.)}$$

Sea  $\delta = \min\{\delta_g, \delta_f\}$  entonces

$$\forall x \in \text{Dom}g/f \wedge 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \leq \frac{\alpha + \varepsilon}{N_f}$$

Así, tomando  $N_f$  suficientemente grande se obtiene lo requerido. Es analoga demostración para el caso  $\alpha < 0$ .

**Observación:** El teorema anterior sigue siendo válido para límites laterales.

**Ejemplo 472** Calculemos

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{|x^2 - 4|}$$

**Solución:**  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{|x-2|} = \infty$  y  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+4}{|x+2|} = 2$ . Por teorema anterior parte (2) tenemos

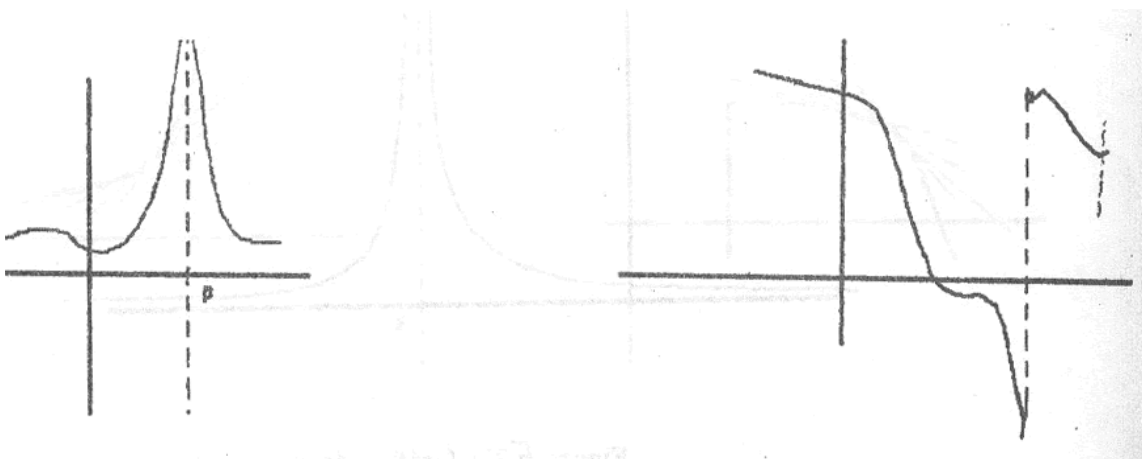
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4}{|x^2 - 4|} = \infty$$

### Asíntotas Verticales

**Definición 5.40** Sea  $f$  definida en una vecindad de  $p$  salvo en  $p$ . Diremos que  $f$  tiene como **asíntota vertical** a la recta  $p$  si

$$\begin{array}{ll} \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = \infty & \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow p^+} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = \infty & \text{o} \quad \lim_{x \rightarrow p^-} f(x) = -\infty \end{array}$$

ver figura



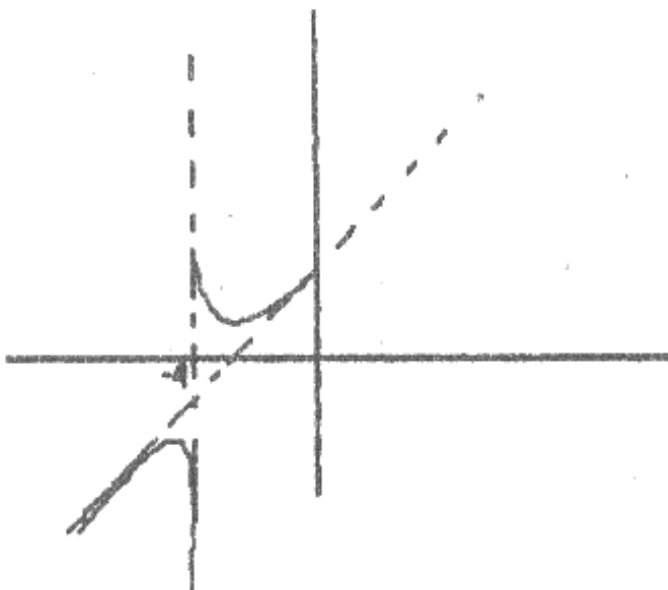
**Ejemplo 473** Sea  $f(x) = \frac{5x^2+5}{(x-2)(x+4)}$

Como  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -4^-} f(x) = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x) = \infty$ , se tiene que las rectas  $x = 2$  y  $x = -4$  son asíntotas verticales. Por otra parte, como  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 5$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 5$  se concluye que  $f(x)$  tiene como asíntota horizontal a la recta  $y = 5$ .

### 5.7.4 Otras asíntotas

**Definición 5.41** Sea  $f$  con dominio que contenga a un intervalo del tipo  $]n, \infty[$  o  $]-\infty, N[$ . Diremos que la recta  $y = ax + b$  es una **asíntota oblicua** de  $f$  si

$$\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - ax - b| = 0 \quad \text{o} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - ax - b| = 0$$



Asintotas Oblicuas

**Ejemplo 474** Sea  $f(x) = \frac{3x^2 - 10x + 7}{x - 4}$ , muestre que  $y = 3x + 2$  es una asíntota oblicua

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} |f(x) - 3x - 2| &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{3x^2 - 10x + 7}{x - 4} - 3x - 2 \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{3x^2 - 10x + 7 - 3x^2 + 12x - 2x + 8}{x - 4} \right| \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{15}{x - 4} \right| = 0 \end{aligned}$$

**Ejemplo 475** Sea  $f(x) = 3x + 5 + 4e^x$  Determine todas las asíntotas oblicuas

**Solución:**  $|f(x) - ax - b| = |3x + 5 + 4e^x - ax - b|$ . Si  $a = 3$  y  $b = 5$  tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} |f(x) - 3x - 5| = \lim_{x \rightarrow -\infty} |4e^x| = 0.$$

Para poder comprobar que no hay más asíntotas necesitamos la siguiente proposición

**Proposición 5.42** Sea  $f$  una función tal que el dominio de  $f$  contiene a un conjunto del tipo  $]N, \infty[$  o  $]-\infty, N[$  entonces

La recta  $y = ax + b$  es una asíntota de  $f$  si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - ax = b$$



**Ejemplo 476** Sea  $f(x) = \frac{5x^2-7x+2+\operatorname{sen} x}{x-1}$ , Muestre que  $y = 5x - 2$  es una asíntota oblicua.

**Solución:**  $|f(x) - (5x - 2)| = \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x-1} \right|$ .

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{x-1} \right| = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| \frac{\operatorname{sen} x}{(x-1)} \right| = 0$  se tiene que  $y = 5x - 2$  es una asíntota oblicua

**Ejemplo 477** Muestre que las asíntotas de la hipérbolas  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  son  $y = \frac{b}{a}x$ ,  $y = -\frac{b}{a}x$ .

**Solución:** Una de las funciones de la hipérbola corresponde a el ala superior

$$y = b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\begin{aligned} \left| y - \frac{b}{a}x \right| &= \left| b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{b}{a}x \right| \\ &= b \left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} \right| \\ &= b \frac{1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}}{\left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right|} \\ &= \frac{b}{\left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right|} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| y - \frac{b}{a}x \right| = 0$  se tiene que  $y = \frac{b}{a}x$  es una asíntota oblicua.

El límite cuando  $x \rightarrow -\infty$  nos dá la misma asíntota

La otra función (ala inferior) nos dá la otra asíntota, ya que en este caso

$$y = -b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}}$$

$$\begin{aligned} \left| y + \frac{b}{a}x \right| &= \left| -b\sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{b}{a}x \right| \\ &= b \left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a} \right| \\ &= b \frac{1 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{x^2}{a^2}}{\left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right|} \\ &= \frac{b}{\left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right|} \end{aligned}$$

Así,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left| y + \frac{b}{a}x \right| = b \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left| \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \right|} = 0$ .

## Graficación

Para graficar  $f$  necesitamos hacer los siguientes pasos

1. Conocer el dominio de  $f$ .
2. Calcular puntos críticos (donde  $f'$  no existe o donde  $f'$  se anula)
3. Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento (signo de  $f'$ ).

4. Determinar donde  $f''$  no existe o donde  $f''$  se anula.
5. Determinar la concavidad de  $f$  (signo de  $f''$ )
6. Asíntotas verticales (encontrar  $a$  tal que  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ ).
7. Asíntotas horizontales ( $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$ ).
8. Asíntotas Oblicuas (encontrar  $m$  y  $b$  tal que  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f(x) - mx - b| = 0$ ).

**Ejemplo 478** Grafique  $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - 3x^2$

La derivada de primer orden de  $f$  es:

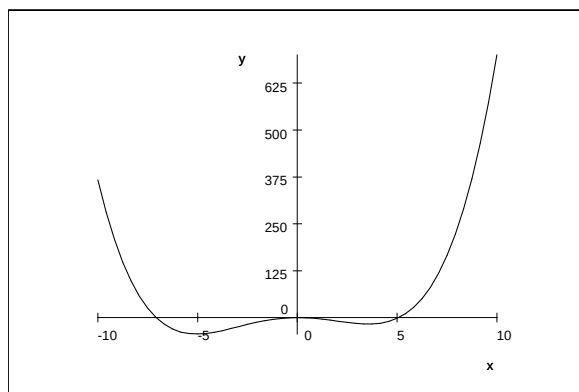
$$f'(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x = \frac{x}{3} \left( x - \frac{-3+3\sqrt{33}}{4} \right) \left( x - \frac{-3-3\sqrt{33}}{4} \right)$$

La derivada de segundo orden  $f$  es:

$$f''(x) = x^2 + x - 6 = (x-2)(x+3)$$

|          |            |                           |            |      |            |     |            |     |            |                           |            |
|----------|------------|---------------------------|------------|------|------------|-----|------------|-----|------------|---------------------------|------------|
| $x$      |            | $\frac{-3-3\sqrt{33}}{4}$ |            | $-3$ |            | $0$ |            | $2$ |            | $\frac{-3+3\sqrt{33}}{4}$ |            |
| $f'(x)$  | -          | $0$                       | +          | +    | +          | $0$ | -          |     | -          | $0$                       | +          |
| $f''(x)$ | +          | +                         | +          | $0$  | -          |     | -          | $0$ | +          | +                         | +          |
| $f(x)$   | $\searrow$ |                           | $\nearrow$ |      | $\nearrow$ |     | $\searrow$ |     | $\searrow$ |                           | $\nearrow$ |
| $f(x)$   | $\cup$     |                           | $\cup$     |      | $\cup$     |     | $\cap$     |     | $\cap$     |                           | $\cup$     |

Así tenemos la siguiente gráfica



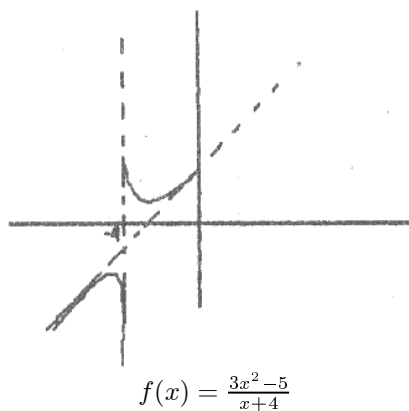
$$f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - 3x^2$$

**Ejemplo 479** Grafique  $f(x) = \frac{3x^2-5}{x+4}$

**Solución:**  $f'(x) = 3 \frac{(x - \frac{\sqrt{129}}{3} + 4)(x + \frac{\sqrt{129}}{3} + 4)}{(x+4)^2}$  y  $f''(x) = \frac{86}{(x+4)^3}$ .

|          |   |                            |  |      |  |                            |  |
|----------|---|----------------------------|--|------|--|----------------------------|--|
| $x$      |   | $\frac{-12-\sqrt{129}}{3}$ |  | $-4$ |  | $\frac{-12+\sqrt{129}}{3}$ |  |
| $f'(x)$  | - |                            |  |      |  |                            |  |
| $f''(x)$ | + |                            |  |      |  |                            |  |
| $f(x)$   |   |                            |  |      |  |                            |  |
| $f(x)$   |   |                            |  |      |  |                            |  |

asi tenemos la siguiente gráfica



**Ejercicio 480** Graficar

$$y = xe^x$$

**Solución:**

1.  $\text{Dom}f = \mathbb{R}$
2. Interceptos con los ejes coordenados  
Si  $x = 0$  entonces  $y = 0$ .  
Si  $y = 0$  entonces  $0 = xe^x$  de donde  $x = 0$ , luego el único punto intercepto con los ejes es  $P(0, 0)$ .
3. Intervalo de crecimiento y intervalo de decrecimiento.

$$y' = f'(x) = e^x + xe^x = e^x(1 + x)$$

Puesto que  $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  entonces

$$f'(x) > 0 \iff 1 + x > 0 \iff x > -1$$

luego  $f$  es estrictamente decreciente en  $] -\infty, -1[$ . esto se resumen en la siguiente tabla.

|         |            |    |            |
|---------|------------|----|------------|
|         |            | -1 |            |
| $1 + x$ | -          | 0  | +          |
| $e^x$   | +          | +  | +          |
| $f'(x)$ | -          | 0  | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ |    | $\nearrow$ |

4. Máximo y/o Mínimo

Por el criterio de la primera derivada para máximo y mínimo relativos se tiene que  $f$  tiene un mínimo en  $x = -1$  (que en este caso también es absoluto)

El punto mínimo es  $P_{min} = (-1, f(-1)) = (-1, \frac{-1}{e})$ .

Observar que  $f$  no tiene máximo.

5. Concavidad, convexidad y punto de inflexión

$$y'' = f''(x) = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$$

En este caso  $f''$  es positiva en el intervalo  $] - 2, \infty[$  y negativa en  $] - \infty, -2[$ . Esto se resumen en la tabla siguiente

|          |        |    |        |
|----------|--------|----|--------|
|          |        | -2 |        |
| $2+x$    | -      | 0  | +      |
| $e^x$    | +      | +  | +      |
| $f''(x)$ | -      | 0  | +      |
| $f(x)$   | $\cap$ |    | $\cup$ |

de donde  $f$  es concava en  $] - \infty, -2[$  y convexa en  $] - 2, \infty[$ . además el punto  $(-2, f(-2))$  es un punto de inflexión de  $f$ .

$$P_{inf} = (-2, f(-2))$$

## 6. Asíntotas

Puesto que  $f$  está definida en todo  $\mathbb{R}$ , es claro que  $f$  no tiene asíntotas verticales.

Determinar las posibles asíntotas oblicuas u horizontales.

Sea  $y = mx + b$  para  $x > 0$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x = \infty$$

luego no existe asíntotas para  $x > 0$ .

Sea  $y = mx + b$  para  $x < 0$ .

$$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Por lo tanto  $m = 0$

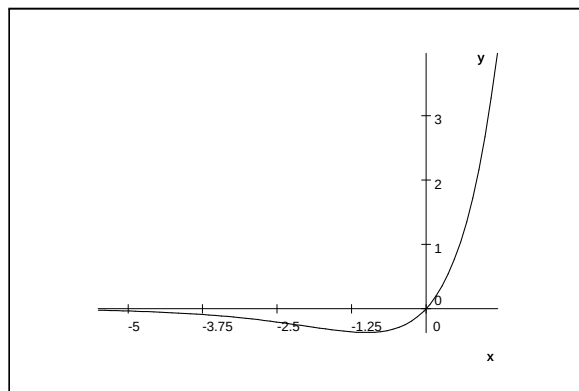
$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$$

pero  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$  y  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = -\infty$ .

luego  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}}$  es de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ . Aplicando L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-e^{-x}} = 0$$

Por lo tanto  $y = 0$  es una asíntota horizontal para  $x < 0$ . Con toda esta información, podemos hacer un esbozo de la gráfica de  $y = xe^x$ . (ver figura )



$$f(x) = xe^x$$

**Ejercicio 481** Considere

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e^{x \ln(1+1/x)}$$

1. Determine  $\text{Dom} f$ .2. Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+}$ 3. Calcule  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ 4. Calcule  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ 5. Calcule  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 6. Grafique  $y = f(x)$ ,**Solución:**1.  $\text{Dom} f = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 + \frac{1}{x} > 0\}$ 

$$1 + \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1+x}{x} > 0 \iff x \in ]-\infty, -1[ \cup ]0, \infty[$$

luego  $\text{Dom} f = \mathbb{R} - [-1, 0]$ .2. Determinemos cual es el comportamiento de  $f$  cerca de 0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln(1+1/x)} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1+1/x)} \end{aligned}$$

pero

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(1+1/x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}$$

y este último límite es de la forma  $\frac{\infty}{\infty}$ , luego aplicando L'Hopital se tiene

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{(1+1/x)x^2} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{1+x} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = e^0$ .Esto significa que si  $x$  tiende a 0 por la derecha, la imágenes de  $f(x)$  tienden a 1.

3. Asíntotas.

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+1/x)^x}{x}$$

Sea  $u = 1/x$ , si  $x \rightarrow \infty$  entonces  $u \rightarrow 0^+$ 

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+1/x)^x}{x} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} u(1+u)^{1/u} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} u \cdot \lim_{u \rightarrow 0^+} (1+u)^{1/u} \\ &= 0 \cdot e = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto  $m = 0$ .

4. El intercepto

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

Observemos que si  $x \rightarrow -\infty$  se tiene también que  $m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$  y  $b = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e$ . Por 3) y 4) se tienen que  $y = e$  es una asíntota horizontal para  $f$

5. Analicemos el comportamiento de  $f$  cerca de  $-1$ .

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -1^-} e^{x \ln(1+1/x)}$$

pero  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x \ln(1+1/x) = \infty$  pues,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x = -1$  y  $\lim_{x \rightarrow -1^-} (1+1/x) = -\infty$ .

Por lo tanto  $\lim_{x \rightarrow -1^-} \ln(1+1/x) = \infty$

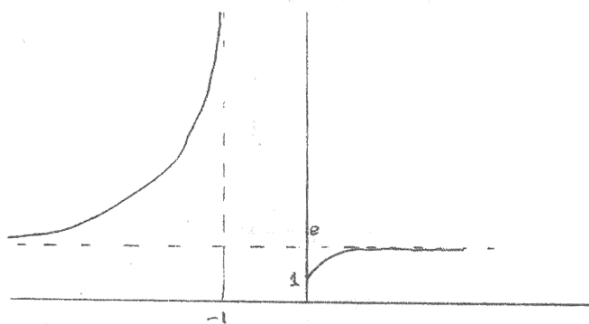
Esto significa que  $f$  tiene una asíntota vertical en  $x = -1$  (cuando  $x$  tiende a  $-1$  por la izquierda, las imágenes tienden a infinito).

6. De la gráfica de  $y = f'(x)$  se observa que  $f'(x) > 0$  en  $] -\infty, -1[$  y en  $]0, \infty[$ , luego  $f$  es estrictamente creciente en estos intervalos. Además  $f'$  es creciente en  $] -\infty, -1[$  y decreciente en  $]0, \infty[$ , así  $f''(x) > 0$  en  $] -\infty, -1[$  y  $f''(x) < 0$  en  $]0, \infty[$

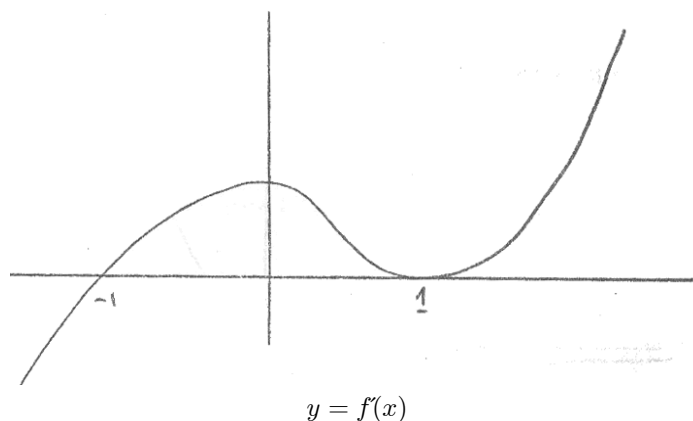
Por lo tanto  $f$  es convexa en  $] -\infty, -1[$  y concava en  $]0, \infty[$ . En resumen se tiene la siguiente tabla

|       |                      | -1         | 0          |                      |
|-------|----------------------|------------|------------|----------------------|
| $f'$  | +                    | $\nexists$ | $\nexists$ | +                    |
| $f''$ | +                    | $\nexists$ | $\nexists$ | -                    |
| $f$   | $\nearrow$<br>$\cup$ |            |            | $\searrow$<br>$\cap$ |

Considerando toda la información obtenida, obtenemos la gráfica de  $y = f(x)$  (ver figura)



**Ejercicio 482** Sea  $f$  una función tal que la gráfica de  $f'$  es



Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

1. La función  $f$  es estrictamente decreciente en  $]0, 1[$ .
2. La gráfica de la función  $f$  es convexa sólo en  $] - \infty, -1[$ .
3. La gráfica de la función  $f$  es concava sólo en  $] - 1, 1[$  y en  $]1, \infty[$ .
4. La función  $f$  tiene un mínimo en  $x = 1$ .
5. La función  $f$  tiene un máximo en  $x = 0$ .

**Solución:** De la gráfica se tiene que la función  $f'$  es positiva en los intervalos  $] - 1, 1[$  y  $]1, \infty[$  y negativa en  $] - \infty, -1[$ .

Además  $f'$  es estrictamente creciente en los intervalos  $] - \infty, 0[$  y  $]1, \infty[$  y estrictamente decreciente en  $]0, 1[$ , es decir,  $f''(x) > 0$  en  $] - \infty, 0[$  y en  $]1, \infty[$ , y  $f''(x) < 0$  en  $]0, 1[$ .

Por lo tanto se tiene la siguiente tabla resumen.

|       |                 | -1 |                 | 0 |                      | 1 |                 |
|-------|-----------------|----|-----------------|---|----------------------|---|-----------------|
| $f'$  | -               |    | +               |   | +                    |   | +               |
| $f''$ | +               |    | +               |   | -                    |   | +               |
| $f$   | $\searrow$<br>U |    | $\nearrow$<br>U |   | $\nearrow$<br>$\cap$ |   | $\nearrow$<br>U |

de donde es claro que

1. Falso.
2. Falso.
3. Falso.
4. Falso.
5. Falso.

**Ejercicio 483** Sea  $f$  una función tal que la gráfica de  $f'$  es la figura

Sabiendo que  $f(-1) = 0$ ,  $f(0) = 1$  y  $f(3/2) = 13/4$ , grafique aproximadamente la función  $f$ .

**Solución:** De la gráfica de  $f'$  se obtiene que  $f'$  es positiva en los intervalos  $] - \infty, -1[$  y  $] - 1, 3/2[$  y es negativa en el intervalo  $]3/2, \infty[$ . Además  $f'$  es estrictamente decreciente en  $] - \infty, -1[$  y en  $]0, \infty[$  y es estrictamente creciente en  $] - 1, 0[$ , es decir  $f''(x) > 0$  en  $] - 1, 0[$  y  $f''(x) < 0$  en  $] \infty, -1[$  y en  $]0, \infty[$ .

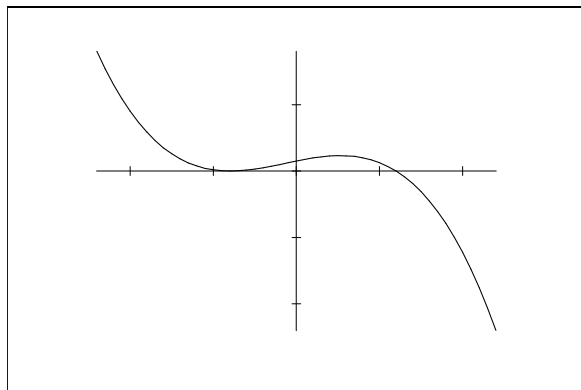
De lo anterior se tiene la siguiente tabla

|       |                      |    |                      |   |                      |   |                      |
|-------|----------------------|----|----------------------|---|----------------------|---|----------------------|
|       |                      | -1 |                      | 0 |                      | 1 |                      |
| $f'$  | +                    |    | +                    |   | +                    |   | -                    |
| $f''$ | -                    |    | +                    |   | -                    |   | -                    |
| $f$   | $\nearrow$<br>$\cap$ |    | $\nearrow$<br>$\cup$ |   | $\nearrow$<br>$\cap$ |   | $\searrow$<br>$\cap$ |

De donde se tiene la siguiente información  $f$  tiene un máximo relativo estricto en  $x = 3/2$ , no tiene mínimo (que pasa si se restringe a un intervalo cerrado), tres puntos de inflexión

$$P_1(-1, f(-1)), \quad P_2(0, f(0)), \quad P_3(3/2, f(3/2))$$

Luego una gráfica aproximada de  $f$  es la figura ??





# Appendix A

## Relaciones

Una **relación**  $\mathcal{R}$  de  $D$  (**conjunto de partida**) a  $E$  (**conjunto de llegada**) es una correspondencia que asocia, a cierto elemento de  $D$ , algún(os) elemento(s) de  $E$ .

Si a un elemento  $x$  de  $D$  le corresponde, según la relación  $\mathcal{R}$ , un elemento  $y$  de  $E$ , se anota  $x\mathcal{R}y$  o bien  $(x, y) \in \mathcal{R}$ . En tal caso, se dice que  $y$  es **una** imagen de  $x$  (según  $\mathcal{R}$ ) y que  $x$  es una preimagen de  $y$  (según  $\mathcal{R}$ ).

El conjunto de todas las preimágenes de elementos de  $E$  (según  $\mathcal{R}$ ) se llama **Dominio** de  $\mathcal{R}$ ; se anota  $\text{Dom}\mathcal{R}$ . Esto es

$$\begin{aligned}\text{Dom}\mathcal{R} &= \{x \in D : \text{existe al menos un } y \in E \text{ tal que } x \text{ está relacionado con } y\} \\ &= \{x \in D : (\exists y \in E), x\mathcal{R}y\}\end{aligned}$$

El subconjunto de  $E$  formado por todas las imágenes de los elementos de  $D$  se llama **Recorrido o Codominio o Conjunto Imagen** de  $\mathcal{R}$ . Se anota  $\text{Rec}\mathcal{R}$ ,  $\text{Cod}\mathcal{R}$ ,  $\text{Im}\mathcal{R}$ . Así

$$\text{Rec}\mathcal{R} = \{y \in E : (\exists x \in D), x\mathcal{R}y\}$$

### Observación:

1. Note que puede tenerse

$$D = \text{Dom } \mathcal{R} \text{ o bien } E = \text{Cod}\mathcal{R};$$

en este caso, la relación recibirá un nombre más específico.

2. Observe además que si<sup>1</sup>  $\mathcal{R}$  es una función, **debe** tenerse

- (a) Cada elemento de  $D$  debe tener imagen en  $E$ ; esto es, el conjunto de partida de  $\mathcal{R}$  debe ser igual a  $\text{Dom}\mathcal{R}$ .
- (b) Si  $x \in D$ , su imagen en  $E$  es única, en este caso se habla de "la" imagen de  $x$  (según  $\mathcal{R}$ ).

Note que (a) y (b) pueden escribirse precisamente

$$(\forall x \in D)(\exists! y \in E)(y = f(x))$$

donde  $x\mathcal{R}y \iff y = f(x)$

**Ejemplo 484** *La relación*

$$\begin{array}{ll} f : & [0, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R} \\ & x \longrightarrow \sqrt{x-1} \end{array}$$

*no es una función ya que 0 no tiene imagen en  $\mathbb{R}$ ; pero es una relación, ya que hay elementos de  $[0, +\infty[$  que están en correspondencia con elementos de  $\mathbb{R}$  (por ejemplo el 5 está en correspondencia con el 2 ó lo que puede escribirse  $5f2$  ó  $f(5) = 2$ ).*

---

<sup>1</sup>En este caso se acostumbra poner  $f$  en vez de  $\mathcal{R}$ .

Lo mismo ocurre con la relación del ejemplo que sigue.

**Ejemplo 485** La relación

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ x &\longrightarrow \frac{1}{x} \end{aligned}$$

no es una función ya que  $2 \in \mathbb{R} - \{0\}$  pero  $\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ , es decir, 2 no tiene imagen<sup>2</sup>

**Ejemplo 486** Sea  $D$  el conjunto formado por los alumnos de Cálculo 1 y  $E$  el conjunto de las alumnas de Cálculo 1. Diremos que un elemento  $x$  de  $D$  está relacionado con un elemento  $y$  de  $E$ ,  $xRy$  si sólo si  $x$  “anda” con  $y$ .

Claramente se ve que  $\text{Dom}R \not\subseteq D$  y que  $\text{Rec}R \not\subseteq E$ . Teóricamente el dominio y el recorrido tienen igual cantidad de elementos.

**Observación:** La relación

$$\begin{aligned} p: \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longrightarrow x \cdot y \end{aligned}$$

es una función que, en el contexto de la axiomática de  $\mathbb{R}$ , se llama una operación. En este caso, se tiene que: dados los números reales  $x$  e  $y$

i)  $x \cdot y$  existe y es un número real (clausura)

ii)  $x \cdot y$  es único.

Mas en general, una operación  $(*)$  en un conjunto  $G$  es simplemente una función

$$\begin{aligned} *: G^2 &\longrightarrow G \\ (a, b) &\longrightarrow a * b \end{aligned}$$

En los casos en que  $*$  no es función, generalmente falla la clausura, por ejemplo, si  $\mathbb{I}$  es el conjunto de los números irracionales

$$\begin{aligned} \cdot: \mathbb{I}^2 &\longrightarrow \mathbb{I} \\ (a, b) &\longrightarrow a \cdot b \end{aligned}$$

podemos afirmar sólo que es una relación ya que falla la clausura de la multiplicación en  $\mathbb{I}$ .

**Ejemplo 487** La relación de  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \rightarrow y$

definida por  $x^2 = y^2$  no es función ya que  $(1)^2 = (1)^2$  y  $(1)^2 = (-1)^2$  y por lo tanto  $x = 1$  tiene dos elementos y relacionados con él, 1 y  $-1$  (es decir,  $1f1$  y también  $1f-1$ ), en este caso  $f(1)$  representa a dos valores<sup>3</sup>.

**Observación:** Notemos que una relación  $R$  de  $D$  en  $E$  ( $R: D \rightarrow E$ ) está formada por los pares ordenados  $(x, y) \in D \times E$  donde  $x$  está “conectado” a  $y$  por la correspondencia anterior. Así, una relación es simplemente un subconjunto  $R$  de  $D \times E$

$$R = \{(x, y) \in D \times E : y \text{ es un elemento correspondiente a } x\}$$

En el ejemplo anterior, la relación sería

$$\begin{aligned} R &= \{(x, y) \in D \times E : y^2 = x^2\} \\ &= \{(x, y) \in D \times E : y = x \vee y = -x\} \end{aligned}$$

y en el ejemplo 485

<sup>2</sup> $\mathbb{Z}$  denota el conjunto de los números enteros.

<sup>3</sup>En este caso no tiene sentido  $f(1)$ . Esta notación sólo es correcta cuando  $f$  es función, ya que siendo así  $f(1)$  tendría un sólo valor.

$$\begin{aligned}
 g &= \{(x, y) \in \mathbb{R} - \{0\} \times \mathbb{Z} : y = \frac{1}{x}\} \\
 &= \{(\frac{1}{n}, n) : n \in \mathbb{Z}\}
 \end{aligned}$$

**Ejemplo 488** Sea

$$R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$$

$R_2$  es una relación, sin embargo no es función pues  $x = -1$ , no tiene imagen y en  $\mathbb{R}$ . Por otra parte  $x = 4$  tiene dos imágenes, 2 y  $-2$ .

En esta terminología, una función  $f : D \longrightarrow E$  se puede interpretar como la relación  $f$

$$f = \{(x, y) \in D \times E : y = f(x) \text{ para todo } x \in D\}^4$$

es decir, como un subconjunto del producto  $D \times E$  que cumple la propiedad

$$\begin{aligned}
 (\forall x)(x \in D)(\exists! y \in E) (x, y) \in f. \\
 (\forall x)(x \in D)(\exists! y \in E) y = f(x).
 \end{aligned}$$

## A.1 Relaciones Básicas

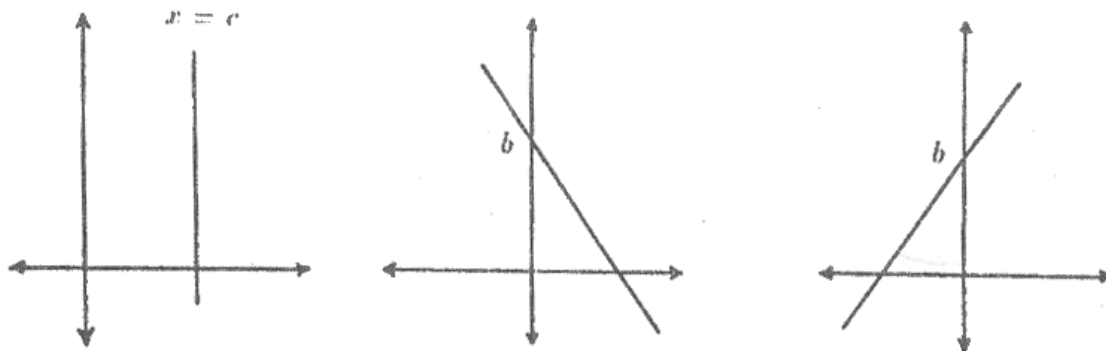
A continuación daremos algunas de las relaciones más usadas en  $\mathbb{R}^2$ , es decir relaciones con conjunto de partida  $\mathbb{R}$  y con conjunto de llegada  $\mathbb{R}$ . Todas ellas corresponden a las llamadas cónicas (escritas aquí en forma canónica).

1. Recta perpendicular al eje  $x$ .

Sea  $c \in \mathbb{R}$  una constante fija, el conjunto

$$L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = c\}$$

es una recta que corta al eje  $x$  perpendicular en el punto  $(c, 0)$  (figura ★ - a).



figuras ★ a, b y c

El dominio de  $L$  es  $\{c\}$  y el recorrido es  $\mathbb{R}$ . A diferencia de  $L$ , (la cual no es función), tenemos las otras rectas que sí son funciones, todas aquellas definidas por las ecuaciones  $y = mx + b$  o equivalentemente  $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$  con  $\beta \neq 0$  (figuras ★ - b y ★ - c).

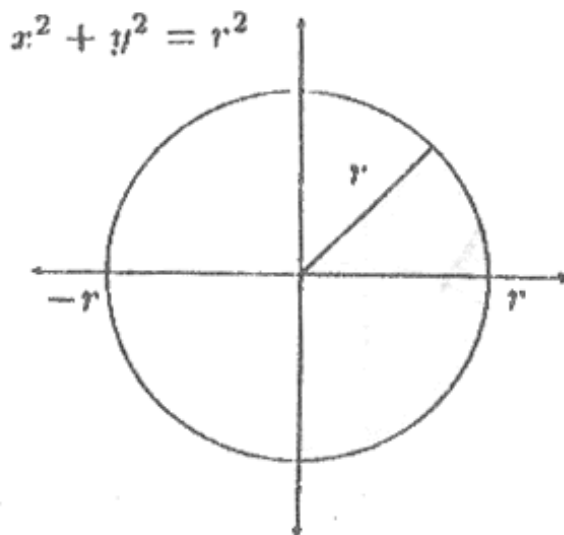
<sup>4</sup>Al conjunto  $f$  se le denomina gráfica de  $f$  según veremos en la sección 2.3 (en ese contexto, se da énfasis a la representación de este conjunto).

## 2. La Circunferencia

La circunferencia centrada en el origen y radio  $r$  es la relación dada por

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = r^2\}$$

$C$  es una relación que no es función como se puede visualizar en su gráfico en la figura



ya que elemento del  $\text{Dom}C = [-r, r]$  tiene dos imágenes (por ejemplo  $(0, r)$  y  $(0, -r) \in C$ ).

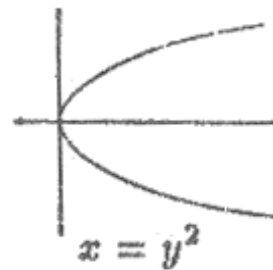
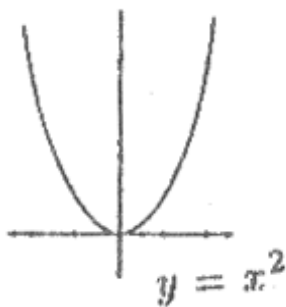
## 3. La Parábola

Los conjuntos

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y^2\}$$

representan parábolas.  $P$  es una función y  $Q$  no lo es. Ambos conjuntos son gráficas simétricas, lo que se debe a la potencia cuadrática (figuras ♡ - a y ♡- b).



Figuras ♡ a y b

$$\text{Dom}P = \mathbb{R} \quad \text{Rec}P = \mathbb{R}^+ \quad \text{Dom}Q = \mathbb{R}^+ \quad \text{Rec}Q = \mathbb{R}$$

Note que  $Q \neq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{x} = y\}$ .

#### 4. La Elipse

Para  $a, b \in \mathbb{R}^+$  fijos, la ecuación cuadrática

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

define una relación  $E$ , con  $E \subseteq \mathbb{R}^2$  (que no es función).

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

Debido a las potencias cuadradas esta relación es una figura simétrica, con ejes de simetría los ejes coordenados ( figura ✠)

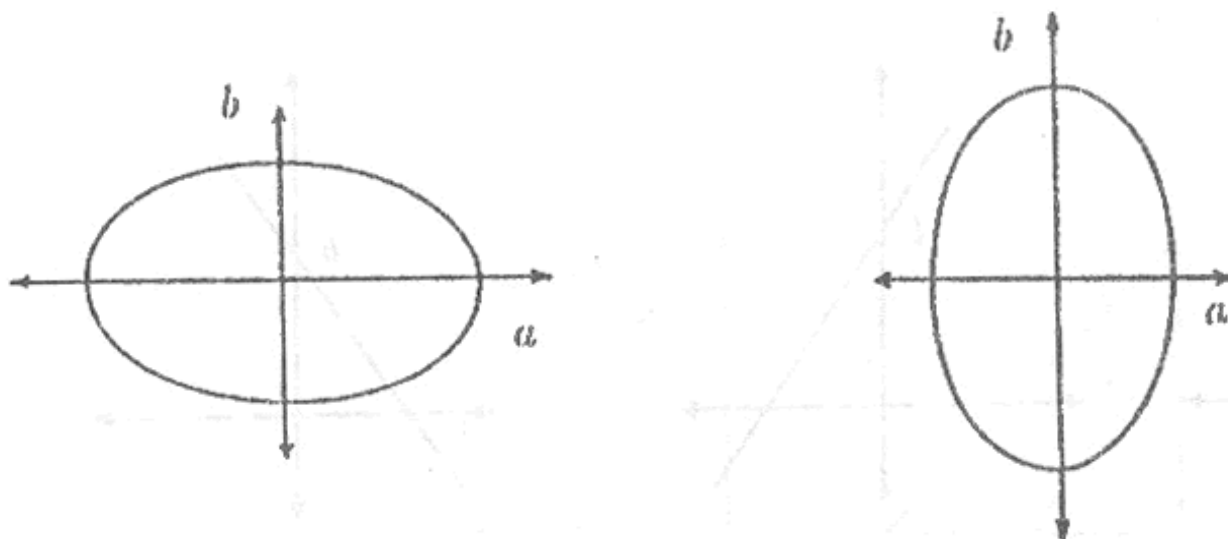


Figura ✠

$$\text{Dom}E = [-a, a] \quad \text{Rec}E = [-b, b]$$

#### 5. La Hipérbola

Para  $a, b \in \mathbb{R}^+$  fijos se define las relaciones

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \quad \text{y} \\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} &= 1 \end{aligned}$$

Nuevamente se tiene como gráfica figuras cuyos ejes de simetría son los ejes coordenados.

En la figura ♠ se representan ellas conjuntamente con 2 rectas, llamadas asíntotas (rectas punteadas)

El dominio de la primera hipérbola es  $\mathbb{R} - ] - a, a[$  y de la segunda es  $\mathbb{R}$ . Los recorridos de ellas son  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{R} - ] - b, b[$  respectivamente. Ninguna de éstas es una función.

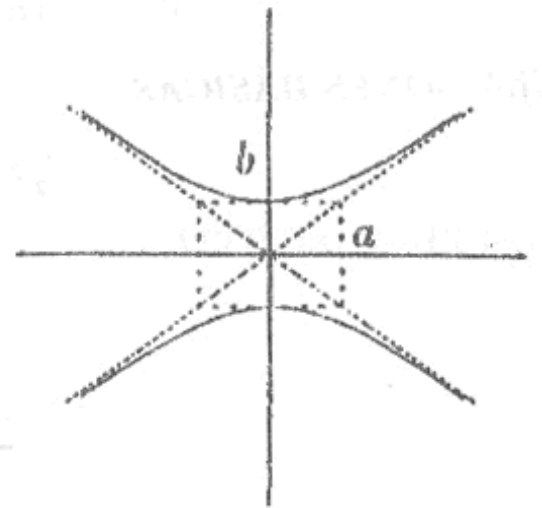
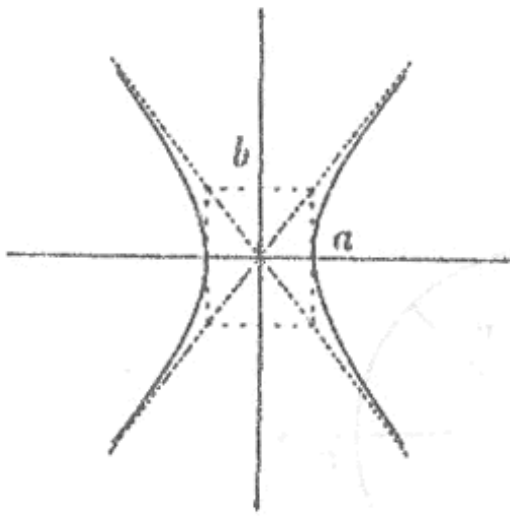


Figura ♠

## Appendix B

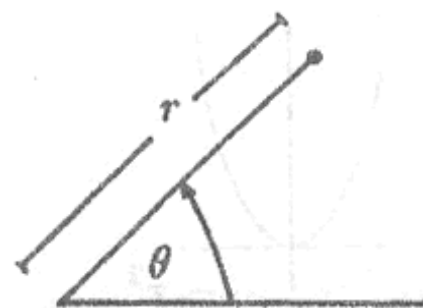
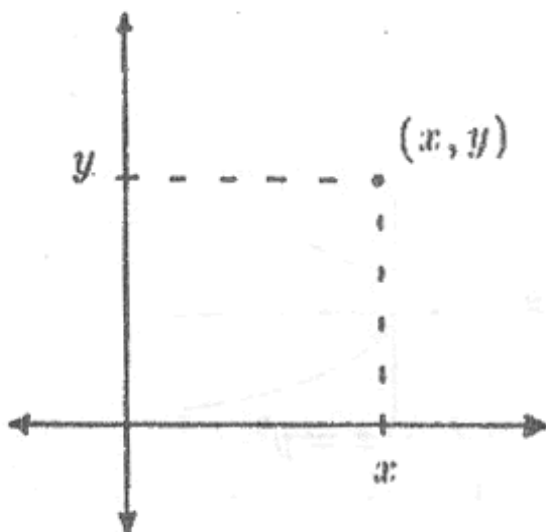
# Geometría Analítica

### B.1 El plano bidimensional

#### B.1.1 Coordenadas Cartesianas o Rectangulares

La forma usual de representar  $\mathbb{R}^2$  es mediante dos rectas reales perpendiculares, una de ellas horizontal, llamada eje  $OX$ , y la otra vertical llamada eje  $OY$ . La intersección de estas rectas reales se hace en el cero, determinando lo que se llama origen del sistema.

De esta forma todo punto del plano tiene un par ordenado  $(x, y)$ . La coordenada  $x$  del punto es llamada **abscisa** y la coordenada  $y$  es llamada **ordenada**, ambas se obtienen proyectando perpendicularmente el punto sobre los ejes como se indica en la figura (?? - a). Las coordenadas  $(x, y)$  son llamadas coordenadas rectangulares. (Hablamos también del “sistema  $OXY$ ”).



#### B.1.2 Coordenadas Polares

<sup>1</sup> Los puntos del plano puede ser representado de otra forma, mediante una distancia y un ángulo. Lo que llamaremos coordenadas polares.

Tomemos la semirrecta real no negativa,  $\mathbb{R}_0^+$  y dibujémosla en forma horizontal. A esta recta la llamaremos **eje polar** y al 0 de la recta, lo llamaremos origen  $O$  (figura ✕ derecha).

---

<sup>1</sup> Estas coordenadas le permitirán entender dónde se encuentra el enemigo en las películas de guerra, pero su uso es mucho más general. Con seguridad Ud. las ocupará en otros ámbitos más productivos.

Sea  $P$  un punto arbitrario del plano y sea  $r$  la distancia entre  $P$  y  $O$ .

El segmento que va desde  $O$  a  $P$  forma un ángulo  $\theta$  con el eje polar medido contra reloj, asítenemos el par  $(r, \theta)$  que determina la posición del punto  $P$  del plano. El par  $(r, \theta)$  es llamado **coordenadas polares** del punto  $P$  (Ver figura ?? - b).

Note que los puntos, en polares  $(3, \pi/4)$  y  $(-3, 5\pi/4)$  representan el mismo lugar.

## B.2 Transformación de Coordenadas

### B.2.1 Traslaciones en coordenadas cartesianas

Si los nuevos ejes  $u, v$  son paralelos a los antiguos ejes  $x, y$  y el nuevo origen tiene coordenadas  $(h, k)$  en el antiguo sistema (ver figura ⑤ izquierda) las ecuaciones que los relacionan son

$$x = u + h \quad y = v + k$$



Figura ⑤

**Ejemplo 489** Supongamos que el origen del sistema  $OUV$  tiene coordenadas  $(3, -5)$  en el sistema  $OXY$ , y que los sistemas tienen los ejes paralelos entre sí.

El punto  $P$  de coordenadas  $(2, 7)$  en el sistema  $OUV$  tiene coordenadas  $(2 + 3, 7 - 5)$  en el sistema  $OXY$ .

**Ejemplo 490** Usando los sistemas del ejemplo anterior se tiene:

La relación  $\mathcal{R}$  definida por la ecuación

$$(u + 3)^2 + (v - 5)^2 = 4$$

corresponde a la relación

$$x^2 + y^2 = 4$$

en el sistema trasladado  $OXY$ .

### B.2.2 Rotaciones en coordenadas cartesianas

Si los orígenes de los sistemas son comunes y el nuevo sistema  $OUV$  forma un ángulo  $\theta$  respecto del antiguo sistema  $OXY$  (figura ⑤ derecha). Las ecuaciones que relacionan los sistemas son:

$$x = u \cos \theta - v \sin \theta \quad y = u \sin \theta + v \cos \theta$$

**Ejemplo 491** Supongamos que los ejes del sistema  $OUV$  están rotados en un ángulo de  $\pi/4$  respecto del sistema  $OXY$ .

El punto  $P$  de coordenadas  $(3, 4)$  en el sistema  $OUV$  tiene coordenadas

$$(3 \cos(\pi/4) - 4 \sin(\pi/4), 3 \sin(\pi/4) + 4 \cos(\pi/4)) = (-\sqrt{2}/2, 7\sqrt{2}/2)$$



Para eliminar el término mixto  $x \cdot y$  en la ecuación cuadrática

$$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

y obtener una expresión más simple, una forma es rotar los ejes en un ángulo  $\theta = \arctg(m)$ , donde  $m$  es la raíz positiva de la ecuación

$$hm^2 + (a - b)m - h = 0$$

**Ejemplo 492** Tomemos la ecuación  $xy = 1$ ; eliminemos el término  $xy$  mediante una rotación de ejes. En este caso la ecuación cuadrática

$$hm^2 + (a - b)m - h = \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2} = 0$$

Así  $\theta = \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$  y

$$\begin{aligned} x &= u \frac{\sqrt{2}}{2} - v \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u - v) \\ y &= u \frac{\sqrt{2}}{2} + v \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(u + v) \end{aligned}$$

Por lo tanto  $xy = 1 \iff \frac{u^2}{2} - \frac{v^2}{2} = 1$

Así  $xy = 1$  es una hipérbola rotada en un ángulo de  $\pi/4$ , es decir, con eje de simetría y foco en la recta  $x = y$  y asíntota los ejes  $OX$  y  $OY$ .

### B.2.3 Relación entre coordenadas polares y cartesianas

a) Dado el punto  $P$  con coordenadas rectangulares  $(x, y)$  las coordenadas polares de  $P$  son  $(r, \theta)$ , donde

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{y} \quad \theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0$$

En el caso de que  $x$  sea nulo, el ángulo será  $\pi/2$  si  $y > 0$  y será  $-\pi/2$  si  $y < 0$ .

b) Dado el punto  $P$  con coordenadas polares  $(r, \theta)$ , las coordenadas cartesianas son  $(x, y)$  donde

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

**Ejemplo 493** Consideremos el punto  $P$  con coordenadas cartesianas  $(-1, 1)$ . Determinemos sus coordenadas polares.

Como

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{y} \\ \theta &= \arctg(-1) = \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

se tiene que las coordenadas polares de  $(r, \theta) = (\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4})$ .

La recta  $x = y$  en coordenadas cartesianas toma una forma totalmente distinta en coordenadas polares. En efecto

$$x = y \iff r \cos \theta = r \sin \theta \iff \operatorname{tg} \theta = 1$$

Así, los siguientes conjuntos representa lo mismo

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : x = y\} \\ &\{(r, \theta) : r \in \mathbb{R} \wedge \theta = \pi/4\} \\ &\{(r, \theta) : r \in \mathbb{R} \wedge \theta = 5\pi/4\} \end{aligned}$$

Lo mismo ocurre con los conjunto

$$\begin{aligned} &\{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\} \\ &\{(r, \theta) : r = 2 \wedge \theta \in [0, 2\pi]\} \\ &\{(r, \theta) : r = 2 \wedge \theta \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

que tienen como representación una circunferencia.

La curva llamada Cardioide tiene como ecuación en coordenadas cartesianas

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2)$$

y en coordenadas polares  $r = a(\cos \theta + 1)$  o  $r = a(\cos \theta - 1)$ .

### B.3 Recta

Una recta queda totalmente determinada por dos puntos. Si  $P_1 = (a, b)$  y  $P_2 = (c, d)$  son esos puntos, la ecuación es

$$\frac{y - d}{x - c} = \frac{d - b}{c - a} \text{ si } c \neq a$$

si  $a = c$  la ecuación es  $x = a$ .

La pendiente de la recta que pasa por los puntos  $(a, b)$ ,  $(c, d)$  es

$$m = \frac{d - b}{c - a} \text{ si } c - a \neq 0$$

Si  $a = c$  la recta es perpendicular al eje  $OX$  y no tiene pendiente (inclinación) pero a veces se dice equivocadamente que tiene.

La ecuación de la recta con pendiente  $m$  y que pasa por el punto  $(a, b)$  es

$$y - b = m(x - a)$$

La ecuación de una recta horizontal (es decir, de pendiente 0) y que pasa por el punto  $(a, b)$  es

$$y = b$$

La ecuación de una recta perpendicular al eje  $OX$  y que pasa por el punto  $(a, b)$  es

$$x = a$$

Si el ángulo que forma la recta con el eje  $OX$  es  $\alpha$  y la recta pasa por el punto  $(a, b)$ , ella tiene como ecuación

$$y - b = \operatorname{tg}(\alpha)(x - a)$$

ya que  $\operatorname{tg} \alpha = m$  (figura izquierda).

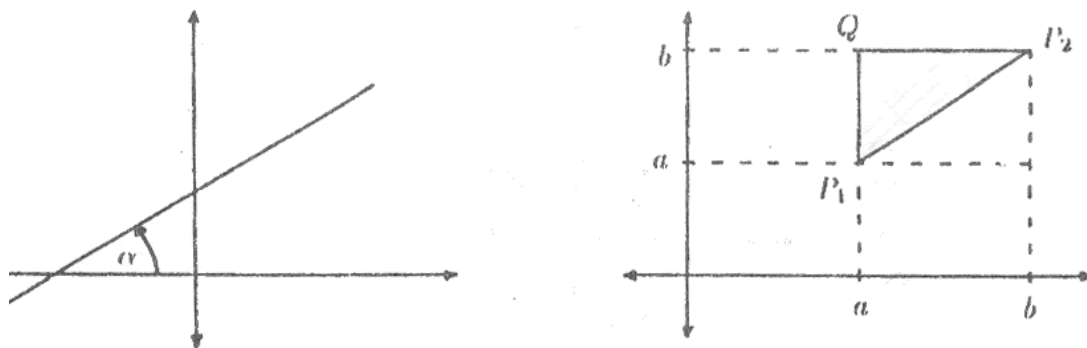


Figura ♡

### B.3.1 Distancia

La distancia entre los números reales  $a$  y  $b$  la hemos calculado usando valor absoluto.

$$|a - b| = \text{distancia entre } a \text{ y } b$$

La **distancia entre los puntos**  $P_1 = (a, b)$  y  $P_2 = (c, d)$  de  $\mathbb{R}^2$  la definiremos y la denotaremos como sigue

$$\sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} := d(P_1, P_2) = \overline{P_1 P_2}$$

La expresión dada para  $d(P_1, P_2)$  es el resultado de aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo  $P_1 Q P_2$  de la figura  $\heartsuit$  derecha, ya que obviamente la distancia entre  $P_1$  y  $P_2$  corresponde a la hipotenusa de este triángulo.

Trasladando paralelamente  $QP_2$  al eje  $OX$  se tiene que el lado  $QP_2$  mide  $\overline{QP_2} = |a - c|$  y trasladando paralelamente el lado  $QP_1$  al eje  $OY$  se tiene que este mide  $\overline{QP_1} = |b - d|$ .

Así, usando el teorema de Pitágoras se tiene que la distancia  $d(P_1, P_2)$  satisface

$$\overline{P_1 P_2}^2 = \overline{QP_2}^2 + \overline{QP_1}^2$$

o equivalentemente

$$(d(P_1, P_2))^2 = |a - c|^2 + |b - d|^2$$

o bien

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$$

**Ejemplo 494** Calculemos la distancia entre los puntos  $P_1 = (10, 4)$  y  $P_2 = (2, -2)$ :

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(10 - 2)^2 + (4 - (-2))^2} = \sqrt{100} = 10$$

**Observación:** Es conveniente notar que la función distancia tiene las propiedades básicas de valor absoluto:

a) Simetría: Para todo par de puntos  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$

$$d(P_1, P_2) = d(P_2, P_1)$$

b) Desigualdad triangular: Para todo trío de puntos  $P_1, P_2, P_3 \in \mathbb{R}^2$  se tiene

$$d(P_1, P_3) \leq d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3)$$

c) Sea  $P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$  entonces

$$d(P_1, P_2) = 0 \iff P_1 = P_2$$

**Ejercicio 495** Verifique las propiedades (a), (b) y (c) **Solución:** (a) y (b) quedan para el lector.

(c)  $(\Rightarrow)$  Sean  $P_1 = (a, b)$  y  $P_2 = (c, d) \in \mathbb{R}^2$  dos puntos arbitrarios y sea  $d(P_1, P_2) = 0$ , así

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2} = 0$$

por lo tanto  $(a - c)^2 = 0 \wedge (b - d)^2 = 0$ . De aquí se tiene  $a = c \wedge b = d$ , es decir,

$$(a, b) = (c, d) \quad P_1 = P_2$$

(c)  $(\Leftarrow)$  Si  $P_1 = P_2$ ,  $d(P_1, P_2) = 0$  trivialmente

La **distancia entre el punto**  $(a, b)$  **y la recta**  $Ax + By + C = 0$  es

$$\frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

El ángulo  $\theta$  entre las rectas  $Ax + By + C = 0$ ,  $Dx + Ey + F = 0$  está dado por

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{AE - DB}{AD + BE}$$

Asíellas son paralelas si y sólo si

$$AE - DB = 0$$

o ellas son perpendiculares si y sólo si

$$AD = -BE$$

Si las pendientes de las rectas son  $m_1$  y  $m_2$  respectivamente se tendrá que el ángulo entre ellas está dado por

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Las rectas serán paralelas si  $m_1 = m_2$  y perpendiculares si  $m_1 m_2 = -1$

## B.4 Cónicas

### B.4.1 Circunferencia

Sea  $P = (h, k) \in \mathbb{R}^2$  y  $r > 0$  ambos fijos, se define la circunferencia de centro  $(h, k)$  y radio  $r$  como el conjunto de puntos  $(x, y)$  de  $\mathbb{R}^2$  que están a la distancia  $r$  del punto  $P$ , es decir,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), P) = r\}.$$

Como

$$d((x, y), P) = r \text{ es equivalente a } \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} = r,$$

se tiene que

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2\}$$

De esta forma, la ecuación que define a la circunferencia de centro  $(h, k)$  y radio  $r$  es

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2 \tag{B.1}$$

y, mediante la resolución de los binomios cuadráticos se puede llevar a una expresión como la siguiente

$$x^2 + Ax + y^2 + By + C = 0 \tag{B.2}$$

La pregunta natural es: ¿Se puede siempre escribir una expresión cuadrática del tipo B.2 como B.1? Ya que en ese caso la expresión dada representa una circunferencia B.1, y permite saber con precisión su centro y su radio.

**Ejemplo 496** *Veamos para qué valores de  $c$  la ecuación*

$$3x^2 + 6x + 3y^2 + 42y + c = 0 \tag{B.3}$$

*es una circunferencia y para esos  $c$  (apropiados), determinemos el radio y el centro correspondiente.*

**Solución:** Para escribir B.3 como la ecuación B.1 necesitamos completar cuadrado, es decir, usar el producto notable  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

$$3x^2 + 6x + 3y^2 + 42y + c = 3(x^2 + 2x + \dots) + 3(y^2 + 14y + \dots) + c$$

Agregando ceros astutos (sumando y restando el mismo número) tenemos que

$$3x^2 + 6x + 3y^2 + 42y + c = 3(x+1)^2 - 3 + 3(y+7)^2 - 3 \cdot 49 + c$$

Por lo tanto la ecuación de nuestro problema es equivalente a

$$\begin{aligned} 3(x+1)^2 + 3(y+7)^2 &= 147 + 3 - c \\ (x+1)^2 + (y+7)^2 &= 50 - \frac{c}{3} \end{aligned}$$

Como queremos que  $50 - \frac{c}{3}$  sea  $r^2$  debemos exigir que  $50 - \frac{c}{3}$  sea positivo. Así debe cumplir  $150 > c$  y en ese caso la ecuación B.3 tiene como gráfico a la circunferencia de centro  $(-1, -7)$  y radio  $\sqrt{50 - \frac{c}{3}}$ .

### B.4.2 Parábola

Sea  $L$  una recta de  $\mathbb{R}^2$  y  $F$  un punto de  $\mathbb{R}^2$  no perteneciente a  $L$ . Una parábola  $P$  (figura ▼ izquierda) es la relación de  $\mathbb{R}^2$  definida como sigue:

“Es el conjunto de todos los puntos de  $\mathbb{R}^2$  que equidistan de un punto fijo  $F$  llamado **foco** y una recta fija  $L$  llamada **directriz**”,  
es decir,

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d((x, y), F) = \text{distancia de } (x, y) \text{ a la recta } L\}$$

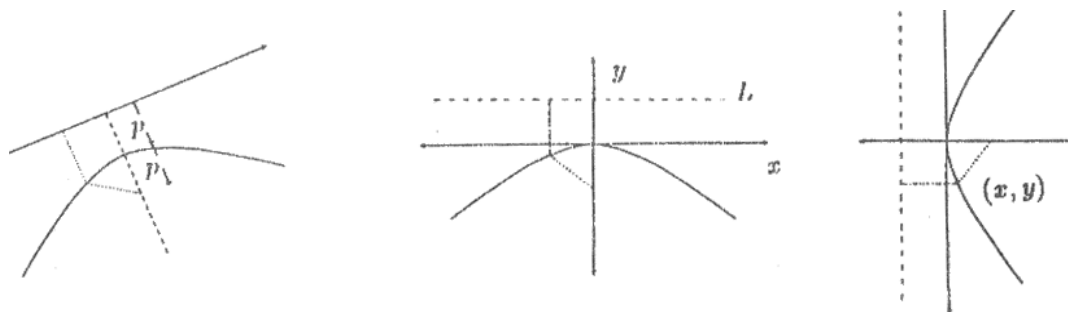


Figura ▼

En el caso (de la figura ▼ central) que el foco sea  $F = (0, p)$  y la recta  $L$  es  $y = -p$ ,  $P$  se reduce a

$$P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + (y+p)^2}\}$$

Así, la parábola queda definida por la ecuación

$$(x-0)^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2$$

o bien

$$x^2 = 4py$$

Si se toma foco  $F = (p, 0)$  y la recta  $L$ , la vertical  $x = -p$  se obtiene la ecuación de la parábola de la figura ▼ derecha

$$y^2 = 4px$$

Como se ve en las figuras ▼, la parábola es simétrica respecto a una recta perpendicular a la directriz, llamado eje de la parábola. El punto de corte de la parábola con este eje se llama **vértice** de la parábola.

Supongamos que el vértice de la parábola tiene coordenadas  $V = (h, k)$ , las expresiones

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (\text{B.4})$$

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (\text{B.5})$$

representan parábolas. Para verificarlo basta pensar en un sistema de coordenadas, traslación del anterior, que cumpla

$$u = x - h \quad v = y - k$$

ya que en este nuevo sistema, las ecuaciones B.4 y B.5 se reducen a:

$$u^2 = 4pv \quad v^2 = 4pu$$

respectivamente, que son claramente parábolas en el sistema con ejes  $OU$  y  $OV$ .

Haciendo las traslaciones correspondientes, se tiene que la parábola B.4 tiene directriz con ecuación  $y = k - p$  y vértice  $V = (h, k)$ .

Análogamente se tiene que la parábola

$$(y - k)^2 = 4p(x - h)$$

tiene foco  $F = (h + p, k)$ , directriz  $x = h - p$  y vértice  $V = (h, k)$ .

Desarrollando las expresiones de la ecuación (B.4) se tiene que ella se puede reducir a una ecuación del tipo

$$Ax^2 + Bx + Cy + D = 0,$$

Análogamente se tiene que la ecuación (B.5) se puede llevar a una ecuación del tipo

$$Ay^2 + By + Cx + D = 0$$

De esta forma se puede decir que una ecuación cuadrática en la variable  $x$  y lineal en la variable  $y$  puede tener como representación una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje  $OY$ . La última ecuación podría representar una parábola con eje paralelo al eje  $OX$ .

**Ejemplo 497** *Veamos si la ecuación*

$$2x^2 - 6x + 4 - y = 0$$

*representa una parábola.*

*Como*

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 6x + 4 - y = 0 \\ \iff & 2(x^2 - 3x + \quad) = y - 4 \\ \iff & 2(x - \frac{3}{2})^2 = y + \frac{1}{2} \\ \iff & (x - \frac{3}{2})^2 = \frac{1}{2}(y + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

*podemos decir que es una parábola con eje paralelo al eje  $OY$ . con vértice  $(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$ , foco  $(\frac{3}{2}, -\frac{3}{8})$  (ya que  $p = \frac{1}{8}$ ) y la recta directriz con ecuación  $y = -\frac{5}{8}$ .*

### B.4.3 Elipse

Sea  $F_1, F_2$  dos puntos del plano.

Una elipse con foco  $F_1$  y  $F_2$  es la relación definida como el “conjunto de todos los puntos del plano tales que la suma de las distancias de él a los puntos focos sea constante”.

Si  $P = (x, y)$  es un punto de la elipse se tiene que

$$d((x, y), F_1) + d((x, y), F_2) = 2k$$

donde  $k$  es un número real positivo fijo,

Si los focos son de coordenadas  $(-p, 0)$  y  $(p, 0)$  (con  $k > p$ ), lo anterior nos queda

$$\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2} = 2k$$

Eliminando las raíces, y simplificando, se puede llegar a

$$x^2(k^2 - p^2) + k^2 y^2 = k^2(k^2 - p^2)$$

o equivalentemente

$$\frac{x^2}{k^2} + \frac{y^2}{k^2 - p^2} = 1$$

y como  $k^2 - p^2 > 0$  se puede escribir esta última como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

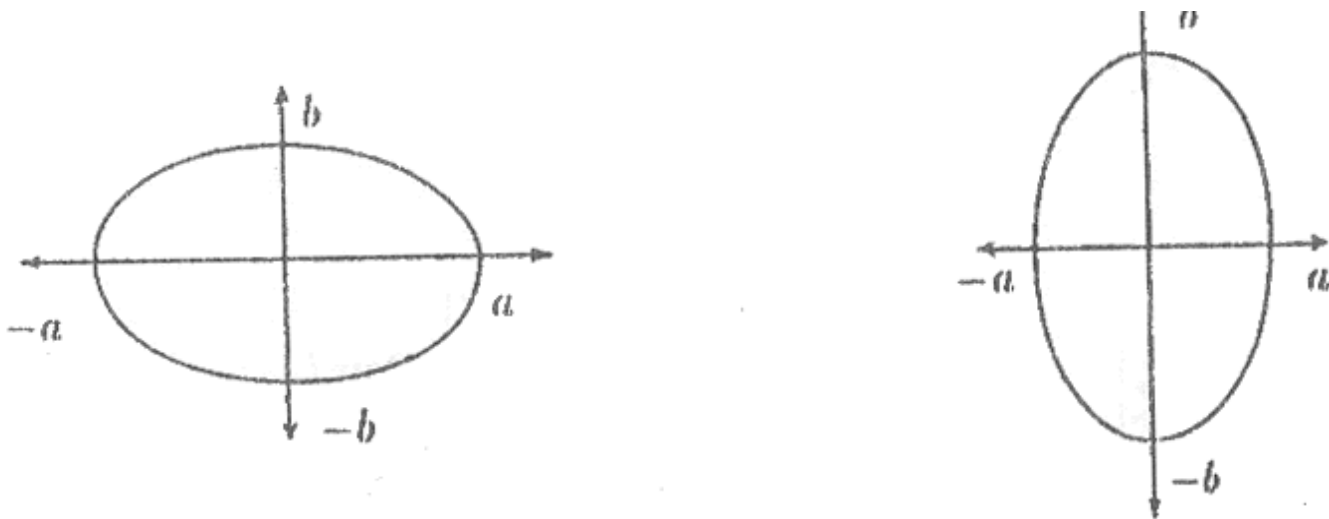


Figura ■

La ecuación ?? con  $a^2 > b^2$  es una elipse (figura ■ izquierda) con **vértices principal**  $(\pm a, 0)$  y vértices secundario  $(0, \pm b)$ . Los focos son por lo tanto  $(\pm p, 0)$  donde  $p^2 = a^2 - b^2$ .

Si  $a^2 < b^2$  la ecuación ?? es una elipse con vértices principal  $(0, \pm b)$  (figura ■-derecha), vértices secundario  $(\pm a, 0)$  y focos  $(0, \pm p)$  donde  $p^2 = b^2 - a^2$

La ecuación ?? es lo que se llama ecuación normal de la elipse.

La ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (\text{B.6})$$

con  $a$  y  $b$  constantes positivas tiene como representación una elipse, con centro en el punto  $(h, k)$ , con vértices  $V_{1,2} = (h \pm a, k)$   $V_{3,4} = (h, k \pm b)$

Dependiendo de cuáles de los dos es mayor entre  $a$  y  $b$  se tiene cual es el vértice principal y esto es importante ya que los focos están entre los vértices principal. Así, si  $a > b$  los focos tienen como coordenadas  $(h \pm \sqrt{a^2 - b^2}, k)$ , y si  $b > a$  entonces los focos tienen como coordenadas  $(h, k \pm \sqrt{b^2 - a^2})$

Por el significado de  $a$  y  $b$  nos damos cuenta que dependiendo de la diferencia entre ellos dependerá la mayor o menor “redondez” de la elipse. Esto nos lleva a la siguiente definición

**Excentricidad.** Usando la notación y significado de los términos de la ecuación B.6 se define la excentricidad( $e$ ) de una elipse por

$$e = \frac{\sqrt{|a^2 - b^2|}}{\max\{a, b\}}$$

Podemos notar que si  $a = b$ ,  $e = 0$  y B.6 representa una circunferencia.

La primera ley de Kepler afirma: “La órbita de cada planeta en el sistema solar es una elipse con el sol en uno de los focos.”

La excentricidad para la órbita de la tierra es aproximadamente 0,017 y para el cometa Halley 0,967; es decir la órbita de la tierra es más “redonda” que la del cometa.

El cometa Halley tiene un período de 76,2 años (es decir, se demora ese tiempo en recorrer la elipse que forma su órbita). La distancia mínima del cometa al sol es aproximadamente 0,587UA (unidades astronómicas<sup>2</sup>), esto corresponde a la distancia entre el foco y el vértice principal respectivo, es decir,

$$a - p \approx 0,587$$

como  $e = \frac{p}{a} \approx 0,967$

$$p \approx 0,967a \approx 0,967(p + 0,587)$$

$$p \approx 0,967p + 0,568$$

Por lo tanto  $p \approx \frac{0,568}{0,033} \approx 17,2$ . Así la distancia máxima del cometa al sol es

$$a + p \approx 17,8 + 17,2 \approx 35\text{UA}$$

lo que fue posible determinar conociendo la distancia mínima y la excentricidad de su órbita

#### B.4.4 Hipérbola

Sean  $F_1$   $F_2$  dos puntos de  $\mathbb{R}^2$

“Una hipérbola  $H$  es el conjunto de todos los puntos  $(x, y)$  del plano tales que la diferencia de sus distancia a los puntos fijos  $F_1$  y  $F_2$ , llamados focos, es una constante”. De esta forma

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |d(F_1, (x, y)) - d(F_2, (x, y))| = \text{constante}\}$$

Para encontrar las formas más simple de la ecuación de una hipérbola tomemos focos  $F_1 = (p, 0)$ ,  $F_2 = (-p, 0)$  y la constante igual a  $2a$  (claramente  $a < p$ ). Así la ecuación de esta hipérbola está dada por

$$\begin{aligned} |d((x, y), F_1) - d((x, y), F_2)| &= 2a \\ |\sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x+p)^2 + (y-0)^2}| &= 2a \end{aligned}$$

eliminando las raíces se puede llegar a la expresión

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{p^2 - a^2} = 1$$

Denotando  $b^2 = p^2 - a^2$  se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{B.7}$$

Por los términos cuadráticos podemos notar que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes; los puntos  $V_1 = (a, 0)$  y  $V_2 = (-a, 0)$  son los vértices de la hipérbola, el valor  $b$  que satisface

$$p^2 = a^2 + b^2$$

nos sirve para calcular las asíntotas de la hipérbola  $y = \pm \frac{b}{a}x$  (figura ♠-a).

La hipérbola

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

---

<sup>2</sup>1UA = 190.000.000 Km.



tiene sus focos y sus vértices en el eje  $OY$  (figura ♠-b) ( $V_1 = (0, b)$ ,  $V_2 = (0, -b)$ ,  $F_1 = (0, \sqrt{b^2 + a^2})$ ,  $F_2 = (0, -\sqrt{b^2 + a^2})$ ).

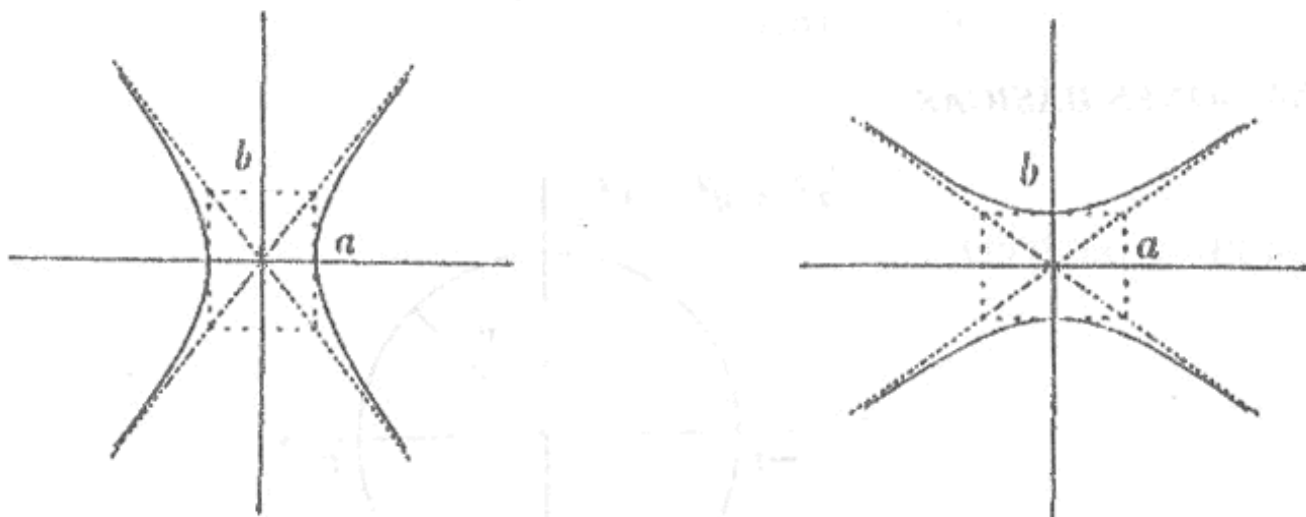


Figura ♠

La hipérbola dada en B.7 tiene sus vértices y focos en el eje  $OX$  siendo estos  $V_1 = (a, 0)$ ,  $V_2 = (-a, 0)$ ,  $F_1 = (\sqrt{b^2 + a^2}, 0)$ ,  $F_2 = (-\sqrt{b^2 + a^2}, 0)$

La ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

tiene como representación gráfica una hipérbola con:

Centro  $(h, k)$ , vértice y focos en eje  $OX$  (ya que la potencia cuadrática de  $y$  es negativa)

|                            |                                                                       |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Vértices:                  | $V_1 = (h + a, k)$ , $V_2 = (h - a, k)$                               |
| Focos:                     | $F_1 = (h + \sqrt{a^2 + b^2}, k)$ , $F_2 = (h - \sqrt{a^2 + b^2}, k)$ |
| Ecuaciones de asíntotas:   | $y - k = \frac{b}{a}(x - h)$ $y - k = -\frac{b}{a}(x - h)$            |
| Excentricidad:             | $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$                                      |
| Ecuaciones de directrices: | $x - h = \frac{a}{e}$ $x - h = -\frac{a}{e}$                          |

La ecuación

$$\frac{(y-k)^2}{b^2} - \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

tiene también como representación gráfica una hipérbola pero en este caso el eje que contiene los vértices y focos es el eje  $OY$ .

|                            |                                                                       |
|----------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| Vértices:                  | $V_1 = (h, k + b)$ , $V_2 = (h, k - b)$                               |
| Focos:                     | $F_1 = (h, k + \sqrt{a^2 + b^2})$ , $F_2 = (h, k - \sqrt{a^2 + b^2})$ |
| Ecuaciones de asíntotas:   | $y - k = \frac{a}{b}(x - h)$ $y - k = -\frac{a}{b}(x - h)$            |
| Excentricidad:             | $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{b}$                                      |
| Ecuaciones de directrices: | $x - h = \frac{b}{e}$ $x - h = -\frac{b}{e}$                          |

### B.4.5 Ecuaciones Cuadráticas y Cónicas

Una ecuación cuadrática del tipo

$$ax^2 + by^2 + 2gx + 2fy + 2hxy + c = 0 \quad (\text{B.8})$$

con  $a, b, c, h, f, g$  constante (reales), tiene distintas representaciones gráficas, dependiendo de los valores de las constantes.

Si  $a = b = h = 0$  entonces B.8 es una recta

Si  $b = h = 0$  entonces B.8 es una parábola con eje paralelo al eje  $OY$

Si  $a = h = 0$  entonces B.8 es una parábola con eje paralelo al eje  $OX$

Si  $a = b$  y  $h = 0$  entonces B.8 podría ser una circunferencia dependiendo del valor  $c$ .

Si signo de  $a \neq$  signo de  $b$  y  $h = 0$  B.8 sería una hipérbola

Si signo de  $a =$  signo de  $b$  y  $h = 0$  B.8 sería una elipse.

Para tener más información (tales como coordenadas de vértices, focos, centro, ecuaciones de asíntotas y ecuaciones de directrices), es necesario llevar B.8 a una de las expresiones dadas anteriormente  $y = x^2$ ,  $x = y^2$ ,  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ ,  $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$  o simplemente a  $ax + by = c$  que representan a parábola, elipse, circunferencia, hipérbola o simplemente la recta.

El término mixto  $hxy$  en la ecuación cuadrática B.8 indica una rotación de ejes, así que para poder identificar la cónica la ecuación B.8 debe sufrir primeramente un cambio de coordenadas para llevar la ecuación B.8 a una ecuación B.8' donde no aparezca el término mixto cuadrático  $xy$ .

Teniendo una ecuación B.8' es decir,  $h' = 0$ , para saber qué cónica tiene como gráfica basta completar cuadrados.

**Ejemplo 498** *Veamos qué gráfica tiene por ecuación*

$$41x^2 + 34y^2 - 24xy - 25 = 0 \quad (\text{B.9})$$

**Solución:** Como para eliminar el término  $xy$  de la ecuación  $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$  (por supuesto que  $B \neq 0$ ) basta tomar una rotación en un ángulo  $\theta$  tal que

$$\operatorname{ctg}(2\theta) = \frac{A - C}{B}$$

se tiene en este caso que  $\theta$  es tal que

$$\operatorname{sen}\theta = 4/5 \text{ y } \operatorname{cos}\theta = 3/5$$

Así el nuevo sistema  $OUV$  está dado por

$$x = \frac{3}{5}u - \frac{4}{5}v \quad y = \frac{4}{5}u + \frac{3}{5}v$$

que al ser sustituido en la ecuación B.9 nos queda

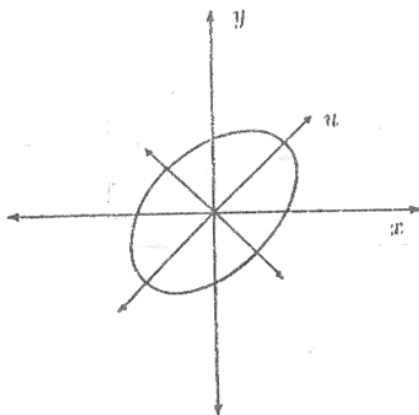
$$u^2 + 2v^2 = 1$$

o equivalentemente

$$\frac{u^2}{1} + \frac{v^2}{(1/\sqrt{2})^2} = 1$$

Así, nuestra ecuación tiene como representación gráfica una elipse con vértice secundaria  $V_3 = (0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ ,  $V_4 = (0, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ , centro  $(0, 0)$  y vértices mayores  $V_1 = (1, 0)$ ,  $V_2 = (-1, 0)$  en los ejes  $u$  y  $v$  (figura)

$$11x^2 + 34y^2 - 24xy - 25 = 0$$



*Elipse rotada*



## Appendix C

# Funciones Reales de Dos Variables

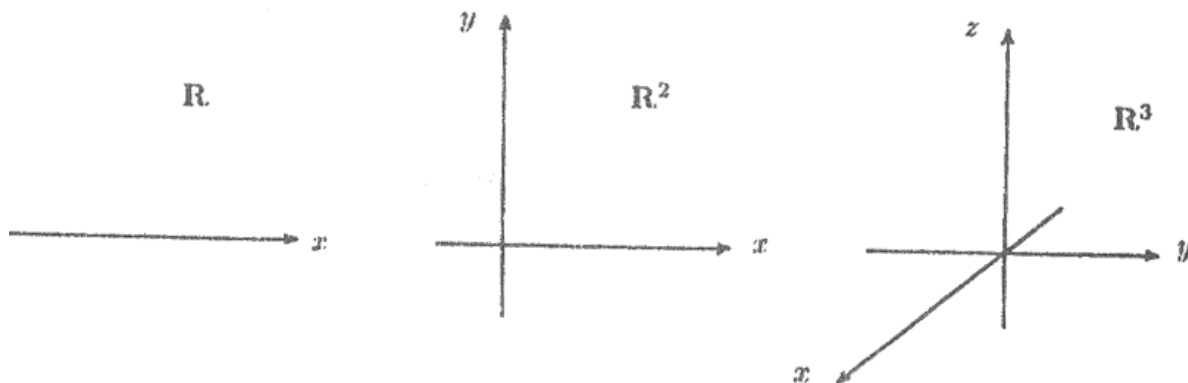
**Definición C.1** Llamaremos *espacio euclidiano  $n$ -dimensional* al conjunto  $\mathbb{R}^n$  de todos los arreglos ordenados ( $n$ -uplas)  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$  de números reales.

Un elemento  $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  se dice que es un punto en  $\mathbb{R}^n$ .

Se tiene que  $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$  si y sólo si  $x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots n\}$$

Los espacios  $\mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$  se identifican en forma natural con la recta, el plano y el espacio respectivamente (ver figura que sigue).



**Definición C.2** Una función real de dos variables con dominio  $A$ ,  $f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$  es una correspondencia tal que para cada par  $(x, y)$  en  $A \subset \mathbb{R}^2$  existe un único elemento  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $z = f(x, y)$ .

**Notación:** En forma análoga, se define función real de  $n$ -variables

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

con  $A \subset \mathbb{R}^n$

**Observación:**

1. Notemos que una función real tiene como conjunto de llegada el conjunto (o un subconjunto) de los números reales  $\mathbb{R}$ . Diremos que una función es una función compleja si el conjunto de llegada es el conjunto de los números complejos  $\mathbb{C}$  o un subconjunto de él, y a una función la llamaremos función vectorial si el conjunto de llegada es el espacio  $\mathbb{R}^m$ , con  $m > 1$ .

2. El dominio  $A$  de una función real de dos variables

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$ , es decir, es un subconjunto del plano. Por otra parte la gráfica de la función  $f$  que se define como

$$\begin{aligned} \text{Graff} &= \{(u, f(u)) : u \in A \subset \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(x, y, f(x, y)) : (x, y) \in A \subset \mathbb{R}^2\} \end{aligned}$$

es un subconjunto de  $\mathbb{R}^3$

Así, la gráfica de  $f$  está en el espacio tridimensional y se denomina **Superficie**, a diferencia de una función real de una variable cuya gráfica está en  $\mathbb{R}^2$  y se denomina **curva** en el plano.

3. Al igual que para funciones reales de una variable, si  $z = f(x, y)$  representa una función real de dos variables, entonces subentendemos que el dominio de  $f$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  para el cual la expresión  $f(x, y)$  pertenece a  $\mathbb{R}$ .

**Ejemplo 499** Determinemos y grafiquemos el dominio de la siguiente función real

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

$f$  será función si la expresión  $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$  está definida en  $\mathbb{R}$ ; luego  $1 - x^2 - y^2 \geq 0$  de donde

$$\text{Dom} f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

cuya representación gráfica es el círculo unitario (figura ♡)

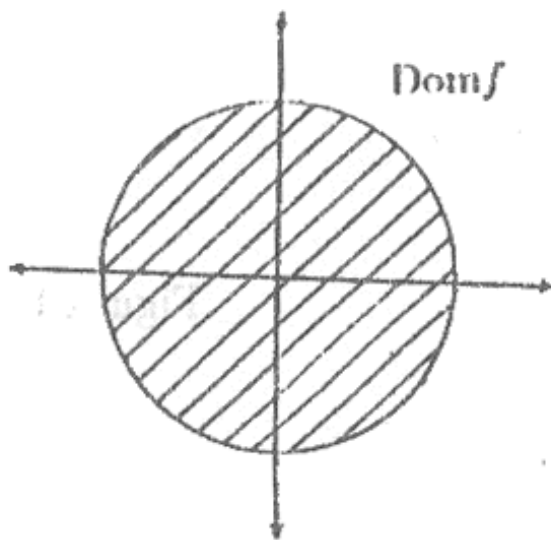


Figura ♡

Es importante hacer notar que las imágenes de esta función pertenecen al conjunto llamado **Recorrido** de  $f$ , el cual es un subconjunto de  $\mathbb{R}$

El recorrido está formado por los valores reales que toma  $z = f(x, y)$  con  $(x, y) \in \text{Dom}f$ , es decir,

$$\text{Rec}f = \{f(x, y) \in \mathbb{R} : (x, y) \in \text{Dom}f\}$$

Así por ejemplo; si  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  entonces  $z$  toma valores reales no negativos, es decir,  $z \geq 0$ . Además, elevando al cuadrado tenemos

$$z^2 = 1 - x^2 - y^2$$

que es equivalente a

$$x^2 + y^2 = 1 - z^2$$

pero  $x^2 + y^2 \geq 0$ , luego  $1 - z^2 \geq 0$  y  $z \geq 0$ .

Por lo tanto

$$0 \leq z \leq 1$$

Así,

$$\text{Rec}f = \{f(x, y) : (x, y) \in \text{Dom}f\} = [0, 1]$$

No siempre es fácil determinar el recorrido de una función de dos o más variables y en la mayoría de los casos, después de haber graficado la función en  $\mathbb{R}^3$ , se observa para qué valores de  $z$  existen preimagen(es) (esto es proyectando la gráfica de  $f$  sobre el eje  $z$ ).

**Ejercicio 500** Determinar y graficar los dominios de las siguientes funciones reales de dos variables.

$$\begin{array}{ll} 1) \quad f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & 5) \quad k(x, y) = \sqrt{xy} \\ 2) \quad g(x, y) = \frac{xy}{x^2 - y^2} & 6) \quad l(x, y) = \ln(4 - |x + y|) \\ 3) \quad h(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} & 7) \quad p(x, y) = \sqrt{|x| - |y|} \\ 4) \quad j(x, y) = \sqrt{4x^2 + y^2 - 16} & 8) \quad q(x, y) = \frac{\sqrt{(1+4x)(1+6y)} - 1}{2x+3y} \end{array}$$

**Solución:**

$$1. \quad \text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

$$2. \quad \text{Dom}g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 \neq 0\}$$

$$3. \quad \text{Dom}h = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq 4 - x^2\}$$

$$4. \quad \text{Dom}j = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \geq 1\}$$

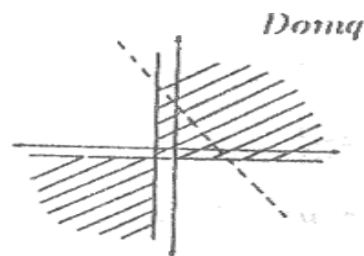
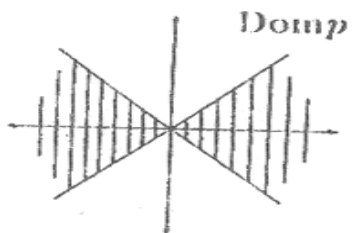
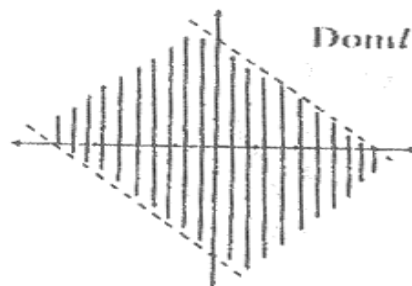
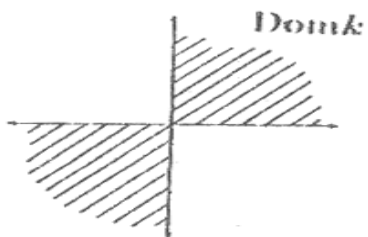
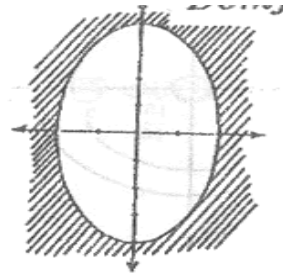
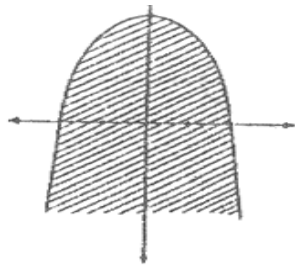
$$\begin{aligned} 5. \quad \text{Dom}k &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\} \\ &= ([0, \infty[ \times [0, \infty[) \cup (]-\infty, 0] \times ]-\infty, 0]) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. \quad \text{Dom}l &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x + y| < 4\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -4 < x + y < 4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 7. \quad \text{Dom}p &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| > |y|\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -|x| < y < |x|\} \end{aligned}$$

$$8. \quad \text{Dom}q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (1 + 4x)(1 + 6y) \geq 0 \wedge 2x + 3y \neq 0\}$$

(Ver las gráficas correspondientes de las 6 últimas en las figuras que siguen).





**Ejercicio 501** Considere la función

$$\begin{aligned} f: A \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ (x, y) &\longrightarrow f(x, y) = \frac{xy-1}{|x-1|} \end{aligned}$$

Grafique  $\text{Dom}f$ .

**Solución:** La expresión  $\frac{xy-1}{|x-1|}$  estará definida en  $\mathbb{R}$  si  $x-1 \neq 0$ , además  $f(x, y) \in \mathbb{R}^+$  si  $\frac{xy-1}{|x-1|} \geq 0$ , pero  $|x-1| \geq 0$ , luego  $xy-1 \geq 0$  de donde

$$\text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy - 1 \geq 0 \wedge x \neq 1\}$$

cuya gráfica está al lado izquierdo de figura  $\diamond\diamond\diamond$ ;

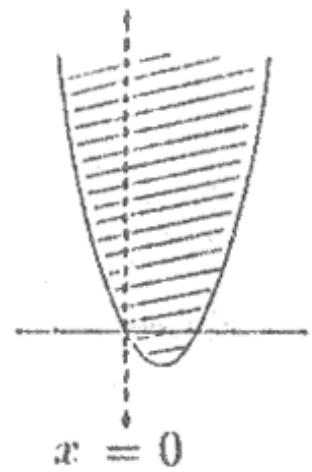
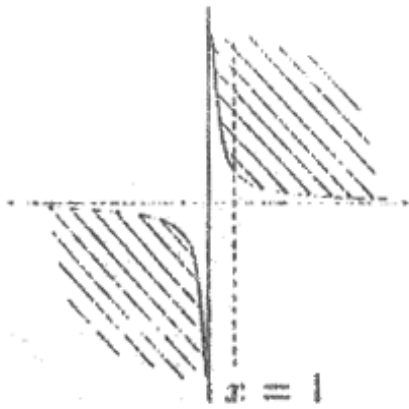


Figura  $\diamond\diamond\diamond$

**Ejercicio 502** Considere

$$\begin{aligned} g: A \subset \mathbb{R}^2 &\longrightarrow [1, \infty[ \\ (x, y) &\longrightarrow \frac{2x+y}{x^2} \end{aligned}$$

Grafique  $\text{Dom}g$

**Solución:**  $\text{Dom}g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq 0 \wedge \frac{2x+y}{x^2} \in [1, \infty[ \}$

$$\begin{aligned} \frac{2x+y}{x^2} \in [1, \infty[ &\iff \frac{2x+y}{x^2} \geq 1 \\ &\iff 2x+y \geq x^2 \\ &\iff x^2 - 2x \leq y \\ &\iff (x-1)^2 \leq y+1 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\text{Dom}g = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 \leq y+1 \wedge x \neq 0\}$$

cuya gráfica está al lado derecho de figura  $\diamond\diamond\diamond$

## C.1 Gráfica de funciones reales de dos variables

Intentemos ahora graficar la superficie

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

Sea  $z$  una constante, es decir fijemos  $z$ , y veamos qué preimagen o preimágenes le corresponde. Es decir, sea  $z$  tal que  $c = z$ , donde  $c$  una constante real, luego,

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{con } c \geq 0 \\ \Rightarrow x^2 + y^2 &= 1 - c^2; \quad 1 - c^2 \geq 0 \end{aligned}$$

entonces si  $c$  es una constante (tal que  $1 - c^2 \geq 0$  y  $c \geq 0$ ), la ecuación

$$x^2 + y^2 = 1 - c^2$$

representa una circunferencia con centro en el origen y radio  $\sqrt{1 - c^2}$  (figura ??-a).

Por ejemplo si  $c = 0$  se tiene la circunferencia de radio 1

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

Si  $c = 1/4$  se tiene la circunferencia de radio  $\frac{\sqrt{15}}{4}$

$$\Gamma_{1/4} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{15}{16}\}$$

Si  $c = 1/2$  se tiene la circunferencia de radio  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\Gamma_{1/2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \frac{3}{4}\}$$

Si  $c = 1$  se tiene el punto

$$\Gamma_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0)\}$$

En general para cada  $c \in [0, 1]$  se tiene la circunferencia de radio  $\sqrt{1 - c^2}$

$$\Gamma_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = (\sqrt{1 - c^2})^2\}$$

Estas circunferencias se denominan **Curvas de nivel** para indicar que al “nivel”  $c$  (en el eje  $z$ ) se encuentra la circunferencia  $\Gamma_c$  (figura ▲▲ izquierda).

Si  $z \in \text{Rec}f = [0, 1]$  entonces las preimágenes de  $z$  son los  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  que pertenecen a la circunferencia  $x^2 + y^2 = 1 - c^2$  donde  $z = c$

Los puntos de la superficie que representan la gráfica de  $z = f(x, y)$  son de la forma

$$(x, y, f(x, y)) \quad \text{con } (x, y) \in \text{Dom}f$$

es decir,

$$(x, y, c) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tal que } x^2 + y^2 = 1 - c^2 \quad \text{con } c \in [0, 1]$$

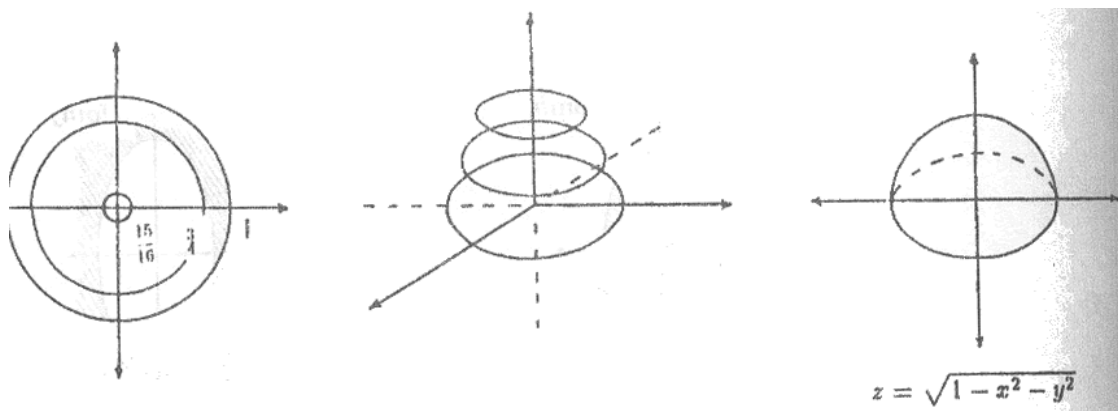


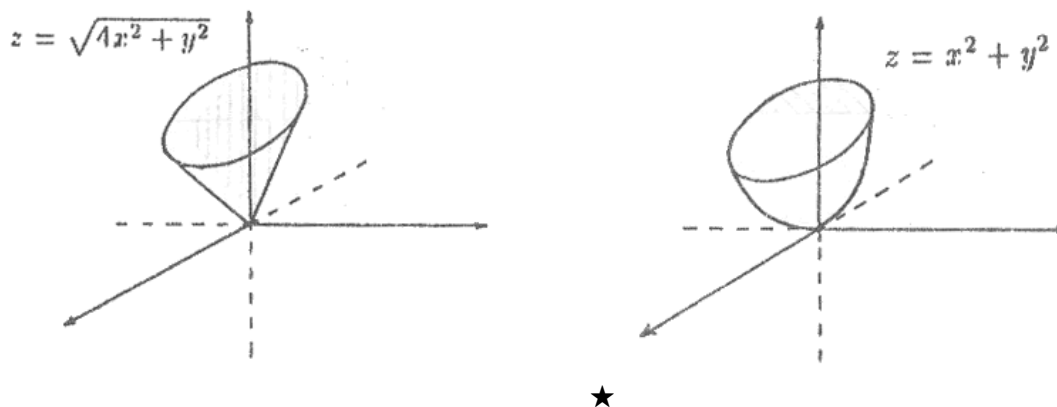
figura ▲▲

En la mayoría de los casos, para graficar la superficie nos basta dibujar algunos subconjuntos de  $\text{Graf} f$ .

En el ejemplo anterior nos basta graficar las curvas de nivel (figura ▲▲ centro) al nivel  $c$ , para obtener la grafica de  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  (figura ▲▲-derecha).

Observar que la gráfica de  $f$ , es decir la superficie que representa a  $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  es la mitad de la esfera unitaria con centro en el origen.

Análogamente, podemos obtener las gráficas de las superficies:  $z = \sqrt{4x^2 + y^2}$  llamada cono elíptico y  $z = x^2 + y^2$  llamado paraboloide (figura ★)



## C.2 Álgebra de funciones

Al igual que funciones reales de una variable, se define el álgebra de funciones de dos variables (o más variables)

Si  $f$  y  $g$  son funciones reales de dos variables tal que  $D = \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \neq \emptyset$ , entonces existen funciones  $f + g$ ,  $f - g$ ,  $f \cdot g$  con dominio  $D$  y la función  $f/g$  con dominio  $\{(x, y) \in D : g(x, y) \neq 0\}$  donde

$$1) (f + g)(x, y) = f(x, y) + g(x, y)$$

$$2) (f - g)(x, y) = f(x, y) - g(x, y)$$

$$3) (f \cdot g)(x, y) = f(x, y) \cdot g(x, y)$$

$$4) (f/g)(x, y) = \frac{f(x, y)}{g(x, y)}$$

**Ejemplo 503** Si  $f(x, y) = \ln(x + y)$  y  $g(x, y) = \sqrt{x}$  son funciones entonces

$$\text{Dom} f = \{(x, y) : x + y > 0\},$$

$$\text{Dom} g = \{(x, y) : x \geq 0\}$$

luego  $D = \text{Dom} f \cap \text{Dom} g \neq \emptyset$ , por lo tanto existe la función  $f + g$  definida en  $D$

$$(f + g)(x, y) = \ln(x + y) + \sqrt{x}$$

**Observación:** Muchos de los conceptos definidos para funciones de una variable (como por ejemplo los utilizados en el álgebra de funciones), también se definen para funciones de dos o más variables, pero no es posible generalizar todos ellos a este tipo de funciones. Uno de estos es el concepto de función creciente y decreciente, el que no se puede definir para función de dos variables, ya que  $\mathbb{R}^2$  no es un conjunto ordenado (no tiene significado, por ejemplo, la siguiente expresión  $(x, y) < (x', y')$ )<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Es decir, no hay un significado que sea compatible con las operaciones de  $\mathbb{R}^2$ .

Por otra parte, para funciones reales  $f$  y  $g$  de dos variables no podemos definir la composición  $g \circ f$  pues  $\text{Rec}g \cap \text{Dom}f = \emptyset$ . Sin embargo, si consideramos las funciones

$$f : A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{y} \quad g : B \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

entonces tiene sentido definir la composición  $g \circ f$  si  $\text{Rec}f \cap \text{Dom}g \neq \emptyset$ , donde

$$\text{Dom}g \circ f = \{(x, y) \in \text{Dom}f : f(x, y) \in \text{Dom}g\} \quad \text{y} \quad (g \circ f)(x, y) = g(f(x, y))$$

Note que si para todo  $(x, y) \in \text{Dom}f$ ,  $\text{Rec}f \subset \text{Dom}g$  entonces  $\text{Dom}g \circ f = \text{Dom}f$ .

**Ejemplo 504** Sea

$$\begin{array}{ccc} f : & A \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & \sqrt{xy} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & x^2 \end{array}$$

entonces

$$A = \text{Dom}f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 0\}$$

y

$$\text{Rec}f = \mathbb{R}^+ \subset \text{Dom}g = \mathbb{R}$$

luego  $\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}f$  y

$$(g \circ f)(x, y) = g(f(x, y)) = g(\sqrt{xy}) = xy \text{ en } A$$

Análogamente:

**Ejemplo 505** Sea

$$\begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \longrightarrow & (x - a)^2 + (y - b)^2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} f : & \mathbb{R}_0^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \sqrt{x} \end{array}$$

entonces

$$(f \circ g)(x, y) = f((x - a)^2 + (y - b)^2) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} \text{ con } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Sea  $S = f \circ g$ , donde  $\text{Dom}S = \text{Dom}f \circ g = \text{Dom}g = \mathbb{R}^2$

Notemos que la función

$$S(x, y) = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

representa la distancia de un punto cualquiera  $(x, y)$  en el plano a un punto dado  $(a, b)$ .

## Appendix D

# Problemas Misceláneos Parte I

I. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

1.  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$
2.  $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{4x^2} = \pm 2|x|)$
3.  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = 16 \iff x = 4 \vee x = -4)$
4.  $(\forall x)(\forall y)(x, y \in \mathbb{R}^+)(\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x})$
5. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$  entonces  $\frac{a}{b} < 1$
6.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|}{|1-x|} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| > |1-x|\}$
7.  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (x < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{x})$
8.  $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(\forall b \in \mathbb{R})(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \leq 1)$
9.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)(\forall c \in \mathbb{R}^+)(a \leq b \Rightarrow a \leq bc)$
10.  $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (\frac{|x|}{x^2+y^2} \leq |x|)$
11.  $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (3|x| \leq |y| \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2})$
12.  $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (x^2 \leq y^2 \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} \leq 1)$
13.  $\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{\frac{x}{1-x}} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \leq \sqrt{1-x}\}$
14. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$  entonces  $1 < \frac{b}{a}$
15.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|}{|2-x|} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| > |2-x|\}$
16.  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (x - 7 < 0 \Rightarrow \frac{1}{7} > \frac{1}{x})$
17.  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\})(\forall y \in \mathbb{R})(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \geq 1)$
18. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x}{\sqrt{-x-x}} < 0$$

es vacío

19.  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x^2 \leq x^4)$
20.  $\sup\{x \in \mathbb{R} / x^4 + 3x^2 - 4 = 0\} = \sqrt{2}$
21. El ínfimo de  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x+5}{x} > 1\}$  es -5
22. El supremo del conjunto  $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$  es 0.

23. Si  $\log_x(5) < 1$  entonces se tiene que  $5 < x$ .

24. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\log_5 x}{\log_5(1/3)} \leq 1 \text{ es } [3, \infty[$$

25.  $2 \log 2 + (1 + \frac{1}{2x}) \log 3 - \log(\sqrt[3]{3} + 27) = 0$ , la ecuación anterior no tiene solución positiva

26. Si  $\log_a b = 3$  y  $\log_a c = 2$  entonces  $\log_c b^2 = 3$  y  $bc = a^5$

27.  $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\log_2(x)} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 > \log_2(x)\}$

28. Para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  se tiene  $\log_b(a^2) \leq \log_b(a^3)$ .

29.  $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + x^2 - 6 = 0\} = \sqrt{2}$

30.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\log(a) < \log(a^2))$

31. La inecuación

$$\log_{1/2}(ax^2 + 1) < \log_{1/2}(a)$$

tiene como conjunto solución todos los reales si y sólo si  $a \in ]0, 1[$

32.  $(\forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}) (\log_b(x) \leq 1 \Rightarrow x \leq b)$

33. Si  $f$  es inyectiva entonces  $f$  es creciente o bien decreciente

34. Sea  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x+1}$ , entonces el  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$

35.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\log(a) < \log(a^3))$

36.  $(\forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}) (\log_b(\frac{1}{x}) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq xb)$

37. Si  $f$  es biyectiva entonces  $f$  es creciente o bien decreciente

38. Sea  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$ , entonces el  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$

39. El valor mínimo de la función  $f(x) = x(x-3)$  es  $-9/4$

40. Sea  $f: D \longrightarrow [3, \infty[$   
 $x \longmapsto e^{-x} - 1$

entonces el dominio máximo de  $f$  es  $[-\ln(4), \infty[$

41. Sean  $f(x) = \sqrt{2-x}$ ;  $g(x) = \ln(x^2 + 9)$  funciones entonces el dominio máximo de la función  $g \circ f$  es  $] -\infty, 11[$ .

42. Si  $f$  es una función inyectiva entonces  $f$  es estrictamente decreciente

43. La solución de la inecuación  $\log_x(x + 1/2) < 1$  es vacío.

44. Si  $f(x) = \ln(x+4)$  y  $g(x) = e^x + 3$  son funciones entonces  $(g \circ f)(x) = x + 7$  y su dominio es  $\mathbb{R}$

## II. Completación:

1. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\sqrt{x-2}}{|x-2| - |1-x|} \leq 0 \text{ es.....}$$

2. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\sqrt{x-2}}{|3-x| - |x-2|} \leq 0 \text{ es .....}$$

3. La inecuación

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x+2-x^2} \leq 9^{ax^2-2x}$$

tiene como solución a los  $\mathbb{R}$  si  $a \in \dots\dots\dots$

4. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 - 2x + 1}} \leq |x - 1| \quad \text{es.....}$$

5. La inecuación

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x+2+x^2} \leq 9^{ax^2-2x}$$

tiene como solución a los  $\mathbb{R}$  si  $a \in \dots\dots\dots$

6. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{-|x-1|^3(-|x-2|)^{-5}}{|x^2+2|} > 0 \quad \text{es } \dots\dots\dots$$

7. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(x^2+7x+10)(x^2-3x+4)}{|x+3|} < 0 \quad \text{es } \dots\dots\dots$$

8. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2-6x+9}} \geq \frac{3}{4} \quad \text{es } \dots\dots\dots$$

9. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2+4x+4}} \geq 1 \quad \text{es } \dots\dots\dots$$

10. Sean  $a \in \mathbb{R}$   $\delta \in \mathbb{R}^+$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x-a| < \delta\}$  es el intervalo .....

11. Si  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $y \in \dots\dots\dots$   $z \in \mathbb{R}^-$  entonces se verifica

$$\frac{z}{xy} \leq \frac{z}{x}$$

12. La proposición

$$(\alpha+1)x^2-4x+(\alpha-1) > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

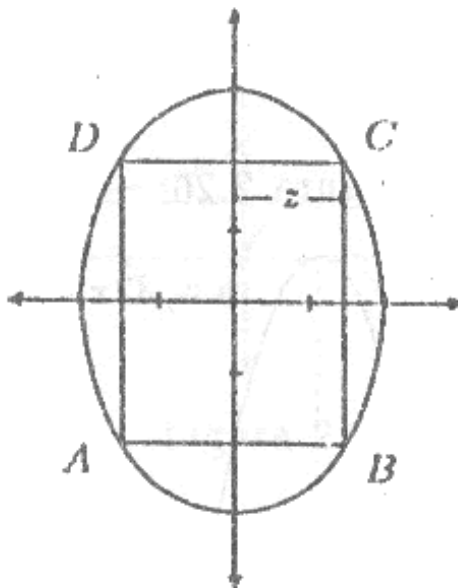
es verdadera si y sólo si  $\alpha \in \dots\dots\dots$

13. La parábola  $x^2-2x-ay-2a+y=-3$ , con centro en  $(1, -2)$  se abre hacia arriba ssi  $a \in \dots\dots\dots$

14. La ecuación de la recta que pasa por el centro de la elipse  $2x^2-4x+3y^2+6y=-4$  y es paralela a la recta  $2x+3y=1$  es .....

15. La relación  $x^2-y^2-4x+2y+4=0$  representa la cónica ..... con centro en .....

16. Sea ABCD el rectángulo con lados paralelos a los ejes inscritos en la elipse  $16x^2+4y^2=64$ . Entonces la función que representa el área del rectángulo en función de  $z$  es: .....



17. La relación  $x^2 - y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$  representa la cónica ..... con centro en.....
18. El dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 6) - 1}$  es .....
19. El dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 1) - 1}$  es .....
20. Sea  $f: D \rightarrow [e^{-2}, e^1]; f(x) = (\frac{1}{27e})^{3x-1}$  entonces el dominio máximo de  $f$  es .....
21. Sea  $f(x) = \log(-x)$  y  $g(x) = x^2 + bx - b$  funciones, entonces el conjunto de todos los  $b \in \mathbb{R}$  tal que el dominio de  $f \circ g$  es vacío es .....
22. Sea  $f(x) = \log((x-3)^2)$  y  $g(x) = \sqrt{4-x}$ , entonces el dominio máximo de  $g \circ f$  es .....
23. El dominio de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x^2}$$

es .....

24. La relación  $y^2 = 2 - x$  define una función biyectiva en .....
25. Sea  $f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ \sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$  entonces  $g \circ f(x)$  es .....
26. Dada las funciones  $f$  y  $g$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 1 \leq x \leq 5 \\ -x+7 & x > 5 \end{cases}$$

- (a) El Recorrido de  $f$  es .....
- (b) El Dominio de  $g \circ f$  es .....
- (c)  $(g \circ f)(x) = \begin{cases}$
27. Dos tuberías tardan 6 horas en llenar una piscina. Una sola la llenaría 5 horas más de prisa que la otra. Entonces cada tubería tardaría individualmente en llenar la piscina ..... y ..... respectivamente
28. Sea  $f: ]0, \infty[ \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{1}{x-1} + 3$   
 entonces el recorrido es .....



29. Sea  $f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$   

$$x \longmapsto \frac{x+1}{1-x}$$
una función biyectiva entonces  $f^{-1}(x)$  es igual a .....
30. La función que representa el volumen (en función de  $h$ ) del cilindro circular recto inscrito en un cono de  $20\text{cm}$  de altura y  $5\text{cm}$  de radio, como en la figura, es  $f(h) = \dots\dots\dots$  y su dominio es .....
31. El dominio de la función  $f(x, y) = \frac{\ln(1-x-y)}{x+y}$  es el conjunto .....

## D.1 Respuestas a los Ejercicios Propuestos

### Soluciones de la sección 1.5.1

1. (a) Falso.  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$  (b) Verdadero.  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$   
(c) Falso.  $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right)$  (d) Falso.  $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$   
(e) Falso.  $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$  (f) Falso.  $\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$

### Soluciones de la sección 1.5.2

- 9 personas.
- El precio del primer y del segundo volumen es de \$ 3.000 .
- 3 metros y 6 metros, respectivamente.
- El primer saco tiene 80 kilogramos y el segundo 60 kilogramos.
- El pedido se completará en 27 días.
- 17 kilogramos de cobre y 7 kilogramos de zinc.
- El número buscado es 64.
- El número buscado es 24.
- La velocidad del primer tren es de 50 km/h y la del segundo 40 km/h.
- 21 km.
- La velocidad del ciclista es de 12 km/h y la del coche 30 km/h.
- 9 horas después de la salida del tren rápido.
- La velocidad del primer ciclista es de 14 km/h, y la del segundo 18 km/h; el primero está a 3 horas del encuentro en la carretera, el segundo, 2 horas.
- $\frac{9}{4}$  litros por minuto; 3 litros por minuto.
- El primer trabajador tardará 14 días, el segundo 11 días en realizar individualmente el trabajo.
- La primera máquina perfora 2 metros de túnel por día, y la segunda  $\frac{3}{2}$  metros por día.
- La primera cuadrilla puede realizar la reparación completa en 10 días, y la segunda en 15 días.
- El primer obrero puede hacer él solo el trabajo en 12 horas; el segundo, en 24 horas.
- La primera tubería llena la piscina en 10 horas; la segunda, en 15 horas.

20. La rueda mayor da 200 rpm y la menor 600 rpm.
21. El primer motor consume 60 gramos de combustible por hora; el segundo, 48 gramos de combustible por hora.
22. La grúa de mayor potencia demora 24 horas en realizar sola el trabajo completo, mientras que la de menor potencia demora 36 horas.
23. La altura es  $h \approx 35,56\text{cm}$  su radio  $r \approx 19,19\text{cm}$  y el volumen es  $V \approx 13.71$  litros.

### Soluciones de la sección 1.5.3

1.  $P_1(x, y) = (2, 0)$   $P_2(x, y) = (0, 2)$
2.  $P_1(x, y, z) = (2, 2, -2)$
3.  $P_1(x, y) = (3, 1)$   $P_2(x, y) = (1, 3)$
4.  $P_1(x, y) = (4, 3)$   $P_2(x, y) = (-4, -3)$
5.  $P_1(x, y, \lambda) = (0, -1, 1)$   $P_2(x, y, \lambda) = (-\frac{3}{4}, -\frac{7}{16}, \frac{1}{4})$
6.  $P_1(x, y, \lambda) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, \frac{1}{4})$   $P_2(x, y, \lambda) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, -\frac{1}{4})$   
 $P_3(x, y, \lambda) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}, -\frac{1}{4})$   $P_4(x, y, \lambda) = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}, \frac{1}{4})$
7.  $P = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{9})$
8.  $P = (4, 4, 4, -1)$
9.  $S = \{(\sqrt{3}, \sqrt{3}, \lambda), (-\sqrt{3}, -\sqrt{3}, \lambda) : \lambda \in \mathbb{R}\}$
10.  $P_1(x, y, z, \lambda) = (\frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 1)$   $P_2(x, y, z, \lambda) = (\frac{3}{2}, 2, -\frac{5}{2}, 1)$
11.  $P_1(x, y, z, \lambda) = (1, -1, 0, -2)$   $P_2(x, y, z, \lambda) = (-1, 1, 0, -2)$   
 $P_3(x, y, z, \lambda) = (0, 0, 1, -1)$   $P_4(x, y, z, \lambda) = (0, 0, -1, -1)$
12.  $P_1(x, y, z, \lambda) = (\sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}, \sqrt{5/3}, \sqrt{5/12})$   
 $P_2(x, y, z, \lambda) = (-\sqrt{5/3}, -\sqrt{5/3}, -\sqrt{5/3}, -\sqrt{5/12})$

### Soluciones de la sección 1.5.4

Lo indicado entre paréntesis () es sólo una ayuda para una correcta justificación

1. (a) Falso. ( $x = -1, y = 2$ ); (b) Falso. ( $x = -2, y = -1$ )  
(c) Falso. ( $x = 1/3, y = 1/2$ ); (d) Falso. ( $x = 1/8$ )  
(e) Verdadero. (f) Falso. ( $x = 1$ );  
(g) Verdadero. (h) Falso. ( $x = -1, y = 0$ );  
(i) Falso. ( $S = \{3\}$ ); (j) Falso. ( $S = ]-\infty, 0] \cup [2, \infty[$ )  
(k) Falso. ( $\mathbb{R} \neq \mathbb{R} - \{2\}$ ); (l) Verdadero.
2. (a) Verdadero. (b) Verdadero. (c) Verdadero.  
(d) Falso. (e) Verdadero. (f) Verdadero.  
(g) Falso. (h) Verdadero. (i) Falso.  
(j) Falso.
3. (a)  $[-1, 0] \cup [1, \infty[$ . (b)  $[0, 1]$ . (c)  $[0, 1]$ . (d)  $(x \in [1, \infty[ \wedge y \in \mathbb{R}) \vee (x = 0 \wedge y \in \mathbb{R} - \{0\})$ . (f)  $]1, \infty[$ .

4. (a)  $S = ] - 1/3, \infty[$ . (b)  $S = ]2, 9[$ . (c)  $S = ]0, 1[$ . (d)  $S = ] - \infty, 0[ \cup ]1/7, \infty[$ .  
 (e)  $S = ]1/2, \frac{7-\sqrt{13}}{6}[ \cup ]1, \frac{7+\sqrt{13}}{6}[$ . (f)  $S = ] - \infty, -\sqrt{12}[ \cup ] - \sqrt{5}, 0[ \cup ]\sqrt{5}, 4 - \sqrt{11}[ \cup ]12, 4 + \sqrt{11}[$ . (g)  $S = [0, 1[$ . (h)  $S = [0, 1[$ . (i)  $S = \phi$ . (j)  $S = ] - \infty, -2[$ . (k)  $S = [6, \infty[$ . (l)  $S = \phi$ . (m)  $S = ] - \infty, 6/13[ - \{0\}$ . (n)  $S = [\frac{1-\sqrt{73}}{2}, -2] \cup [1, 3]$ . (o)  $S = [2, 324]$ . (p)  $S = \phi$ . (q)  $S = \{1\}$ . (r)  $S = \phi$ . (s)  $S = \{2\}$ .
5. (a)  $S = \phi$ . (b)  $S = \{1\}$ . (c)  $S = \{1 - \sqrt{3}, \sqrt{2}\}$ . (d)  $S = \mathbb{R}$ .  
 (e)  $S = ] - \infty, -3/2[ \cup ]1/4, \infty[$ . (f)  $S = \mathbb{R} - ]1/4, 3[$ . (g)  $S = ] - \infty, 2[$ . (h)  $S = ] - \infty, -2[ \cup [0, 3.5[$ .  
 (i)  $S = \mathbb{R} - \{0\}$ . (j)  $S = ] - 7, \infty[$ . (k)  $S = [1/3, 3]$ .  
 (l)  $S = ]0, 1]$ . (m)  $S = ] - 7, 2[$ . (n)  $S = [-\sqrt{5}, \sqrt{5}] \cup \{12\}$ .  
 (o)  $S = [-3, 7]$ . (p)  $S = [1, 2]$ . (q)  $S = \mathbb{R}$ . (r)  $S = \{0\}$ .
6. Ayuda: Escribir como ecuación de segundo grado y que el discriminante es una suma de cuadrado  $(p - q)^2$  y  $4a^2$ .
7.  $[\frac{18-\sqrt{84}}{10}, 1[$
8. (a)  $m = 7$ . (b)  $m = 29/7$ . (c)  $]1, 5[$ . (d)  $m = 11 \pm 3\sqrt{11}$ . (e)  $]5, \infty[$ .
9.  $k = \pm\sqrt{45}$ .
10.  $\phi$
11. (a) Supremo:  $\nexists$ , 1,  $\nexists$ , 1,  $\nexists$ . Infimo: -1, 0, -1, 0, -1.  
 (b) Supremo:  $\nexists$ , *exists*,  $\nexists$ ,  $\nexists$ ,  $\nexists$ . Infimo: 1/2,  $\nexists$ , 1/2,  $\nexists$ , 1/2.
12. (a)  $\sup A = -7/3$ . (b)  $\phi$ . (c)  $-7/3$
13. Ayuda: demuestre que  $x + \sup A$  es cota superior de  $x + A$  y así también que  $\sup(x + A) - x$  es cota superior de  $A$ .
14.  $\mathbb{N}$  no es acotado y  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ .
15. Ayuda: (i) Considere  $\frac{2n}{n+3} \leq \frac{2n}{n} = 2$  luego 2 es cota superior. (ii)  $(\forall \epsilon > 0)(\exists N \in \mathbb{N})$  tal que  $\frac{6}{n+3} < \epsilon$  (Prop. Arquimediana).
16. Ayuda: (i)  $x_n \geq 0$ ,  $\forall n$  luego 0 es cota inferior. (ii) Por Arquímedes  $\exists N$  tal que  $\frac{1}{N} < \epsilon$  con  $\frac{1}{N} > \frac{2}{3n+1}$ .
17. Ayuda:  $\frac{2n^2+3}{-1+2n} \geq \frac{2n^2}{-1+2n} \geq n$  y como  $\mathbb{N}$  no es acotado entonces  $A$  tampoco lo es.

### Soluciones de la sección 2.7.1

1. a)  $[1, \infty[; [0, 1/2]$  b)  $\mathbb{R} - \{1\}; \mathbb{R} - \{4\}$   
 c)  $[-2, -4/3]; [0, 1/\sqrt{3}]$  d)  $[-1, \infty[; [\sqrt{2}, \infty[$   
 e)  $[-1/2, 3/2]; [0, \sqrt{2}]$  f)  $] - \infty, -2[ \cup [0, \infty[; \mathbb{R}_o^+$   
 g)  $[1, \infty[; [0, 1[$  h)  $\mathbb{R} - \{3\}; \mathbb{R} - \{1\}$
2. a)  $] - 8, 0[$  b)  $[1, 2[$  c)  $[16, 64[$   
 d)  $[9, 2601[$  e) No existe f)  $] - \infty, -3[ \cup ] - 2, 2[ \cup ]5, \infty[$
3. a)  $[2, \infty[$  b)  $]0, 1/3[$  c)  $] - 1, \infty[$   
 d)  $[1, \infty[$  e)  $[0, \infty[$

**Soluciones de la sección 2.7.3.**

1.  $A(x) = \frac{2x(L-4x)}{3}$

2.  $A(x) = (x - \frac{1}{2})(\frac{18}{x} - \frac{2}{3})$

3.  $t(x) = \frac{\sqrt{x^2+16}}{18} + \frac{10-x}{30}$

4.  $C(x) = 3 \cdot 10^4(4-x) + 5 \cdot 10^4\sqrt{9+x^2}$

5.  $y = \begin{cases} 2.50x & 0 \leq x \leq 20 \\ 2.00x & 20 < x \leq 50 \\ 1.75x & 50 < x \leq 100 \\ 1.50x & 100 < x \end{cases}$

6.  $y = [\frac{x}{12}] + 0.10(x - 12[\frac{x}{12}])$

7.  $B(x) = (200 + 20x)(8000 - 500x) - 2000(200 + 20x)$

8.  $U(x) = (1200 + 100x)(24 - x)$

9.  $V(x) = x(16 - 2x)(21 - 2x)$

10.  $V(x) = \frac{Mx}{4} - \frac{x^3}{4}, \quad x \in ]0, \sqrt{M}[$

11.  $A(x) = \begin{cases} 4a^2 + 8ax & 0 \leq x < 4a \\ 39a^2 & x = 4a \\ 23a^2 + 4ax & 4a < x < 7a \\ 52a^2 & x = 7a \end{cases}$

12.  $V(r) = \pi r^2(12 - 3r), \quad r \in ]0, 4[.$

13.  $P(x) = (8 + x)(200 - 10x), \quad x \in [0, 20] \cap \mathbb{Z}$

14.  $I(x) = (250 + x)(8 - 0.01x), \quad x \in [0, 450].$

15.  $\text{Min } C = 3x + 4y$

$$\begin{array}{rcl} \text{S.A.} & 2x + 3y & \geq 36 \\ & 2x + 2y & \geq 28 \\ & 8x + 2y & \geq 32 \\ & 0 \leq x, & 0 \leq y \end{array}$$

16.  $\text{Max } z = 30x + 20y$

$$\begin{array}{rcl} \text{S.A.} & 6x + 3y & \leq 54 \\ & 4x + 6y & \leq 48 \\ & 5x + 5y & \leq 50 \\ & 0 \leq x, & 0 \leq y \end{array}$$

17.  $\text{Max } z = 3000x + 2000y$

$$\begin{array}{rcl} \text{S.A.} & x + 2y & \leq 6 \\ & 2x + y & \leq 8 \\ & -x + y & \leq 1 \\ & y & \leq 2 \\ & 0 \leq x, & 0 \leq y \end{array}$$

18. a)  $\text{Max } z = 200C + 100M$

$$\begin{array}{rcll} \text{S.A.} & C + 2M & \leq & 100 \\ & 2C + 1.5M & \leq & 121 \\ & C & \leq & 50 \\ & M & \leq & 45 \\ & 0 \leq C, & 0 \leq & M \end{array}$$

El óptimo  $C=50$ ,  $M=14$ ; contribución máxima 11.400.-

b)  $\text{Max } z = 200C + 100M$

$$\begin{array}{rcll} \text{S.A.} & C + 2M & \leq & 100 \\ & 2C + 1.5M & \leq & 130 \\ & C & \leq & 50 \\ & M & \leq & 45 \\ & 0 \leq C, & 0 \leq & M \end{array}$$

El óptimo de este nuevo problema es:  $C=50$ ,  $M=20$ ; contribución máxima 12.000.-

## Soluciones de la sección 2.7.4

1. Todas son biyectivas

$$\begin{array}{ll} 2. \quad a) & A = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[ \quad B = \mathbb{R} - \{-2, 2\} \quad f^{-1}(x) = \frac{x^2}{x^2-4} \\ b) & A = [0, \infty[ - \{1\} \quad B = ]-\infty, 0[ \cup ]1, \infty[ \quad f^{-1}(x) = \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 3. \quad a) & \text{Dom}(g \circ f) = [-3/2, \infty[ \\ & \text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}_0^+ \end{array}$$

$$b) \quad \text{Dom}(g \circ f) = [49/4, \infty[$$

$$\begin{array}{ll} b) & \text{Dom}(g \circ f) = [49/4, \infty[ \\ & \text{Dom}(f \circ g) = [1, \infty[ \end{array}$$

$$c) \quad \text{Dom}(g \circ f) = ]-\infty, -3 - \sqrt{10}] \cup [-3 + \sqrt{10}, \infty[$$

$$\begin{array}{ll} c) & \text{Dom}(g \circ f) = ]-\infty, -3 - \sqrt{10}] \cup [-3 + \sqrt{10}, \infty[ \\ & \text{Dom}(f \circ g) = ]1, \infty[ \end{array}$$

$$d) \quad \text{Dom}(g \circ f) = [9, \infty[$$

$$\begin{array}{ll} d) & \text{Dom}(g \circ f) = [9, \infty[ \\ & \text{no existe la compuesta de } f \circ g \end{array}$$

$$e) \quad \text{Dom}(g \circ f) = \{0\}$$

$$\begin{array}{ll} e) & \text{Dom}(g \circ f) = \{0\} \\ & \text{Dom}(f \circ g) = [1, \infty[ \end{array}$$

$$4. \quad a) \quad g \circ f(x) = \begin{cases} 6x + 16 & x \leq -1 \\ \sqrt{2x+3} - 1 & x > -1 \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 6x + 17 & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x} + 1 & x > 1 \end{cases}$$

$$b) \quad g \circ f(x) = \begin{cases} 6\sqrt{x} - 14 & 0 \leq x \leq 16 \\ \sqrt{2\sqrt{x} - 7} - 1 & x > 16 \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{3x+7} - 7 & -7/3 \leq x \leq 1 \\ 2\sqrt{\sqrt{x}-1} - 7 & x > 1 \end{cases}$$

$$c) \quad g \circ f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 18x + 7 & x \in ]\alpha, \beta[ - \{0\} \\ \sqrt{x^2 + 6x} - 1 & x \in ]-\infty, \alpha] \cup [\beta, \infty[. \end{cases}$$

donde  $\alpha = -3 - \sqrt{10}$   $\beta = -3 + \sqrt{10}$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} 9x^2 + 60x + 91 & x \leq 1 \quad x \neq -7/3 \\ x + 4\sqrt{x} - 5 & x > 1 \end{cases}$$

$$d) \quad g \circ f(x) = \begin{cases} 10 & x = 9 \\ \sqrt[4]{\sqrt{x}-2} - 1 & x > 9 \end{cases}$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \sqrt{\sqrt{3x+7}-2} & 2/3 \leq x \leq 1 \\ \sqrt{\sqrt{\sqrt{x}-1}-2} & x \geq 100 \end{cases}$$

$$e) \quad g \circ f(x) = 3\sqrt{1-|x|} + 7 \quad -1 \leq x \leq -1$$

$$f \circ g(x) = \begin{cases} \sqrt{1-|3x+7|} & -8/3 \leq x \leq -2 \\ \sqrt{2-\sqrt{x}} & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

$$5. \quad g \circ f(x) = \begin{cases} 18x + 39 & x \in ]-\infty, -8/3] \\ \sqrt{3x+8} & x \in ]-8/3, 1] \\ \sqrt[4]{x} & x \in ]1, \infty[ \end{cases}$$

$$6. \quad b) \quad h(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 3x - 1) \text{ y el dominio es } \mathbb{R}$$

$$c) \quad \text{Dom} = [-3/2, \infty[ \quad \text{Rec} = [-9/4, \infty[; \quad f^{-1}(x) = \frac{-3 + \sqrt{9+4y}}{2}$$

$$c') \quad \text{Dom} = ]-\infty, -3/2] \quad \text{Rec} = [-9/4, \infty[; \quad f^{-1}(x) = \frac{-3 - \sqrt{9+4y}}{2}$$

7.  $\text{Dom}h = [2, \infty[; h^{-1}(x) = \log_2(x^2 + 4)$
8.  $\text{Dom}f = \mathbb{R}^-; \text{Rec}f = \mathbb{R}^+; \text{No.}$
9. a)  $\text{Dom}f = ]0, 5/4[; \text{Rec}f = \mathbb{R}; \text{Dom}g = \mathbb{R}; \text{Rec}g = ]-\infty, 1[$   
 b)  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}^+, (f \circ g)(x) = \log_{5/4}(1 + 3e^{-x} - 4e^{-2x})$   
 c)  $\text{Dom}f = ]0, 5/8[; \text{Rec}f = ]-\infty, 2[; f^{-1}(x) = \frac{5 - \sqrt{25 - 16(5/4)^x}}{8}$   
 c')  $\text{Dom}f = ]5/8, 5/4[; \text{Rec}f = ]-\infty, 2[; f^{-1}(x) = \frac{5 + \sqrt{25 - 16(5/4)^x}}{8}$

### Soluciones de la sección 2.7.5

1. (a)  $\log \frac{5}{\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}}$   
 (b)  $\log \frac{3}{\sqrt{a^{43}}}$   
 (c)  $\log \frac{y^2 \sqrt{x-2y+c}}{\sqrt[4]{c-x}}$
2. (a)  $x = 2/3$   
 (b)  $x = 17/4$   
 (c)  $x = 1/3$   
 (d) El conjunto solución es vacío  
 (e)  $x = -5 + \sqrt{3}$   
 (f)  $x = \sqrt[7]{2}$   
 (g)  $x = 2$
3. (a)  $x = 0,01$  ;  $x = 0,001$   
 (b)  $x = 2$  ;  $x = 0,25$   
 (c)  $x = 2$  ;  $x = \frac{13}{21}$   
 (d)  $x = 10^{\frac{1+\sqrt{21}}{2}}$  ;  $x = 10^{\frac{1-\sqrt{21}}{2}}$   
 (e)  $x = 4$   
 (f)  $x = 1$  ;  $x = 5$   
 (g)  $x = 0$  ;  $x = 1$   
 (h)  $x = \log_7 8$   
 (i)  $x = \log_{1,05} 2$   
 (j)  $x = -\log_5 4$  ;  $x = -\log_5 6$   
 (k)  $x = \frac{1}{2} \log_3 (5/3)$   
 (l)  $x = \sqrt{5}$   
 (m)  $x = 2$   
 (n)  $x = 2$   
 (o)  $x = \log_{5^{6,7}} \left(\frac{5^7 \cdot 7}{81}\right)$   
 (p)  $x = 2^{-4}$
4. (a)  $] \frac{3-\sqrt{37}}{2}, -1[ \cup ]4, \frac{3+\sqrt{37}}{2}[$   
 (b)  $] -\infty, -\sqrt{\frac{5}{4}}] \cup [\sqrt{\frac{5}{4}}, \infty[$   
 (c)  $a > 1$   $]3, 6]$  ;  $a < 1$   $[6, \infty[$

- (d)  $]0, 3[$   
 (e)  $]0, \frac{1}{9}] \cup ]\frac{1}{3}, 1] \cup [3, \infty[$   
 (f)  $[\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty[$   
 (g)  $] - 1, \infty[$   
 (h)  $] - 1, -\frac{3}{4}[$   
 (i)  $] - \infty, \log_7 8]$   
 (j)  $]0, 2^{-\sqrt{2}}[ \cup ]2^{\sqrt{2}}, \infty[$   
 (k)  $]1/4, 1[$   
 (l)  $]3, \infty[$   
 (m)  $]0, 3[ \cup ]\frac{11}{3}, 4[$   
 (n)  $]2, \infty[$
5. (a) Como  $0 < x \neq 1$  y  $0 < y \neq 1$  Si  $qp \neq 1$  entonces las soluciones son  $x = (a^q b)^{\frac{1}{q^p - 1}}$   $y = (ab^p)^{\frac{1}{q^p - 1}}$   
 (b)  $x = 50$  ;  $y = 20$   
 (c)  $x = -\frac{1}{2} \log_{\frac{4}{9}} 3$  ;  $y = \frac{1}{4} \log_{\frac{2}{3}} (2^6 / 3^5)$   
 (d)  $x = 2^{\log_6 9}$  ;  $y = \log_6 9 - 2^{\log_6 9}$   
 (e)  $x = 5, y = 6$  o  $x = 5^6, y = 1$   
 (f)  $x = 3/2$  ;  $y = 1/2$   
 (g) El conjunto solución es vacío.  
 (h)  $x = a^{\frac{3}{2}}, y = a^{\frac{1}{2}}$  o  $x = a^{\frac{1}{2}}, y = a^{\frac{3}{2}}$   
 (i)  $x = (\frac{3}{2})^3, y = (\frac{3}{2})^2$  o  $x = 1, y = 1$   
 (j)  $x = \frac{3}{2}, y = \frac{1}{2}$
6. (a) i) 14,2 años ii) 22,5 años  
 (b) \$ 4.693  
 (c) \$ 429.096

### Soluciones Problemas Misceláneos

- I. 1.- F 2.- F 3.- V 4.- F 5.- F  
 6.- F 7.- F 8.- F 9.- F 10.- F  
 11.- V 12.- V 13.- V 14.- F 15.- F  
 16.- V 17.- F 18.- V 19.- F 20.- F  
 21.- F 22.- F 23.- F 24.- F 25.- F  
 26.- V 27.- F 28.- F 29.- V 30.- F  
 31.- V 32.- F 33.- F 34.- F 35.- F  
 36.- F 37.- F 38.- F 39.- V 40.- F  
 41.- F 42.- F 43.- F 44.- F

### II.

1.  $]3/2, \infty[$ .  
 2.  $]5/2, \infty[ \cup \{2\}$ .  
 3.  $[5/8, \infty[$ .  
 4.  $] - \infty, 0] \cup [2, \infty[$   
 5.  $[-3/8, \infty[$ .



6.  $\mathbb{R} - \{1, 2\}$
7.  $] - 5, -2[ \cup \{-3\}$ .
8.  $[5/3, 13/3] - \{3\}$ .
9.  $[-3, -1] - \{-2\}$ .
10.  $]a - \delta, a + \delta[$ .
11.  $]0, 1]$ .
12.  $] \sqrt{5}, \infty[$ .
13.  $]1, \infty[$ .
14.  $y + 1 = -\frac{2}{3}(x - 1)$ .
15. hipérbola con centro  $(2, 1)$ .
16.  $A(x) = 4x\sqrt{16 - 4x^2}$ .
17. hipérbola con centro  $(-2, -1)$
18.  $] - \infty, -4[ \cup ]4, \infty[$ .
19.  $] - \infty, -\sqrt{11}[ \cup ]\sqrt{11}, \infty[$ .
20.  $] \log_{27}(3), \log_{27e}(3e)]$ .
21.  $[-4, 0]$ .
22.  $] - 97, 103[ - \{3\}$ .
23.  $[-1, 1] - \{0\}$ .
24.  $] - \infty, 2]$ .
25.  $(g \circ f)(x) = \begin{cases} x^2 & x < 0 \\ 4x^2 & 0 \leq x < 1/2 \\ \sqrt{2x} & x \geq 1/2 \end{cases}$
26. (a)  $\mathbb{R} - [1, 2[$   
(b)  $\mathbb{R}_0^+$   
(c)  $(g \circ f)(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \in [0, 3] \\ -x+5 & x \in \mathbb{R}^+ - [0, 3] \end{cases}$
27. 10 y 15.
28.  $\text{Rec}f = ] - \infty, 2[ \cup ]3, \infty[$
29.  $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{x+1}$ .
30.  $f(h) = \pi(5 - \frac{h}{4})^2 h, \quad h \in ]0, 20[$ .
31.  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 - x - y > 0, x + y \neq 0\}$



## Appendix E

# Ejercicios Propuestos

### Límite de sucesiones

**Ejercicio 506** Hallar los límites de las sucesiones

1.  $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \dots$

2.  $\frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \dots, \frac{2n}{2n-1}, \dots$

3.  $0.4; 0.43; 0.433; 0.433; 0.43333; \dots$

**Ejemplo 507** Demostrar el siguiente límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$

**Demostración:** Para ello primero veremos la desigualdad siguiente

Sea  $k$  y  $n$  siguiente números naturales tal que  $1 \leq k < n$ .

Así  $0 < n - k$  y  $0 \leq k - 1$

luego  $0 \leq n - k - 1$  y  $0 \leq k - 1$

Por lo tanto

$$0 \leq (n - k - 1)(k - 1)$$

$$0 \leq nk - n - k^2 + 1$$

$$n - 1 \leq (n - k)k$$

lo anterior es valido para  $1 \leq k < n$ .

$$(n - 1)^{n-1} \leq \prod_{k=1}^{n-1} (n - k)k$$

$$(n - 1)^{n-1} \leq (n - 1)! \cdot (n - 1)!$$

$$(n - 1) \leq \sqrt[n-1]{((n - 1)!)^2} \sqrt{n - 1} \leq \sqrt[n-1]{(n - 1)!}$$

Así hemos demostrado

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

y por teorma de acotamiento tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$$

**Ejemplo 508** Dada la sucesión  $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \dots$   
Calcular el límite de la sucesión

**Solución:** Podemos notar que está sucesión esta definida por recurrencia por la siguiente formula:

$$a_1 = \sqrt{2} \quad a_n = \sqrt{2a_{n-1}}.$$

Usando esta información podemos demostrar que esta sucesión es creciente y acotada.

Primero veamos que es acotada, claramente  $0 < a_n$ , además podemos demostrar por inducción que  $a_n < 2$ , para ello vemos los siguientes:

i)  $a_1 < 2$

ii)  $a_{n_1} < 2 \Rightarrow 2a_{n-1} < 4$  es decir,  $a_n < 2$

Segundo veamos que la sucesión es estrictamente creciente

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{2a_n}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}}$$

pero por la primera parte vimos que  $a_n < 2$ , es decir,  $1 < \frac{2}{a_n}$ , luego

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{\frac{2}{a_n}} > \sqrt{1} = 1$$

y con ello entonces tenemos que  $a_{n+1} > a_n$ .

Usando los dos resultados anteriores tenemos que la sucesión es convergente, así, sea  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$

$$\begin{aligned} L^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot a_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_{n-1} \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} \\ &= 2L \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$ .

**Ejercicio 509** Dada la sucesión  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$   
Calcular el límite de la sucesión

**Ejercicio 510** Demostrar los siguientes límites

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^n} = 0$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$ , con  $a > 1$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ .

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0$ .

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n)}{n} = 0$ , con  $a > 1$ .

**Ejercicio 511** Demostrar que los siguientes límites no existe.

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \operatorname{sen} n$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{n}{n+1} \cos(n\pi/2)$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sec(n\pi/2).$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2} \right).$

**Ejemplo 512** Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n}(\operatorname{sen}(n!))}{n+1}$

**Solución:**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n}(\operatorname{sen}(n!))}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n}(\operatorname{sen}(n!))}{n+1} \cdot \frac{1/n}{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}(\operatorname{sen}(n!))}{1 + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

Veamos primero  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}$  para ello recordemos que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0$ , luego

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^3} = 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} = 0,$$

además por la propiedad del cero aniquila tenemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}} \operatorname{sen}(n!) = 0,$$

por otro lado tenemos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

así

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^3+n}(\operatorname{sen}(n!))}{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^3}}(\operatorname{sen}(n!))}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= \frac{0}{1}. \end{aligned}$$

**Ejemplo 513** Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3} \cdots \sqrt[2^n]{3}).$

**Solución:** Para poder calcular este límite, necesitamos usar la propiedad de potencia.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{3}\sqrt[4]{3}\sqrt[8]{3} \cdots \sqrt[2^n]{3}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{\left(\frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)}\right)} \\ &= 3^{\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - (1/2)}\right)} \\ &= 3^{\left(\frac{1}{1 - (1/2)}\right)} \\ &= 3^2 = 9. \end{aligned}$$

Notemos que la propiedad fue usada para una exponencial de base constante.

**Ejemplo 514** Calcular

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

**Solución:** Sea

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right).$$

Recordemos las siguientes identidades trigonométricas

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta),$$

$$2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta = \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta);$$

así entonces tenemos

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{3x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right) \right),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) &= \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{3x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right) \right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{3x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{8}\right) \right) \\ &= \frac{1}{4} \left( \cos\left(\frac{7x}{8}\right) + \cos\left(\frac{5x}{8}\right) + \cos\left(\frac{3x}{8}\right) + \cos\left(\frac{x}{8}\right) \right); \end{aligned}$$

Por inducción podemos demostrar que:

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos \frac{(2k+1)x}{2^n}.$$

Volvamos al ejercicio original

$$\begin{aligned} A &= \lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right) \cdots \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(\frac{(2k+1)x}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} \frac{\operatorname{sen}(x/2^n)}{\operatorname{sen}(x/2^n)} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(\frac{(2k+1)x}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1} \operatorname{sen}(x/2^n)} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \cos\left(\frac{(2k+1)x}{2^n}\right) \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2^n}\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \operatorname{sen}(x/2^n)} \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{2kx}{2^n}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{(2k-2)x}{2^n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n \operatorname{sen}(x/2^n)} \left( \operatorname{sen}\left(\frac{(2^{n-1}-1)x}{2^{n-1}}\right) - \operatorname{sen}\left(\frac{-2x}{2^n}\right) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2^{n-1}-1)x}{2^{n-1}}\right)}{2^n \operatorname{sen}(x/2^n)} + \frac{\operatorname{sen}(x/2^{n-1})}{2^n \operatorname{sen}(x/2^n)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{(2^{n-1}-1)x}{2^{n-1}}\right)}{x} \cdot \frac{x/2^n}{\operatorname{sen}(x/2^n)} + \frac{\operatorname{sen}(x/2^{n-1})}{x/2^{n-1}} \cdot \frac{x/2^n}{\operatorname{sen}(x/2^n)} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} \\ &= \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \end{aligned}$$

**Ejercicio 515** Calcular los siguientes límites

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100000n}{n^2+1}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3+4n+5}{2n^3+6}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^2+1} - \sqrt{n}).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2} \operatorname{sen}(n!)}{n+1}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n+1}{2^n-n}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n} \text{ con } (|a| < 1; |b| < 1).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} - \frac{2}{n} + \frac{3}{n} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}n}{n} \right).$

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \cdots + \frac{(n-1)^2}{n^2} \right).$
12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \cdots + \frac{(2n-1)^2}{n^3} \right).$
13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n} \right).$
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right).$
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \right)$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[4]{2} \sqrt[8]{2} \cdots \sqrt[2^n]{2})$
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+3 \operatorname{sen}(n)}{4+n}.$
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2+3n}{4+n}}.$
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{\frac{(3-\sqrt{n})\sqrt{n+2}}{3n+4}}.$
20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3 \operatorname{sen}(n)}{4n^2+n}.$
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}.$
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{16^{n+1}+5^{n+1}}{4^{2n}+5^n}.$
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n-3^n+1}{5^n+3^n-1/n}.$
24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} \right).$
25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right).$
26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}.$
27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \operatorname{sen}(n!)}{n^2+1}$
28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sqrt[3]{n^2+n}}{n+1}$
29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n}{4^n}$
30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+3})$
31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2}$
32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$
33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + a^{-n}} \text{ con } a > 0$
34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(\sqrt{n^2+1} - 1)$
35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+5n} - n)$
36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n - n^2}{\operatorname{sen}(n!) + 7^{n+1}}$
37.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{5}{4n} \right)^n$
38.  $\frac{n^3+3n^2}{5n+1} \operatorname{sen}(2/n^2)$
39.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n + 3^n)^{1/n}.$

**Ejercicio 516** Sea  $a_n = \frac{n!}{3^n} x^n$ .

Resolver  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$ .

**Ejercicio 517** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión acotada.

Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + \cos(n)}{n^3 + 1}$ .

**Ejercicio 518** Sea  $\{a_n\}$  una sucesión convergente.

Calcular  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + (-1)^n}{n+1}$ .

**Ejercicio 519** Gráficar las funciones

$$1. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x$$

$$2. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^n}$$

$$3. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}$$

$$4. y = \lim_{n \rightarrow \infty} \arctg(nx)$$

**Ejercicio 520** El término general  $u_n$  de la sucesión  $u_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u_2 = \frac{5}{4}$ ,  $u_3 = \frac{7}{8}$ ,  $u_4 = \frac{17}{16}$ ,  $\dots$  tiene la forma  $\frac{2^n-1}{2^n}$ , si  $n$  es un número impar, y  $\frac{2^n+1}{2^n}$ , si  $n$  es un número par.

Hallar  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$

**Ejemplo 521** La sucesión  $u_1, u_2, u_3, \dots$  tiene por límite a  $\neq 0$ .

Demostrar que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ . ¿Qué se puede decir sobre este límite si  $a = 0$ ? (Mostrar ejemplos).

**Solución:** Como tenemos  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$  y luego toda subsucesión es convergente al mismo límite, es decir,  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = a$  y por lo tanto tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n} \\ &= \frac{a}{a} = 1 \end{aligned}$$

Si la sucesión converge a cero tenemos varias alternativas.

Ejemplo 1  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n+1} \right) / \frac{1}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$  y en este caso tenemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(n+1)!}{1/(n)!} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

Ejemplo 3  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k^n} = 0$  con  $1 < k$ ,  $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/k^{(n+1)}}{1/k^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Ejemplo 4  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{sen } n}{n} = 0$

En este caso nos queda el siguiente límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\text{sen } n}{\text{sen}(n+1)},$$

el primero de los cuales es convergente a 1 y el segundo no es convergente, por lo tanto el límite total no existe.



**Ejercicio 522** Un segmento de longitud “a” esta dividido en “n” partes iguales. Sobre cada una de ellas tomándola como base, se ha construido un triángulo isósceles, cuyos ángulos en la base son de  $45^\circ$ . Demostrar, que el límite del perímetro de la línea quebrada así formada es diferente de la longitud original, a pesar que pasando al límites la línea se confunde geoméricamente con el segmento original.

**Ejercicio 523** El punto  $C_3$  divide al segmento  $C_1C_2$  en dos partes iguales, el punto  $C_4$  divide a su vez al segmento  $C_2C_3$  en dos partes iguales; el  $C_5$  hace lo propio con el segmento  $C_3C_4$  y así sucesivamente. Determinar la posición límite del punto  $C_n$ .

## Límite de funciones

**Ejercicio 524** Calcular

1.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+1}{x^2-1}$
2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$
3.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-5x+10}{x^2-25}$
4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-1}{x^3+3x+2}$
5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2-4x+4}$
6.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}$
7.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$
8.  $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$
9.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[4]{x}-1}$
10.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$
11.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$
12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}$
13.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
14.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{x}$
15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 5x}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{sen} x}{x}$
17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \lg 2x}{\operatorname{sen} 3x}$
18.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-\operatorname{sen} 2x}{x+\operatorname{sen} 3x}$
19.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\operatorname{sen}(\pi x)}$
20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(1+10x)}{x}$
21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \lg x}{x}$
22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} - \sqrt{1-\operatorname{sen} x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - 1}{x}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{1 - \cos x}{(x - 2\pi)^2}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\operatorname{sen}^2(x)}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos(2x)}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \csc x - \operatorname{ctg} x$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$$

$$33. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi/2 - x) \operatorname{tg}(x)$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}}\right) - \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right)$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - \operatorname{sen} 2x}{\operatorname{sen}^2(3x) - 5x}$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-2x}}{x^2+x}$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 2x^3 - x^2}{\operatorname{sen}(3x) \operatorname{sen}(4x)}$$

**Ejercicio 525** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x-1} & x \neq 1 \\ a & x = 1 \end{cases}$

Calcular el valor de  $a$  de modo que exista  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

**Ejercicio 526** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{6x+18x^2-5x+6}{x-1} & x < 3 \\ \frac{\sqrt{x+12}-3}{x+3} & x > 3 \end{cases}$

Calcular  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

**Ejercicio 527** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1}{3x^2} & x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$

Determinar el valor de  $a$  de modo que exista  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

**Ejercicio 528** Sea

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos^3 x}{x \operatorname{sen}(2x)} & -\pi/2 < x < \pi/2; \ x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Determinar  $a \in \mathbb{R}$  de modo que  $g$  sea continua en  $]-\pi/2, \pi/2[$ .

**Ejercicio 529** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{(a^2-1)x} - 1 + 3(x-1)}{x-1} & x \neq 1 \\ 3ax & x = -1 \end{cases}$$

Determinar  $a \in \mathbb{R}$  de modo que  $f$  sea continua en  $x = -1$ .

**Ejercicio 530** Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos(2x)}}{x^2} & -\pi/4 \leq x \leq \pi/4; x \neq 0 \\ a & x = 0 \end{cases}$$

Determinar  $a \in \mathbb{R}$  de modo que  $f$  sea continua en  $[-\pi/4, \pi/4]$ .

**Ejercicio 531** Determinar, si existe, las constantes  $A$  y  $B$  de modo que la siguiente función sea continua en todo los reales.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} & x < 0 \\ \frac{B(x-\pi/2)}{\cos x} & 0 \leq x < \pi/2 \\ \frac{A}{x} + B & \pi/2 \leq x \end{cases}$$

**Ejercicio 532** Considere la función  $f$  con dominio  $]-\pi, \pi[$  definida por.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos \frac{x}{2} + \operatorname{sen} \frac{x}{2}}{\cos x} & -\pi \leq x < -\pi/2 \\ A \operatorname{sen} x + B & -\pi/2 < x < \pi/2 \\ \frac{\sqrt{1+\operatorname{sen} x} (x-\pi/2) - \sqrt{2}}{\cos^3(x)} & \pi/2 \leq x < \pi \end{cases}$$

Determine los valores de  $A, B$  en los reales de modo que la función  $f$  sea continua en los puntos  $-\pi/2$  y  $\pi/2$ .

**Ejercicio 533** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 4 + ax & x \leq 2 \\ x^3 + b & x > 2 \end{cases}$$

Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1.  $(\forall b \in \mathbb{R})(a = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } 2)$ .
2.  $(\forall b \in \mathbb{R})(a = 1 \Rightarrow f'(1) = 12)$ .
3.  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 8 + b$ .
4.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \log_4(f(x)) = 1$ .
5.  $(\exists a, b \in \mathbb{R})(\text{tales que } f \text{ es derivable en } \mathbb{R})$ .

**Ejercicio 534** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x + bx & x \leq \pi/4 \\ \cos x + ax & x > \pi/4 \end{cases}$$

Determinar si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas.

1. Si  $a = b$  entonces  $f$  es continua en  $\pi/4$ .
2.  $(\exists a, b \in \mathbb{R})(\text{tales que } f \text{ es derivable en } \mathbb{R})$ .

**Ejercicio 535** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x^2} & x > 0 \\ \frac{\operatorname{sen} x}{2x} & x < 0 \end{cases}$$

1. Calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$
2. Definir  $f$  en 0 de modo que  $f$  es continua en 0.
3. Existe  $f'(0)$ .

**Ejercicio 536** Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  y  $f$  una función definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + x + 3 & x < -1 \\ x^2 - 2x & -1 \leq x < 3 \\ -x^2 + 8x + 12 & 3 \leq x \end{cases}$$

1. Determine  $f'$  y indique su  $\operatorname{Dom} f'$ .
2. ¿Es  $f'$  continua en  $x = -1$  y  $x = 3$ .

## Derivada

**Ejercicio 537** Usando la definición, determine la derivada de:

- 1)  $f(x) = \operatorname{tg}(x)$
- 2)  $f(x) = \cos(x)$
- 3)  $f(x) = x^3 - 3x$
- 4)  $f(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))$
- 5)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$
- 6)  $f(x) = x^n$

señalando su dominio.

**Ejercicio 538** Usando álgebra de derivada calcular la derivada de las siguientes funciones.

1.  $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ .
2.  $f(x) = \operatorname{sen}(x + \operatorname{tg} x)$ .
3.  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{sen}^2(x) + \cos(x^2)}$ .
4.  $f(x) = \ln(\cos^2(x^3))$ .
5.  $f(x) = \operatorname{tg}(\sec(x+7))$ .
6.  $f(x) = \sec^2(\sqrt{x})$ .
7.  $f(x) = \operatorname{sen}(\ln(x^2))$ .
8.  $f(x) = \operatorname{tg}^2(\sec^3(\sqrt{\pi x}))$ .
9.  $f(x) = \ln(e^{\operatorname{tg} x} + x)$ .
10.  $f(x) = x^2 \cos^5(\sqrt[3]{x^2})$ .
11.  $f(x) = x^2 \cos(\operatorname{arcsen}(x^2 - 3))$ .
12.  $f(x) = \frac{x + \cos^2(x^3)}{\operatorname{tg}(3x) + \ln(x^2)}$ .

**Ejercicio 539** Las funciones de la columna A tienen su derivada en la columna B, de tal manera que puede formar los pares

| Columna A                                     | Columna B                                                                    |
|-----------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|
| $a = 2tg(\operatorname{sen} x) + 3$           | $h = -tg(x)$                                                                 |
| $b = \operatorname{sen}^2(\ln x)$             | $i = -2tg(\operatorname{sen} x) \cos x$                                      |
| $c = tg^2(\operatorname{sen} x)$              | $j = 2\sec^2(\operatorname{sen} x) \cos x$                                   |
| $d = \operatorname{sen}(\ln x^2)$             | $k = \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}$                                    |
| $e = \ln(\cos x)$                             | $l = 2tg(\operatorname{sen} x) \sec^2(\operatorname{sen} x) \cos x$          |
| $f = \ln(\cos^2(\operatorname{sen} x))$       | $m = \frac{(\ln(\cos x)) \cos(\ln x)}{x}$                                    |
| $g = (\ln(\cos x)) \operatorname{sen}(\ln x)$ | $n = \frac{(\ln(\cos x))^x \cos(\ln x)}{x} - \operatorname{sen}(\ln x) tg x$ |
|                                               | $o = \text{No está la derivada}$                                             |

**Ejercicio 540** En qué puntos, existe la derivada de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll}
 1) \quad f(x) = x|x| & 6) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)} & -\pi < x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4 + x^3} & x > 0 \end{cases} \\
 2) \quad f(x) = [x] & 7) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(2x)}{x} & x > \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \leq \frac{\pi}{2} \end{cases} \\
 3) \quad f(x) = [x] + x & 8) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{-9(1-\sqrt[3]{x})}{1-x^4} & x < 1 \\ \frac{3}{4} & x = 1 \\ \frac{\tan(3\pi(1-x))}{4\pi(x-1)} & x > 1 \end{cases} \\
 4) \quad f(x) = \begin{cases} 2x-3 & x < 0 \\ x^2+4 & x \geq 0 \end{cases} & 9) \quad f(x) = \begin{cases} x^2+3x & x \leq 0 \\ 3x+4 & 0 < x < 5 \\ 2x+9 & 5 < x < 10 \end{cases} \\
 5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{1-2x}} & x \geq 0 \\ \sqrt[3]{1-2x} & x < 0 \end{cases} &
 \end{array}$$

**Ejercicio 541** Demuestre que  $y = x(\ln(x) + \ln^2(x))$  con  $x \in \mathbb{R}^+$  satisface la ecuación diferencial.

$$x^2 y'' - xy' + y = 2x$$

**Ejercicio 542** Sea  $h(x) = f(x) \ln(g(x))$  donde  $f$  y  $g$  son derivables

- a) Calcule  $h'(x)$   
 b) Calcule  $h'(0)$  si  $f(0) = 0, g(0) = 2, f'(0) = -1, g'(0) = 4$

**Ejercicio 543** Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. (Justifique)

$$1. \text{ Si } f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x < 0 \\ x^2 & x = 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x > 0 \end{cases} \text{ entonces } f'(x) = \begin{cases} 3x^2 & x < 0 \\ 2x & x = 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

2. La función  $f(x) = [x]$  no es derivable en  $x = 1$ .

3. La función  $f(x) = |x-3|$  no es derivable en  $x = 0$ .

4. Si  $f(x) = |x|e^{\cos(x)}$  entonces  $f'(-\frac{\pi}{2}) = 1 - \frac{\pi}{2}$ .

5. Si  $f'(x) = \operatorname{sen}(x), g(x) = \ln(\sqrt{x}) + \frac{\pi}{2}$ , entonces  $(f \circ g)'(1) = -\frac{1}{2}$

6. Si  $f$  no es derivable en  $a$  entonces  $f$  no es continua en  $a$ .

7. La ecuación de la recta tangente a  $y = e^{2x}$  en el punto cuya abscisa es  $x = 0$  es  $y - 1 = 2e^{2x}x$ .

$$8. \text{ Sea } f(x) = \begin{cases} 2ax^2 + 1 & x < 1 \\ b & x = 1 \\ \frac{a \operatorname{sen}(x)}{x} & x > 1 \end{cases}.$$

Si  $a = b = -1$  entonces  $f$  es derivable en  $x = 1$ .

9. La función  $f(x) = \sqrt[5]{x-1}$  no es derivable en  $x = 1$

10. La derivada de  $g(x) = [x]$  en  $x = \frac{5}{2}$  es  $g'(\frac{5}{2}) = 0$ .

11. La función  $|\operatorname{sen} x|$  es derivable en  $\pi$

$$12. \text{ La función } f(x) = \begin{cases} e^{x \cos(1/x)} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{1 - \cos(x)}{x^2 \sqrt{1+3x}} & x > 0 \end{cases} \text{ no es derivable en } x = 0.$$

**Ejercicio 544** Considere la función  $f(x) = \begin{cases} 3+ax & x \leq 1 \\ x^2+b & x > 1 \end{cases}$  donde  $a, b \in \mathbb{R}$ . Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas

1.  $(\forall b \in \mathbb{R})(a = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } 1)$

2.  $(\forall b \in \mathbb{R})(a = 2 \Rightarrow f'(1) = 2)$

3.  $\lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = 1 + b$

4.  $\lim_{x \rightarrow 0+} \log_3(f(x)) = 1$

5. Existen  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $f$  es derivable en  $\mathbb{R}$ .

**Ejercicio 545** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(mx) - \cos(nx)}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ .

? 'Es  $f$  continua en  $\mathbb{R}$ ? Calcule  $f'(x)$ .

**Ejercicio 546** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{(x-2)^2}{1+|x-2|} \operatorname{sen}(\frac{1}{x-2}) & x \neq 2 \\ 0 & x = 2 \end{cases}$ .

? 'Existe  $f'(2)$ ? Calcule  $f'(x)$ .

**Ejercicio 547** Dado  $f(x) = \begin{cases} 5+x^2 & x < 1 \\ 3x+|x-4| & x \geq 1 \end{cases}$ . Encuentre  $f'$ .

**Ejercicio 548** Sea  $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{\operatorname{sen}(x)} & 0 < x < \pi \\ \sqrt[3]{8x^3+x^5} & x \leq 0 \end{cases}$ .

a) Es  $f$  derivable en  $x = 0$ ?

b) Determine  $f'(x)$  señalando su dominio.

c) ? 'Existe  $f''(0)$ ? Determine  $f''(x)$ .

d) Determine si existe la ecuación de la recta tangente a la curva en  $P_1 = (2, 0)$  y en  $P_2 = (-1, \sqrt[3]{-9})$ .

En caso de existir determinel(as).

**Ejercicio 549** Sea  $g(x) = \frac{\sqrt{x}}{\cos(x)} + 1$ ,  $f(x) = 2 \cos^5(x+1) + \operatorname{sen}(e^{x^2})$ .

a) Determine (si existe)  $f'(0), g'(0), (f \circ g)'(0)$ .

b) Encuentre si existe la ecuación de la recta tangente a  $y = g(x)$  en el punto  $(0, 1)$ .

**Ejercicio 550** Sea  $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 \cos(\frac{1}{x-1}) & x < 1 \\ 0 & x = 1 \\ \frac{(x-1)^3}{\operatorname{sen}(x-1)^2} & x > 1 \end{cases}$ .

? ' Es  $f$  continua en  $x = 1$  ?

? ' Es  $f$  derivable en  $x = 1$  ?

Determine  $f'(x)$  señalando su dominio

? ' Existen las rectas tangente a la curva  $y = f(x)$  en los punto  $(1, 0)$  y en el punto  $(2, \frac{1}{\operatorname{sen}(1)})$  ?

**Ejercicio 551** Sea  $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2ax + 3d & x \leq 1 \\ ax^3 - 3ax^2 + 2dx & x > 1 \end{cases}$ .

Determine  $a$  y  $d$  de modo que  $h$  sea derivable en  $x = 1$ .

**Ejercicio 552** Encuentre  $a$  y  $b$  de modo que exista  $f'(1)$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & x \geq 1 \\ x - b & x < 1 \end{cases}$$

.

## Función Inversa

**Ejercicio 553** Dada la función  $f(x) = \operatorname{sen} x - x \cos x$ .

Determinar  $(f^{-1})'(1)$ , justifique.

**Ejercicio 554** Calcular si existe  $(f^{-1})'(4)$ , donde  $f(x) = x^5 + x^2 + 2$ , justifique su respuesta.

**Ejercicio 555** Considere  $f : ]-\infty, 0[ \rightarrow ]0, \infty[$  una función continua tal que  $f'(x) = x^2 + x + 1$  y  $f(-1) = 2$ . Determinar  $a$  en los reales tal que  $(f^{-1})'(a) = 1$ .

## Derivada Implícita

**Ejemplo 556** Calcular la derivada de la función  $y = f(x)$  definida implícitamente por

$$x^2 - y^2 = 7$$

**Solución:** Para ellos consideremos que  $y$  es una función derivable de  $x$ .

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 = 7 & \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ 2x - 2y \frac{dy}{dx} &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

notemos que la derivada obtenida en forma implícita, sólo es válida para los punto en que la ordenada es distinta de cero.

**Ejemplo 557** Calcular la derivada de la función  $y = f(x)$  definida implícitamente por

$$e^{3x} + e^{xy} - 2^{x+y} = 10.$$

**Solución:** Para ellos consideremos que  $y$  es una función derivable de  $x$ .

$$\begin{aligned} e^{3x} + e^{xy} - 2^{x+y} &= 10 \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ 3e^{3x} + e^{xy} \left( y + x \frac{dy}{dx} \right) &= \ln(2) 2^{x+y} \left( 1 + \frac{dy}{dx} \right) \\ (xe^{xy} - \ln(2) 2^{x+y}) \frac{dy}{dx} &= -(3e^{3x} + ye^{xy} - \ln(2) 2^{x+y}) \\ \frac{dy}{dx} &= -\frac{3e^{3x} + ye^{xy} - \ln(2) 2^{x+y}}{xe^{xy} - \ln(2) 2^{x+y}}, \end{aligned}$$

notemos que la derivada obtenida en forma implícita, sólo es válida para los punto en  $xe^{xy} - \ln(2) 2^{x+y} \neq 0$ .

**Ejemplo 558** Calcular la derivada de la función  $y = f(x)$  definida implícitamente por

$$\operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{arctg}(xy).$$

**Solución:** Para ellos consideremos que  $y$  es una función derivable de  $x$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x - y) &= \operatorname{arctg}(xy) \quad \left| \frac{d}{dx} \right. \\ \cos(x - y) \left( 1 - \frac{dy}{dx} \right) &= \frac{1}{1 + (xy)^2} \cdot \left( y + x \frac{dy}{dx} \right) \\ \left( -\cos(x - y) - \frac{x}{1 + (xy)^2} \right) \frac{dy}{dx} &= -\left( \cos(x - y) - \frac{y}{1 + (xy)^2} \right) \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{\cos(x - y) - \frac{y}{1 + (xy)^2}}{\cos(x - y) + \frac{x}{1 + (xy)^2}}. \end{aligned}$$

notemos que la derivada obtenida en forma implícita, sólo es válida para los punto en  $\cos(x - y) + \frac{x}{1 + (xy)^2} \neq 0$ .

**Ejercicio 559** Determinar la derivada de la función  $y = f(x)$  definida en forma implícita por

1.  $x^2 + y^2 = 4$
2.  $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$
3.  $x^3 + y^3 = 3xy$
4.  $x^4 - 6x^2 y^2 + 9y^4 - 5x^2 - 15y^2 - 100 = 0$
5.  $x^y - y^x = 0$
6.  $x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x = 0$
7.  $e^x + e^y - 2^{xy} - 1 = 0$
8.  $\operatorname{sen}(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$
9.  $\frac{x}{y} + e^{xy} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} = 0$
10.  $x - y = \operatorname{arcsen} x - \operatorname{arcsen} y$
11.  $\operatorname{sen}(xy) + \cos(xy) = \operatorname{tg}(x + y)$
12.  $2y \ln y = x$



13.  $x \operatorname{sen} y - \cos y = \cos(x + y)$

14.  $x^2(x + y) = a^2(x - y)$

**Ejercicio 560** Dada la función definida implícita por

$$e^{xy} - \cos(x - y) = \operatorname{sen}(xy^2)$$

Calcular  $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(0,0)}$

**Ejercicio 561** Dada la función definida en forma implícita  $x^4 + x^3y - y^3 = 1$  es derivable en el punto  $(1, -1)$ .

**Ejercicio 562** Mostrar que la función  $y$  definida implícitamente por la ecuación  $xy = \ln(y) + 1$ , satisface también la relación.

$$y^2 + (xy - 1) \frac{dy}{dx} = 0$$

**Ejemplo 563** Calcular los ángulos de la recta normal a la parábola en cualquier punto que pertenezca a ésta con la recta del radio focal al punto y la recta del eje de la parábola.

**Solución:** Consideremos la parábola  $y = 4cx^2$  (ya que una traslación no cambia los ángulos) y el punto  $(p, 4cp^2)$ , luego la ecuación de la recta tangente es

$$y - 4cp^2 = 8cp(x - p)$$

y la ecuación de la normal con  $p \neq 0$  es

$$l_n : y - 4cp^2 = \frac{-1}{8cp}(x - p).$$

La ecuación del eje de la parábola es  $l_e : x = 0$ , además la ecuación de la recta que describe el radio focal, tiene que pasar por los puntos  $(p, 4cp^2)$  y  $(0, c)$ , por lo tanto tenemos

$$l_r : y - c = \frac{4cp^2 - c}{p}x.$$

Ahora calculemos los ángulos, para ellos recordemos

$$\operatorname{tg}(\angle(Ax + By = E, Cx + Dy = F)) = \frac{AC + BD}{AD - BC}$$

$$\operatorname{tg}(\angle(l_n, l_e)) = -8cp$$

$$\operatorname{tg}(\angle(l_n, l_r)) = \frac{\frac{4cp^2 - c}{p} + \frac{1}{8cp}}{1 - \frac{4cp^2 - c}{p} \frac{1}{8cp}}.$$

**Ejercicio 564** Determine  $A \in \mathbb{R}$  tal que la función  $y(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))$  satisfaga la ecuación:

$$Ay''(x) + \tan(x)y'(x) + y(x)\cos^2(x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

## Regla de L'Hopital

**Ejercicio 565** 1.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$

2.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} - \frac{1}{x^2}$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}$

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$

6.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen}(mx))}{\ln(\operatorname{sen} x)}$

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{arcsen} x) \operatorname{ctg} x$

8.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{2(1-\sqrt{x})} - \frac{1}{3(1-\sqrt[3]{x})}$

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{x^2})^x$

10.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{1}{x})^{tg x}$

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 7^x}{2^x - 4^x}$

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x^3 + 3x} - x)$

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{kx} + 1)^{\frac{1}{x}}$

16.  $\lim_{x \rightarrow 0} (\frac{(1+x) \ln(1+x)}{x^2} - \frac{1}{x})$

17.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} (tg x)^{2x-\pi}$

18.  $\lim_{x \rightarrow a} (-\frac{x}{ax})^{tg(\frac{\pi x}{2a})}$  con  $a \neq 0$

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}$

20.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{1}{x})^{tg x}$

21.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\frac{x}{\operatorname{sen}^2 x})^{tg x}$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2 \cos x - 2}{x^2 - 2 \cos x + 2}$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\operatorname{sen} x)^x$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x)^{\operatorname{sen} x}$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} x}$

26.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-3| \operatorname{sen}(x^2-1)}{x-1}$

## Interpretación geométrica

**Ejercicio 566** Para qué valores de  $a, b, c$  las gráficas de las curvas cuyas ecuaciones son  $f(x) = x^2 + ax + b$  y  $g(x) = x^3 + cx$  tiene una recta común en el punto  $(2, 2)$ .

**Ejercicio 567** Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva  $xy + \arcsen(x \cdot y) = 0$  en el punto  $(2\pi, 0)$ .

**Ejercicio 568** En la parábola  $y = x^2$  se han marcado dos puntos cuyas abscisas son  $x = 1$ ,  $x = 3$ . Por estos puntos pasa la secante. ¿En qué punto de la parábola la tangente a ésta es paralela a la secante trazada?

**Ejercicio 569** Escribir la ecuación de la recta tangente y de la normal a la hipérbola  $y = 1/x$  en el punto cuya abscisa es  $x = -1/2$ .

**Ejercicio 570** Hallar el punto de la curva  $y = \frac{1}{1+x^2}$  cuya ecuación de la recta tangente es paralela al eje de la abscisas.

**Ejercicio 571** Hallar la ecuación de la recta normal a la curva  $y = x \ln x$  que es paralela a la recta  $2x - 3y + 3 = 0$ .

**Ejercicio 572** Mostrar que cualquier tangente a la curva

$$y = \frac{1}{2} \sqrt{x - 4x^2}$$

se cortan con el eje de ordenadas en un punto equidistante entre el punto de contacto y el origen de coordenadas.

**Ejercicio 573** Formar la ecuación de la normal a la curva  $y + \frac{x^2 - 3x + 6}{x^2}$  en el punto cuya abscisas es  $x = 3$ .

**Ejercicio 574** Sean  $A = (0, 0)$ ,  $B = (-1, 4)$  y  $C = (2, 16)$  puntos de la parábola  $y = 4x^2$ . Si  $l_1$  es la recta a la parábola en el punto  $A$ ,  $l_2$  y  $l_3$  son las rectas normales en los puntos  $B$  y  $C$ . Calcular el área del triángulo determinado por las rectas  $l_1, l_2$  y  $l_3$ .

**Ejercicio 575** Calcule  $a$  si la rectas  $6x - y - 1 = 0$  es normal a la curva  $y = x^3 + ax + b$  en  $(0, -1)$

**Ejercicio 576** Considere la ecuación

$$C : x^2 + y^2 = r^2$$

Demuestre que la recta normal a la circunferencia en cualquier puntos de  $C$  pasa por el origen.

**Ejercicio 577** Considere la ecuación

$$x \ln(\sqrt{x}) - \sen(x) + y^3 = 0$$

que define implícitamente a  $y$  como función de  $x$ .

Determine (si existe) la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto  $(\frac{\pi}{2}, 1)$ .

**Ejercicio 578** Determine el (los) punto(s) donde la gráfica de la relación dada en forma implícita por;

$$x^2 + y^2 = 6x - 4y + 5$$

tiene tangente(s) paralela de la recta  $y = 4 + x$

**Ejercicio 579** determine la ecuación de la(s) recta(s) tangente(s) a la curva  $\sen^2(x+y) + y \cos(x) - \frac{3x}{2\pi} = 0$  en  $x = \frac{\pi}{2}$  con  $y \in ] - \frac{\pi}{2}, 0[$ .

**Ejercicio 580** Determine  $k \in \mathbb{R}$  (si existe) de modo que la ecuaciones de la recta tangente a la curva  $C$  en  $(1, \frac{\pi}{4})$  pasa por el origen

$$C : y \cdot \arctg(x) = ky^3 \sin(\pi x)$$

**Ejercicio 581** Encontrar las ecuaciones de las rectas tangentes a la elipse  $x^2 + 4y^2 = 1$  las cuales pasan por el puntos  $(5, 0)$ .

**Ejercicio 582** Dado  $x = tg(\sqrt{y})$  verificar que

$$(x^2 + 1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(x^2 + 1) \frac{dy}{dx} - 2 = 0$$

**Ejercicio 583** Dada la relación

$$x \operatorname{sen} y = y \cos(x - y)$$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto  $(\pi/2, \pi/2)$

## Interpretación física

**Ejercicio 584** El radio de una esfera crece uniformemente con velocidad de 5cm/seg ? A que velocidad crecera el área de la superficie de la esfera? y el volumen de la misma cuando el radio sea igual a 50cm.

**Ejercicio 585** Si el volumen de un cilindro aumenta a razón de  $3\text{cm}^3/\text{seg}$ . Calcular la razón de cambio de la superficie del cilindro en el instante cuando  $h = 1$  y sabiendo que  $h = 3r$ .

**Ejercicio 586** El volumen de un cubo crece a la velocidad de  $30\text{m}^3/\text{min}$  en el instante en que la arista mide 20m. Calcule la velocidad con que varía la arista.

**Ejercicio 587** La tierra que vierte una excavadora al ritmo  $3\text{m}^3/\text{min}$  forma un cono cuyo radio es constantemente igual al doble de la altura. Hallase la velocidad a que varía esta última en el instante en que la altura es 18m.

**Ejercicio 588** Un barco navega paralelamente a una costa recta a una velocidad de 12millas/hrs. y a una distancia de 4 millas.

? Cuál es la velocidad de aproximación a un faro de la costa en el instante en que disten 5 millas al faro?

**Ejercicio 589** Un bote se acerca a un muelle mediante una cuerda de largo 6mts atada a su proa. La cuerda pasa por un anillo fijo al muelle, que esta 1/2 metros más alto que el extremo de la cuerda con velocidad de 2cm/seg.

Hallar la velocidad con que el bote se acerca al muelle cuando se ha recogido 1 metros de cuerda.

**Ejercicio 590** La altura de un triángulo equilátero a razón de 3cm/seg.

? Cuál es la velocidad de aumento del área?

**Ejercicio 591** El diametro y la altura de un cilindro circular recto son, en un cierto instante 10cm, 20cm, respectivamente.

Si el diametro aumenta 1 m/min. Determine como varía la altura de modo que el volumen sea constante.

**Ejercicio 592** Una vía de ferrocarril cruza una carretera bajo un ángulo de  $60^\circ$ . Una locomotora distan 160 metros del cruce y se alejan de él a una velocidad de 100 Km/hrs. Un automovil distan del cruce 160 metros y acerca a él con una velocidad de 50Km/hrs.

? A que razón se altera la distancia entre los dos despues de media hora?

**Ejercicio 593** Un bus se desplaza en linea recta paralela a la vereda con una rapides de 12 metros/ seg a 4 metros de ella

? con que rapidez se aproxima a un disco pare ubicado al borde de la vereda en el instante en que disten 5 metros del disco PARE?

**Ejercicio 594** Una escalera de 50 metros de largos se desliza por una pared vertical de 15 metros de alto. Si la velocidad con que se desplaza el extremo superior es constante e igual a 2 mts/seg.

? Con que velocidad se desplaza el extremo inferior en el instante en que extremo superior esta en 3 metros del suelo.

**Ejercicio 595** La altura de un triángulo equilatero aumenta a razón de 3 cm/seg.

Determinar la rapidez de crecimiento del área.

**Ejercicio 596** Un globo se halla a 60 mts de altura sobre una carretera recta y se esta elevando verticalmente con un rapidez de 3mts/seg. En ese instante pasa un auto que viaja a 20mts/seg.

? Con qué rapidez aumenta la distancia entre el globo y el auto 5 segundos despues?

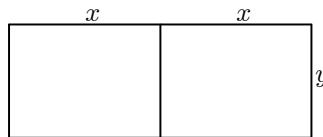
**Ejercicio 597** Un farol se encuentra en lo alto de un poste de 16 pie de altura. Un niño de 5 pies de altura se aleja del postea una velocidad de 4pie/seg

? Con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra cuando él se encuentra a 18 pie del poste?

## Problema de Máximo y Mínimo

**Ejercicio 598** En una parcela, se desea encerrar dos porciones de terreno de igual área (como en la figura) con una malla de longitud  $L$ . Determinar las longitudes de modo que el área encerrada se máxima.

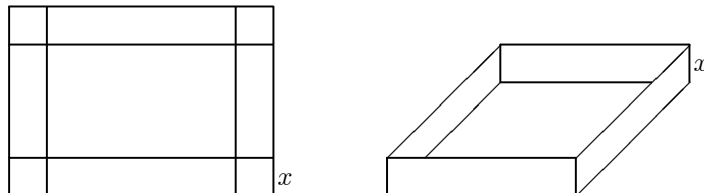
(Ayuda: Expresé el área de las parcela en función de  $x$ .)



**Ejercicio 599** En la ribera de un río de 3 km de ancho hay una planta eléctrica, en la otra ribera 4 km corriente arriba hay una fábrica. El costo de tender un cable por tierra (línea aérea) es de \$ 30 por metro y de \$ 50 por metro, si se tiende bajo el agua (cable submarino). Determinar cuanto cable de ser tendido en forma submarina de modo que el costo del tendido sea mínimo.

(Ayuda: Determine la función costo del tendido de cable de la planta eléctrica a la fábrica en función de  $x$ , donde  $x$  representa la longitud del cable tendido en forma submarina.)

**Ejercicio 600** Se desea construir una caja sin tapa con base rectangular a partir de una hoja rectangular de cartón de 16 cm de ancho y de 21 cm de largo, recortando un cuadrado en cada esquina y doblando los lados hacia arriba. Encuentre las dimensiones que minimice la cantidad de material necesario. (Ayuda: Expresar  $V$  (volumen de la caja) como una función de la variable  $x$ , donde  $x$  es la longitud del lado del cuadrado). Ver figura.



**Ejercicio 601** Se desea construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con  $M \text{ cm}^2$  de material. Determinar la longitud de una arista de modo que el volumen sea máximo

(Ayuda: Determine la función volumen en términos de  $x$ , donde  $x$  indica la longitud de un lado de la base).

**Ejercicio 602** *Determinar las dimensiones de un cilindro circular recto de radio  $r$  y altura  $h$  está inscrito en un cono de altura 12 y radio de la base 4 de modo que su volumen sea máximo.*

*(Ayuda: Expresa el volumen  $V$  del cilindro como una función de  $r$ .)*

**Ejercicio 603** *Se desea construir un recipiente cilíndrico de metal sin tapa que tenga una capacidad de  $\text{lm}^3$ . Encuentre las dimensiones que debe tener para que la cantidad de material sea mínima, suponiendo que no se desperdicia nada en la construcción.*

**Ejercicio 604** *Una ventana tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Halle las dimensiones de la ventana que permiten admitir más luz, suponiendo que el perímetro debe ser de 5m.*

**Ejercicio 605** *Se desea que la páginas de un libro tengan un área de  $900\text{cm}^2$  con márgenes de 2.5cm abajo y a los lados, y de 1.5cm arriba. Determinar las dimensiones de la página que darán la mayor área posible para el texto.*

**Ejercicio 606** *Un hotel que cobra \$80 (dolares) diarios por habitación, da precios especiales a grupos que reserven entre 30 y 60 habitaciones. Si se ocupan más de 30 cuartos, el precio disminuye en \$1 por cada cuarto arriba de los 30. En estas condiciones ¿la ocupación de cuántas habitaciones por un grupo producen el ingreso neto máximo?*

**Ejercicio 607** *Calcule el volumen del cono circular recto más grande que se puede inscribir en una esfera de radio  $R$ .*

**Ejercicio 608** *Dos postes verticales de 3 y 4 metros se hallan clavados en un suelo a nivel y sus bases distan 5 metros. Calcule la longitud mínima de cable que se necesitan para tener dos tramos rectos desde la punta de uno de los postes hasta un punto en el suelo y de ahí hasta la punta del otro poste.*

**Ejercicio 609** *La suma que se gasta en el combustibles para la caldera de un barco es proporcional al cubo de la velocidad. Es sabido que si el barco marcha a 10km por hora, se gastan 30 dolares por hora de combustibles. Los demás gastos que no dependen de la velocidad son de 480 dolares por hora.*

*¿A qué velocidad del barco es mínima el gasto total por un kilometro?*

**Ejercicio 610** *Se desea construir un silo para almacenar grano con una capacidad de  $r\pi/3$ . El silo ha de tener la forma de un cilindro rematado por una bóveda semiesférica. Si el costo de construcción por metro cuadrado es el triple en la parte semiesférica que en la parte cilíndrica. Calcule las dimensiones del silo que hace mínimo el costo de construcción.*

**Ejercicio 611** *Se desea construir una caja de base cuadrada de volumen  $252\text{ cm}^3$ .*

*Determinar las dimensiones de la caja para que el costo de fabricación sea mínimo, si se sabe que:*

*El costo de las tapa es \$ 2 por  $\text{cm}^2$*

*El costo de la base es \$ 5 por  $\text{cm}^2$*

*El costo de los lados es \$ 3 por  $\text{cm}^2$ .*

# Problemas de Certámenes

## Capítulo 1

I.- Determine cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

1.  $(\forall x, y \in \mathbb{R})(x + y \neq 0 \Rightarrow \frac{x}{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$
2.  $(\forall x \in \mathbb{R})(\sqrt{4x^2} = \pm 2|x|)$
3.  $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 = 16 \iff x = 4 \text{ o } x = -4)$
4.  $(\forall x)(\forall y)(x, y \in \mathbb{R}^+)(\frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x})$
5. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$  entonces  $\frac{a}{b} < 1$
6.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|}{|1-x|} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| > |1-x|\}$
7.  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (x < 10 \Rightarrow \frac{1}{10} < \frac{1}{x})$
8.  $(\forall a \in \mathbb{R} - \{0\})(\forall b \in \mathbb{R})(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} \leq 1)$
9.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+)(\forall b \in \mathbb{R}^+)(\forall c \in \mathbb{R}^+)(a \leq b \Rightarrow a \leq bc)$
10.  $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (\frac{|x|}{x^2+y^2} \leq |x|)$
11.  $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (3|x| \leq |y| \Rightarrow \frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2})$
12.  $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (x^2 \leq y^2 \Rightarrow \frac{|x|}{|y|} \leq 1)$
13.  $\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{\frac{x}{1-x}} \leq 1\} = \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x} \leq \sqrt{1-x}\}$
14. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$ . Si  $a < b$  entonces  $1 < \frac{b}{a}$
15.  $\{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|}{|2-x|} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} / |x| > |2-x|\}$
16.  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad (x - 7 < 0 \Rightarrow \frac{1}{7} > \frac{1}{x})$
17.  $(\forall x \in \mathbb{R} - \{0\})(\forall y \in \mathbb{R})(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x} \leq 1)$
18. Si  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $ab \geq 0$  entonces  $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$
19.  $(\forall a, b \in \mathbb{R}^-)(a < b \Rightarrow a^2 > b^2)$

20. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{x}{\sqrt{-x} - x} < 0$$

es vacío

- 21.
- $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad (x^2 \leq x^4)$

- 22.
- $\sup\{x \in \mathbb{R} / x^4 + 3x^2 - 4 = 0\} = \sqrt{2}$

23. El infimo de
- $\{x \in \mathbb{R} / \frac{2x+5}{x} > 1\}$
- es -5

24. El supremo del conjunto
- $A = \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- es 0.

25. El supremo del conjunto

$$\{x \in \mathbf{Z} : |x^2 - 3| < 4\} \text{ es } \sqrt{7}$$

- 26.
- $(\forall x, y \in \mathbb{R} - \{0\}) \left( \frac{\sqrt{|x|} \cdot y}{|x| + y^2} \leq |x| \right)$

27. Si
- $x$
- satisface la ecuación
- $\sqrt{5x+1} = \sqrt{2x-2} + 2$
- entonces el valor de la expresión
- $\frac{\sqrt{5x+1}}{\sqrt{2x-2}}$
- es 2.

**II Completación:**

1. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\sqrt{x-2}}{|x-2| - |1-x|} \leq 0 \text{ es } \dots\dots\dots$$

2. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{\sqrt{x-2}}{|3-x| - |x-2|} \leq 0 \text{ es } \dots\dots\dots$$

3. La inecuación

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x+2-x^2} \leq 9^{ax^2-2x}$$

tiene como solución el conjunto de los  $\mathbb{R}$  si  $a \in \dots\dots\dots$ 

4. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 - 2x + 1}} \leq |x - 1| \text{ es } \dots\dots\dots$$

5. La inecuación

$$3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{5x+2+x^2} \leq 9^{ax^2-2x}$$

tiene como solución el conjunto de los  $\mathbb{R}$  si  $a \in \dots\dots\dots$ 

6. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{-|x-1|^3(-|x-2|)^{-5}}{|x^2+2|} > 0 \text{ es } \dots\dots\dots$$

7. El conjunto solución de la inecuación

$$\frac{(x^2 + 7x + 10)(x^2 - 3x + 4)}{|x + 3|} < 0 \text{ es } \dots\dots\dots$$



8. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 - 6x + 9}} \geq \frac{3}{4} \text{ es } \dots\dots\dots$$

9. El conjunto solución de la inecuación

$$\sqrt{\frac{1}{x^2 + 4x + 4}} \geq 1 \text{ es } \dots\dots\dots$$

10. Sean  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\delta \in \mathbb{R}^+$  el conjunto  $\{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| < \delta\}$  es el intervalo .....

11. Si  $x \in \mathbb{R}^+$ ,  $y \in \dots\dots\dots$ ,  $z \in \mathbb{R}^-$  entonces se verifica

$$\frac{z}{xy} \leq \frac{z}{x}$$

12. La proposición

$$(\alpha + 1)x^2 - 4x + (\alpha - 1) > 0$$

es verdadera ssi  $\alpha \in \dots\dots\dots$

13. Las soluciones del sistema

$$\left. \begin{array}{lcl} x & = & 2\lambda x \\ y & = & 4\lambda y \\ z & = & \lambda z \\ 2x^2 + 4y^2 + z^2 & = & 8 \end{array} \right|$$

son .....

14. Dos tuberías tardan 6 horas en llenar una piscina. Una sola la llenaría 5 horas más de prisa que la otra entonces cada tubería tardaría individualmente en llenar la piscina ..... y ..... respectivamente

### III.- Desarrollo

1. Si el radio del cilindro recto disminuye en un 10% mientras que su altura aumenta en un 12%.

en que tanto por ciento varía;

a) el volumen del cilindro

$$V_c = \pi r^2 h$$

b) el área lateral del cilindro.

$$A_c = \pi r h$$

2. Resolver

$$\left. \begin{array}{lcl} x^2 - y^2 & = & 2\lambda(xy - 3) \\ 2(3 - xy) & = & \lambda(x^2 - y^2) \\ 3x^2y - 6x - y^3 & = & 0 \end{array} \right|$$

## Capítulo 2

### I.- Determine cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

1. Si  $\log_x(5) < 1$  entonces se tiene que  $5 < x$ .

2. El conjunto solución de la inecuación

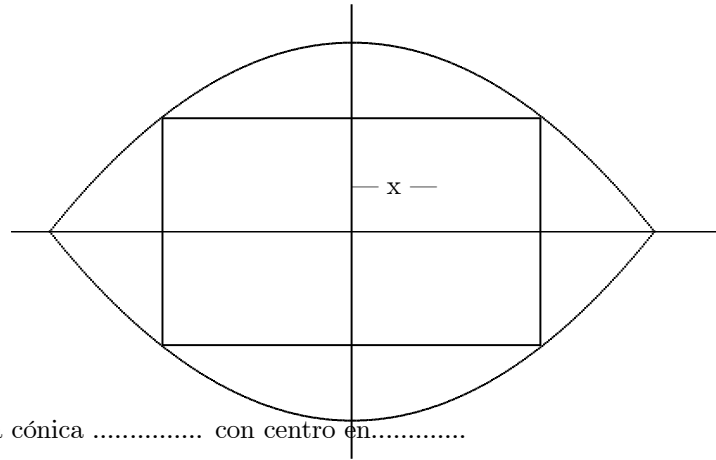
$$\frac{\log_5 x}{\log_5(1/3)} \leq 1 \text{ es } [3, \infty[$$

3.  $2\log 2 + (1 + \frac{1}{2x})\log 3 - \log(\sqrt[3]{3} + 27) = 0$ , la ecuación anterior no tiene solución positiva
4. Si  $\log_a b = 3$  y  $\log_a c = 2$  entonces  $\log_c b^2 = 3$  y  $bc = a^5$
5.  $\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{\log_2(x)} > 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 > \log_2(x)\}$
6. Para todo  $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  se tiene  $\log_b(a^2) \leq \log_b(a^3)$ .
7.  $\sup\{x \in \mathbb{R} \mid x^4 + x^2 - 6 = 0\} = \sqrt{2}$
8.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad (\log(a) < \log(a^2))$
9. La inecuación
 
$$\log_{1/2}(ax^2 + 1) < \log_{1/2}(a)$$
 tiene como conjunto solución todos los reales ssi  $a \in ]0, 1[$
10.  $(\forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}) \quad (\log_b(x) \leq 1 \Rightarrow x \leq b)$
11. Si  $f$  es inyectiva entonces  $f$  es creciente o bien decreciente
12. Sea  $f(x) = x^2 - 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x+1}$ , entonces el  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$
13.  $(\forall a \in \mathbb{R}^+) \quad (\log(a) < \log(a^3))$
14.  $(\forall b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}) \quad (\log_b(\frac{1}{x}) \leq 1 \Rightarrow 1 \leq xb)$
15. Si  $f$  es biyectiva entonces  $f$  es creciente o bien decreciente
16. Sea  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $g(x) = \sqrt{x-1}$ , entonces el  $\text{Dom}(f \circ g) = \mathbb{R}$
17. El valor mínimo de la función  $f(x) = x(x-3)$  es  $-9/4$
18. Sea  $f: D \longrightarrow [3, \infty[$   
 $x \longmapsto e^{-x} - 1$   
 entonces el dominio máximo de  $f$  es  $[-\ln(4), \infty[$
19. Sean  $f(x) = \sqrt{2-x}$ ;  $g(x) = \ln(x^2 + 9)$  funciones entonces el dominio máximo de la función  $g \circ f$  es  $] -\infty, 11[$ .
20. Si  $f$  es una función inyectiva entonces  $f$  es estrictamente decreciente
21. La solución de la inecuación  $\log_x(x + 1/2) < 1$  es vacío.
22. Si  $f(x) = \ln(x+4)$  y  $g(x) = e^x + 3$  son funciones entonces  $(g \circ f)(x) = x + 7$  y su dominio es  $\mathbb{R}$
23. Si  $f$  y  $g$  son funciones biyectivas entonces el producto  $f \cdot g$  es biyectiva
24. Si  $\alpha > 0$ , la función  $f(x) = \ln(\alpha x^2 + 1)$  tiene mínimo absoluto.

## II Completación:

1. La recta  $y = 5x + b$  no intersecta a la parábola  $y = 2x^2 - 2x + 3$  si  $b \in \dots\dots\dots$
2. La parábola  $x^2 - 2x - ay - 2a + y = -3$ , con centro en  $(1, -2)$  se abre hacia arriba si y sólo si  $a \in \dots\dots\dots$
3. La ecuación de la recta que pasa por el centro de la elipse  $2x^2 - 4x + 3y^2 + 6y = -4$  y es paralela a la recta  $2x + 3y = 1$  es  $\dots\dots\dots$
4. La relación  $x^2 - y^2 - 4x + 2y + 4 = 0$  representa la cónica  $\dots\dots\dots$  con vértice en  $\dots\dots\dots$

5. Sea ABCD el rectángulo con lados paralelos a los ejes inscrito en la elipse  $16x^2 + 4y^2 = 64$ . Entonces la función que representa el área del rectángulo en función de  $x$  es: .....



6. La relación  $x^2 - y^2 + 4x - 2y + 4 = 0$  representa la cónica ..... con centro en.....
7. Para  $a \in \dots\dots\dots$  y  $b \in \dots\dots\dots$  la función (parábola)  $f(x) = -x^2 + ax + b$  es decreciente en  $[2, \infty[$
8. El dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 6) - 1}$  es .....
9. El dominio de la función  $f(x) = \sqrt{\log(x^2 - 1) - 1}$  es .....
10. La solución de la inecuación

$$\frac{\log_{1/3}(|x| - 2)}{\log_{1/3} 4} \geq \log_9(3)$$

es .....

11. Si la función  $f$  se define como

$$f : ] - 2, \infty[ \setminus \{4\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \frac{1}{|x| - 4}$$

entonces el recorrido de la función  $f$  es .....

12. Sea  $f : D \rightarrow [e^{-2}, e^1[$ ;  $f(x) = (\frac{1}{27e})^{3x-1}$  entonces el dominio máximo de  $f$  es .....
13. Sea  $f(x) = \log(-x)$  y  $g(x) = x^2 + bx - b$  funciones, entonces el conjunto de todos los  $b \in \mathbb{R}$  tal que el dominio de  $f \circ g$  es vacío es .....
14. Sea  $f(x) = \log((x - 3)^2)$  y  $g(x) = \sqrt{4 - x}$ , entonces el dominio máximo de  $g \circ f$  es .....
15. El dominio de la función

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \sqrt{1 - x^2}}}{x^2}$$

es .....

16. Considere la función  $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 1 & x \geq 0 \\ x^2 + b & x < 0 \end{cases}$  entonces  $f$  es inyectiva si y sólo si  $a \in \dots\dots\dots$  y  $b \in \dots\dots\dots$
17. La relación  $y^2 = 2 - x$  define una función biyectiva en .....
18. Sea  $f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ 2x & , x \geq 0 \end{cases}$  y  $g(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 1 \\ \sqrt{x} & , x \geq 1 \end{cases}$  entonces  $g \circ f(x)$  es .....
19. El conjunto de los puntos  $x$  tal que  $f(x) = \sqrt{(x + 2)(x - 3)}$  tiene un valor mínimo es .....

20. Sea  $f: ]0, \infty[ \setminus \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}$  entonces el recorrido es .....  

$$x \longmapsto \frac{1}{x-1} + 3$$
21. Sea  $f: \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{-1\}$  una función biyectiva entonces  $f^{-1}(x)$  es igual a .....  

$$x \longmapsto \frac{x+1}{1-x}$$
22. la función  $f(x) = 2x - |x|$  definida en  $[-2, 5]$  tiene un máximo absoluto en  $x = \dots\dots\dots$  y un valor mínimo absoluto igual a  $\dots\dots\dots$
23. La función que representa el volumen (en función de  $h$ ) del cilindro circular recto inscrito en un cono de  $20\text{cm}$  de altura y  $5\text{cm}$  de radio, es  $f(h) = \dots\dots\dots$  y su dominio es  $\dots\dots\dots$
24. El dominio de la función  $f(x, y) = \frac{\ln(1-x-y)}{x+y}$  es el conjunto  $\dots\dots\dots$   
 y la gráfica de este conjunto es  $\dots\dots\dots$
25. Si  $f(x) = e^{\sqrt{1-x^2}}$ .
- $f$  es estrictamente creciente en  $\dots\dots\dots$
  - $f$  es estrictamente decreciente en  $\dots\dots\dots$
  - $f$  alcanza su valor máximo en  $\dots\dots\dots$
  - El valor mínimo de  $f$  es  $\dots\dots\dots$

### III.- Desarrollo

- La orilla de una piscina forma un rectángulo de 40 pies de largo y 20 pies de ancho. Su profundidad aumenta uniformemente de 3 a 7 pies en un tramo horizontal de 24 pies y después continúa al mismo nivel los restantes 15 pies, como se ilustra en la figura, la cual muestra una sección transversal. Si la piscina se está vaciando, alcanzando un nivel  $h$  en el lado más profundo. Determine el volumen  $V(h)$  del agua en función de la altura  $h$ , especificando su dominio.
- La compañía de arriendo de autos "Jimenez", arrienda chevette a \$ 10.500 por día y 40 pesos por kilómetro recorrido, mientras que la compañía "Arancibia" arrienda el mismo tipo de auto a \$ 8900 por día y a 60 pesos por kilómetro.
  - Si  $x$  representa el número de kilómetros recorrido en un día, encuentre la función  $C_A(x)$  que representa el costo por arrendar un chevette en la compañía "Arancibia" en ese día.
  - Cuántos kilómetros se debe recorrer en el día para que me convenga arrendar el auto de la compañía "Jimenez".

- Resolver la siguiente inecuación

$$\log_{3x}(9x) + \log_3(x^3) \leq 2$$

- Determine el dominio de la función

$$f: D \subset \mathbb{R} \longrightarrow [2, \infty[ \\ x \longmapsto \frac{|x+2|}{x-1}$$

## Capítulo 3

I.- Determine cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

- Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$  entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \frac{\sin n}{n}$  existe.
- Si  $\{a_n\}$  es una sucesión decreciente entonces  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$  existe

3. La sucesión  $\{a_n\}$  es convergente donde

$$a) \quad a_n = \begin{cases} n^3, & n \leq 2000 \\ \frac{1}{n}, & n > 2000 \end{cases} \quad b) \quad a_n = \begin{cases} n^3, & n > 2000 \\ \frac{1}{n}, & n \leq 2000 \end{cases}$$

4. La sucesión  $\{a_n\} = \{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})\sqrt{n+3}\}$  converge a  $1/2$

## II Completación:

1. El valor del límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-2}{n+1} \right)^n + \frac{3n}{\sqrt[4]{16n^4+5}}$$

es .....

2. Sea  $a_n = \frac{3^n}{n} x^{2n}$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

ssi  $x \in \dots$

3. El valor del límite es

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{2n}{\sqrt[3]{n^3+5}} + \frac{2^n + \cos(n!)}{2^{n+1} + 1} \right] \text{ es } \dots$$

4. El límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + \cos(n)}{3^n + 4} = \dots$$

5. El valor del límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n) + (-1)^n + 5^{3n+1}}{n + 5^n}$  es .....

6. El valor del límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{2(n+1)} + |\sin(9^n)|}{9^n 4 + 5^n}$  es .....

7. Sea  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$ , entonces el gráfico de  $f$  es .....

8. El límite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{n^2+1}{n^3-1}\right)} = \dots$$

9. El límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n}$  es .....

10. El límite  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n(\sqrt{9n^2+3} - \sqrt{9n^2+5}))$  es .....

11. Sea  $a_n = \frac{n!(x-1)^n}{n^n}$  entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$$

si y sólo si  $x \in \dots$

12. El valor del límite siguiente

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8n^3+2n}}{n} + \frac{\cos(1/n)}{4^n+5}$$

es .....

## III.- Desarrollo

1. Sea

$$\begin{array}{llll} f: ]1, \infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \log_5(\sqrt{x-1}) & \end{array} \quad \begin{array}{llll} g: \mathbb{R} - \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ x & \longmapsto & \frac{5^x - 1}{5^{-x} - 5^x} & \end{array}$$

- Determine si  $f$  es biyectiva ( si no lo es restringir  $f$  de modo que lo sea) y encuentre  $f^{-1}$  (especificando su dominio)
- Determine la función  $g \circ f$  (especificando su dominio)
- Calcule los siguientes límites (si existen)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) \quad \lim_{x \rightarrow 2} (g \circ f)(x)$$

## Capítulo 4

### I.- Determine cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

- Sea  $f(x)$  una función continua en  $\mathbb{R}$  y  $f(n) = n^2$ , además, sea

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)} g(x) = 5,$$

entonces se puede decir que

$$\lim_{x \rightarrow (1/2)^+} (f \circ g)(x) = 5.$$

- El valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n+1} - \cos(1/n)}{3^n + 5 \cdot 4^n}$  es  $\frac{2}{5}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 5n) \sin(\frac{1}{n^2 + 5n}) = 1$
- Sea  $f$  y  $g$  funciones. Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  no existe entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  no existe.
- 

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-4| - 1}{3-x} \text{ no existe}$$

- El límite  $\lim_{x \rightarrow 5/2} [3x]$  existe.
- El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(1/x)}{(1/x)}$  es 1
- El límite  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x)}{(x)}$  es 1
- El límite  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{(x-\pi)}$  es 1
- Para demostrar que  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ ; dado  $\epsilon$  positivo, basta tomar  $\delta = \frac{\epsilon}{|x+2|}$ , así se tiene  $|x-2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \epsilon$ .
- Sea

$$f(x) = \begin{cases} 3x+7 & x \geq -1 \\ \frac{x^2+5x+4}{x^2-1} & x < -1 \end{cases}$$

Determine el valor de verdad de la siguiente afirmaciones

- $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$
  - $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 4$
  - $f$  es continua en todo  $\mathbb{R}$
- El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x)}{x-1}$  es  $-\pi$
  - El límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x \cdot \ln(\frac{1}{x^2})$  no existe.
  - Sean  $f$  y  $g$  funciones.  
Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  existe y  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  no existe entonces  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  no existe.

15.  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)}{\operatorname{sen}(2x)}$
16.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x} + \pi\right)$  no existe.
17.  $\lim_{x \rightarrow a} f$  y  $\lim_{x \rightarrow a} g$  no existen, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)$  no existe .
18. El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow -4} [x]|x+4|$  es 0.
19. Si límite de  $f$  cuando  $x \rightarrow a$  existe y límite de  $g$  cuando  $x \rightarrow a$  no existe, entonces  $\lim_{x \rightarrow a} (f+g)$  no existe.
20. Todas las funciones siguientes son continuas en  $H$
- (a)  $f(x) = \sqrt{x}$ ;  $H = \mathbb{R}^+ - \{1\}$
- (b)  $f(x) = \frac{x^2-1}{x+1}$ ;  $H = \mathbb{R} - \{-1\}$ .
- (c)  $f(x) = \begin{cases} 3 & x \geq 1 \\ \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} & x < 1 \end{cases}$  ;  $H = \mathbb{R}^+$
21. La función  $f(x) = \begin{cases} \frac{\pi \operatorname{sen}(1/(x-1))}{1/(x-1)} & x \neq 1 \\ \pi & x = 1 \end{cases}$  es continua en 1.

## II Completación:

1. El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{(x-4) \cos(\pi x)}$  es .....
2. El límite  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)^{-2}}{1+\cot^2(x-5)} \cdot \frac{\operatorname{sen} 3(x-5)^2}{x^2-10x+25}$  es .....
3. El límite  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sqrt{ax}-|a|}{ax-a^2}$ ,  $a < 0$  es .....
4. El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{-2}}{1+\cot^2(x)}$  es .....
5. Los valores de  $A$  y  $B$  tal que la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} 2(x-1)}{x-1} & , x > 1 \\ Ax^2 + 2 & , x = 1 \\ Bx + 5 & , x < 1 \end{cases}$$

resulta continua en todos los reales son  $A \in \dots\dots\dots$   $B \in \dots\dots\dots$

6. Sea

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+27}{x^2-9} & x \leq 0 \\ -3 \cos(x+\pi) & x > 0 \end{cases}$$

Definida en un dominio apropiado, subconjunto de  $\mathbb{R}$

- (a) El máximo dominio de continuidad de  $f$  es .....
- (b)  $f$  tiene discontinuidad reparables en los puntos .....
- (c) El conjunto de los puntos en que  $f$  tiene discontinuidad irreparables es .....
7. Sea  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-|b|}{x-b^2}$ , con  $b < 0$ , entonces el valor del límite de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a  $b^2$  es .....
8. Sea  $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 5 & x > 1 \\ \alpha x + 2 & x = 1 \\ 13x + \beta & x < 1 \end{cases}$  Entonces los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que permiten que la función  $f(x)$  sea continua en  $x = 1$  son  $\alpha = \dots\dots\dots$  y  $\beta = \dots\dots\dots$

9. Los valores de  $A$ ,  $B$  que permiten que

$$f(x) = \begin{cases} 2Ax + x^2 & , \quad x > 1 \\ B(x-1) + 5 & , \quad x = 1 \\ 5x + B & , \quad x < 1 \end{cases}$$

sea continua en  $x = 1$  son .....

10. Sea  $a \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi a(1-x^2)}{\sin \pi x} & 0 < x < 1 \\ x + a & x \geq 1 \end{cases}$$

la función  $f$  es continua en  $x = 1$  ssi  $a = \dots\dots\dots$

11. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(ax)}{x} - \frac{\sin(bx)}{x} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{x^2 - a^2}{x - a} & x > 0, x \neq a \end{cases}$$

$f$  será continua en  $x = 0$  ssi  $a = \dots\dots\dots, b = \dots\dots\dots$

### III.- Desarrollo

$$1. f(x) = \begin{cases} \frac{1 - \cos(x/3)}{x} & , x < 0 \\ 2x + 2a + 1 & , x = 0 \\ \frac{a\sqrt{x^2 + x^3}}{x} + b & , x > 0 \end{cases} \quad \text{donde } a, b \text{ son números reales fijos:}$$

- Calcule el límite lateral derecho de  $f$  en 0.
- Calcule el límite lateral izquierdo de  $f$  en 0.
- Calcule los límites laterales de  $f$  en -1.
- Encuentre los valores de  $a$  y  $b$ , para que  $f(x)$  sea continua en -1
- Encuentre los valores de  $a$  y  $b$ , para que  $f(x)$  sea continua en 0

## Capítulo 5

### I.- Determine cual de las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique

- Si  $g$  no es derivable en  $a$  pero continua en  $a$  y  $f$  es derivable en  $a$  entonces el producto  $f \cdot g$  no es derivable en  $a$ .
- Sean  $\alpha > 0$ , la función  $f(x) = e^{\alpha x^2}$  tiene sólo un máximo en los reales.
- La ecuación de la recta tangente a la curva definida implícitamente por

$$y = \arcsin(xy)$$

en el punto  $(1/2, 0)$  es  $2x - 2y = 1$ .

- La función  $f(x) = (x-1)^{2/3}$  no tiene mínimo
- La función  $f(x) = \sqrt{x-2}$  no tiene máximo y no tiene mínimo.
- Si  $g(x) = \sec(5x) + x$  y  $f'(x) = 3e^{2x}$  entonces  $(f \circ g)'(0) = 3e^2$



7. Si la velocidad de crecimiento de la base de un triángulo es de 3 m/seg y la altura 4 m/seg, entonces la velocidad de crecimiento de su área en el instante que cuando su base es de 12 metros y su altura de 20 metros es de 54 m<sup>2</sup>/seg
8. Toda función acotada tiene extremos
9. La función  $f(x) = \sqrt[4]{1-x}$  no tiene extremo.

## II Completación:

1. Dada las funciones  $f$  y  $g$  definidas por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & x < 0 \\ x+2 & x \geq 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1} & 1 \leq x \leq 5 \\ -x+7 & x > 5 \end{cases} \quad \text{entonces}$$

- (a) El Recorrido de  $f$  es .....
- (b) El Dominio de  $g \circ f$  es .....
- (c)  $(g \circ f)(x) = \left\{ \begin{array}{l} \end{array} \right.$
- (d) La derivada de la función  $g \circ f$  en el punto 2 es .....
2. Si  $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{1-ax} & x \leq 0 \\ \operatorname{sen} x + b & x > 0 \end{cases}$
- (a)  $f$  es continua en  $x = 0$  si y sólo si  $a \in \dots\dots\dots$  y  $b \in \dots\dots\dots$
- (b)  $f$  es derivable en  $x = 0$  si y sólo si  $a \in \dots\dots\dots$  y  $b \in \dots\dots\dots$
3. El valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\csc x} \text{ es } \dots\dots\dots$$

- 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 + \cos(2x))^{\csc^2(3x)} \text{ es } \dots\dots\dots$$

5. Considere  $g(x) = \begin{cases} \sec x + \tan x & 0 < x < \pi/2 \\ \sqrt{x - \pi/2} & x \geq \pi/2 \end{cases}$  el valor del límite

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} (e^{(\pi/2-x) \tan(x)} + g(x)) \text{ es } \dots\dots\dots$$

6. Si  $f'(x) = e^{\frac{4x}{\pi}}$ ,  $g(x) = \cos(\frac{\pi 2^x}{2})$  entonces  $(f \circ g)'(0) = \dots\dots\dots$

7. Si

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \ln(x) & x > 1 \\ 2x + 1 & x = 1 \\ \cos(2x) & x < 1 \end{cases}$$

entonces  $f'(x) = \dots\dots\dots$

8. La derivada de  $g(x) = (\sqrt{x})^{\cos x} + \frac{\arcsen(x^3)}{\sqrt[3]{x^4}}$  es  $g'(x) = \dots\dots\dots$

9. Si

$$f(x) = \begin{cases} 2x \cos(x) & x < 0 \\ 3x & x = 0 \\ \sqrt{x^3 + 4x^2} & x > 0 \end{cases}$$

entonces  $f'(x) = \dots\dots\dots$

10. La derivada de

$$f(x) = \frac{\sqrt{3} \sec(x) \cdot e^{x^2}}{\log_5(x^3 + 1)}$$

es  $\dots\dots\dots$

11. La derivada de

$$f(x) = \operatorname{sen}(x^2 + 1)^{\arctan(x+2)}$$

es  $\dots\dots\dots$

12. La derivada de

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{sen}(x - 2) & x > 2 \\ x - 2 & x \leq 1 \end{cases}$$

13. Sea  $f(x) = \log_3 x$  entonces el dominio de la derivada de  $f(x)$  es  $\operatorname{Dom} f' = \dots\dots\dots$

14. Sea  $f$  una función con derivada  $\frac{df}{dx} = 2x + 1$  y  $g(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen} x$ , entonces el valor de  $(f \circ g)'(\pi)$  es  $\dots\dots\dots$

15. Sea  $H(x) = \sqrt[3]{f(e^{ax} \ln(x))}$ , con  $f(x)$  una función derivable en  $\mathbb{R}$ , entonces  $H'(x)$  en  $\mathbb{R}^+$  es  $\dots\dots\dots$

16. Sea  $f(x) = (x^2 + 1)^{\operatorname{sen}(x)}$ , entonces  $f'(x)$  es  $\dots\dots\dots$

17. Sea  $f(x) = \begin{cases} x + a & x > 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x \leq 0 \end{cases}$  entonces el valor  $a$  que hace derivable la función  $f$  en  $\pi/4$  es  $\dots\dots\dots$

18. Sea  $f(x) = (x^2 + 14)^{\arcsen(x^3 + 1)}$  entonces  $\frac{df}{dx} \big|_{x=1} =$

19. Sea  $f(x) = (\operatorname{sen}(x^4 + \frac{\pi}{2}))^{\sqrt{x^3 + 5}}$  para  $x \in ] - \pi/8, \pi/8[$  entonces  $\frac{df}{dx}$  es igual a  $\dots\dots\dots$

20. La derivada de  $y = (x^{2x})^{3x}$  con  $x \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$  es  $\dots\dots\dots$

21. Sea  $f(x)$  la función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A \operatorname{sen}(x)}{x^3 + B} & x > \pi \\ x^3 + B & x \leq \pi \end{cases}$$

La función es derivable en  $\pi$  si los valores de  $A$  y  $B$  son  $\dots\dots\dots$

22. Sea  $a \in \mathbb{R}^*, b, c \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} (x - \sqrt{\pi})^3 + 2ax & x < \sqrt{\pi} \\ c & x = \sqrt{\pi} \\ \cos(\sqrt{(x^4 + \pi^2)/2}) + \frac{bx}{a} & x > \sqrt{\pi} \end{cases}$$

(a)  $f$  es continua en  $\sqrt{\pi}$  para los siguientes valores de  $a, b, c, \dots\dots\dots$

(b)  $f$  es derivable en  $\sqrt{\pi}$  para los siguientes valores de  $a, b, c, \dots\dots\dots$

23. Sea  $f(x) = \begin{cases} x^3 & x > 0 \\ \operatorname{sen}(x) & x = 0 \\ 4x^2 & x < 0 \end{cases}$  entonces la derivada de  $f$  es  $\dots\dots\dots$

24. Sea  $3x^2y^2 + \tan(y^3) = 1$ , entonces en un conjunto apropiado la derivada de  $y$  con respecto a  $x$  es:  
 $\frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots$
25. Dada la relación  $\sin(\frac{\pi}{4} \cos(x^3) + y^2 - 4) = \frac{\sqrt{2}}{2}$  ella define cerca del cero una función derivable  $f$ , entonces la derivada de  $\frac{df}{dx} \big|_{x=0}$  es.....
26. Sea  $H(x) = xF^{-1}(x) - \cos(F^{-1}(x))$ , con  $F'(x) \neq 0$  para todo  $x$  entonces la derivada de  $H(x)$  es  $H'(x) = \dots\dots\dots$
27. Los lados de un triángulo de perímetro mínimo con área fija  $A$ , así como también fija su base  $b$  son .....
28. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función dada parametricamente por

$$\begin{cases} x &= 3(t-1)^2 + 5 \\ y &= 6t^3 - \sin(t) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

en el punto  $(8, 0)$  es .....

29. La función  $f(x) = (x^2 - 1)^4$  es creciente en el siguiente conjuntos .....
30. La ecuación de la recta tangente a la curva  $x \ln y + y^2 = \sin(xy)$  en  $(\pi/2, 1)$  es .....
31. La pendiente de la recta tangente a la gráfica de  $f(x) = \sqrt{x} + 2$  en el punto  $(1, 3)$  es.....
32. La derivada de una función  $f(x)$  es  $f'(x) = 3x + 7\sin(x-1)(x-2) + 8$  y  $f(1) = 2, f(2) = 3$  entonces  $(f^{-1})'(2) = \dots\dots\dots$
33. Sea  $f(x) = \sin(3x) \cos(2x) + 1$ , con  $x \in ]-\pi/8, \pi/8[$ , entonces la derivada de la función inversa en el punto 1, es decir,  $\frac{df^{-1}}{dx}(1)$  es .....
34. sea  $f(x) = 2\sin(x) \cos(x)$ ,  $x \in ]\pi/4, 3\pi/4[$  entonces la derivada de la función inversa en el punto  $0, (\frac{df^{-1}}{dx}(0))$  es .....
35. El límite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\tan(x)}$$

es .....

36. El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{(1/2x)}$  es .....
37. El valor del límite  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1 - x)^{\cos(\pi x/2)}$  es .....
38. Dada la curva  $xy + y^3x^2 = 1$  en forma implícita. Cuantos puntos de la función  $y = f(x)$  tiene recta tangente paralela a eje  $x$  .....
39. Un jardín es diseñado con la forma de un sector circular de ángulo  $\theta$  y radio  $r$  como en la figura. El jardinero cuenta con semillas sembrar  $Am^2$ . Para determinar las dimensiones del jardín de tal forma que se gaste lo menos posible en cercalo entonces la función a minimizar en la variable  $r$  es .....
40. El rectángulo ABCD de área máxima inscrito entre la gráfica de  $y = x^3$ , el eje OX (un lado sobre este eje) y la recta  $x = 2$  tiene área igual a .....
41. El rectángulo ABCD de área máxima inscrito entre la parábola  $y = 4x^2$ , el eje OX (uno de los lados en este eje) y la recta  $x = 6$  tiene área igual a .....
42. Sea  $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  un polinomio con coeficientes  $a, b, c$ , entonces  $p(x)$  tiene un máximo local en  $x = -1$  y un mínimo local en  $x = 3$  si sus coeficientes son iguales a .....

43. Dos trenes se alejan de un cruce que forma un ángulo de  $90^\circ$  a velocidades de  $160\text{km/h}$  y  $120\text{km/h}$ . Cuando el primer tren esta a  $80\text{km}$  del cruce entonces la velocidad con que se estan alejando los trenes es de .....
44. Las asíntotas verticales de  $f(x) = \frac{(x-2)\text{sen}x}{x^3+x^2-6x}$  son (es) .....
45. Los puntos de inflexión de  $y = \ln(\frac{x^2+1}{x^2})$  son .....
46. La gráfica de  $f(x) = x^2$  tiene infinitas rectas tangentes (una por cada punto). Dos de esta rectas tangente pasa por el punto  $(1, 0)$ , una de ella es la tangente a otro punto. El punto es .....
47. La gráfica de la función  $f(x) = (x^2 - 1)^4$  tiene puntos de inflexión en .....
48. La gráfica de  $f(x) = (x^2 - 1)^4$  es .....
49. Sea  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ ,  $f'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2(3x^2+1)}{(x^2-1)^3}$  entonces
- (a)  $f$  es creciente en .....
  - (b)  $f$  es concava (hacia arriba) en .....
  - (c)  $f$  tiene asíntota vertical en .....
  - (d)  $f$  tiene asíntota horizontal en .....
50. Las asíntotas de  $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$  son .....
51. La ecuación de la recta tangente a la curva  $y = f(x)$  definida implícitamente por la relación
- $$\tan(xy^4) - 2\ln(\sqrt{y}) = 0$$
- en  $(0, 1)$  es .....
52. La ecuación de la recta tangente a la curva  $(2x + 3y)^2 - (3x - 2y)^2 = 24$  en  $(1, 1)$  es .....
53. La función  $f(x) = \pi^x$  es estrictamente creciente en .....
54. La función  $y = (\text{sen}x)^2 + x$  definida en  $[0, \pi]$  tiene un máximo en  $x = \dots\dots\dots$
55. La función  $f(x) = x^2e^x$  es estrictament decreciente sólo en el intervalo .....
56. La velocidad de desvalorización de un equipo por el uso del mismo es proporcional en cada momento a su costo real  $y$ . La expresión que representa el enunciado anterior donde  $k$  es una constante positiva y  $t$  es el tiempo es .....

### III.- Desarrollo

1. Derive

$$i) y = \sqrt[3]{x^2} \tan(x^2) \quad ii) y = \ln(\arccos(3x)) \quad iii) y = \log_{x^2}(3x)$$

2. Calcular las derivada de

$$\log_x(10) \cdot 10^{\sin(x)} + \frac{3x + \arcsin(\cos(x^2))}{\tan(\cos 7x) + \sqrt{x}}$$

3. Utilice la ecuación del Ovalo de Cassini.

$$(x^2 + y^2 + 4)^2 - 16x^2 = 36,$$

- (a) Encuentre  $\frac{dy}{dx}$

- (b) ¿Se puede encontrar las ecuaciones de la recta tangente al ovalo de Cassini en los puntos  $(1, 2)$  y  $(2, \sqrt{2})$ ?
- (c) Encuentre la recta tangente en los puntos anteriores en los que se puedan.
4. Sean  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .  
Determinar si la función  $y = \alpha e^{ax} + \beta x e^{ax}$  es solución de la ecuación diferencial
- $$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2a \frac{dy}{dx} + a^2 y = 0, \quad a \text{ constante}$$
5. Se desea construir un tanque de acero con la forma de un cilindro circular recto y semiesferas en los extremos (ver la figura) para almacenar gas propano. El costo por pie cuadrado de los extremos es el doble del de la parte cilíndrica, donde el costo del metro cuadrado del cilindro es  $P$ . ¿Qué dimensiones minimizan el costo si la capacidad deseada es de  $10\pi$  pie<sup>3</sup>?  
Ayuda:  $V_c = \pi r^2 h$   $V_e = \frac{4}{3}\pi r^3$   $A_c = 2\pi r h$   $A_e = 4\pi r^2$
6. Un campesino tiene dinero para comprar 1500 metros de alambre de puas, tal campesino desea cercar con 5 hebras de alambres un terreno rectangular en su predio, en caso que  $x$  represente un lado del rectángulo, determine la función  $A(x)$  área del terreno cercado con este alambre en terminos de  $x$ . Mediante, la gráfica de la función  $A(x)$  encuentre las dimensiones del terreno con máxima área
7. Se desea construir un estanque en forma cónica (recto) con capacidad para  $\frac{8000\pi\sqrt{2}}{3}$  litros. si 1 litros de impermeabilizante cubre  $\pi\sqrt{3}m^2$  de superficie. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del cono para que se use una cantidad mínima de impermeabilizante? ¿Cuántos litros se deben comprar para pintar tal cono?  
Ayuda: Superficie de un cono de radio  $r$  y altura  $h$  es  $\pi r\sqrt{r^2 + h^2}$  y su volumen es  $\frac{1}{3}\pi r^2 h$ . Cuidado con las unidades
8. Dos fábricas A y B que se encuentran a 4 millas una de la otra, emiten humo con partículas que contaminan el aire de la región. Suponga que el número de partículas proveniente de cada fábrica es directamente proporcional a la cantidad de humo e inversamente proporcional al cubo de la distancia desde la fábrica. ¿Qué punto entre A y B tendrá la menor contaminación si la fábrica A emite el doble de humo que la fábrica B?
9. Calcular las dimensiones del cono invertido (de modo que los ejes coinciden) de volumen máximo que se puede inscribir en un cono de altura  $a$  cm y radio  $b$  cm. Cuál es el volumen máximo.
10. Una escalera de 20 pies de largo está apoyada contra una muralla. El pie de la escalera es arrastrado, alejándola de la muralla a razón de 2 pies por segundo ¿A qué velocidad se desliza hacia abajo el extremo superior de la escalera en el instante que el pie de ella, está a 12 pies de la muralla?
11. Considere  $f(x) = (1 + \frac{1}{x})^x$
- Determine  $\text{Dom} f$
  - Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
  - Calcule  $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$   
(Ayuda : Calcule  $\lim_{u \rightarrow 0^+} u \cdot f(1/u)$ )
  - Calcule  $b = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$
  - ¿Qué puede decir de los límites (3) y (4) cuando  $x \rightarrow -\infty$ ? (son iguales o distintos).
  - Grafique  $y = f(x)$ , considerando la información obtenida anteriormente y sabiendo que las gráficas de  $f'(x)$  y  $f''(x)$  son
12. Sea  $f$  la función continua  $]-7, 20]$  salvo en los puntos  $-3$  y  $10$  y que satisface lo siguiente

- (a)  $\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -2$   
 (b)  $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = 2$   
 (c)  $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 3$   
 (d)  $\lim_{x \rightarrow -20^-} f(x) = 3$   
 (e)  $\lim_{x \rightarrow 10} |f(x)| = +\infty$   
 (f) la tabla

|       |              |    |    |              |   |              |   |   |              |              |    |
|-------|--------------|----|----|--------------|---|--------------|---|---|--------------|--------------|----|
| x     | -7           | -5 | -3 | -1           | 0 | 1            | 3 | 5 | 10           | 20           |    |
| f'(x) | <del>2</del> | +  | +  | <del>2</del> | 8 | <del>2</del> | 0 | 0 | <del>2</del> | +            | 0  |
| f(x)  | <del>2</del> | -  | -  | 3            | 5 | 0            | 5 | 3 | 6            | <del>2</del> | 20 |

Grafique f

13. Considere, para el análisis y la gráfica de la función  $f$   
 $f(x) = \frac{-2(x-1)^3}{(x-2)^2}$ ;  $f'(x) = \frac{-(x-1)^2(x-4)}{(x-2)^3}$  y  $f''(x) = \frac{-12(x-1)}{(x-2)^4}$ .

Indicar en la tabla siguiente:

- (a) Determine el  $\text{Dom} f$   
 (b) Los valores de  $x$  donde la gráfica cambia de comportamiento.  
 (c) Los sectores de crecimiento y decrecimiento  
 (d) los sectores donde la gráfica es concava hacia arriba y donde es concava hacia abajo.

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| Puntos Importante              |  |
| Signo de $f'(x)$               |  |
| Signo de $f''(x)$              |  |
| Crecimiento y<br>Decrecimiento |  |
| Concava y convexa              |  |

- (e) Las asíntotas verticales son  
 (f) Las asíntotas oblicuas son  
 (g) Grafique

14. Considere, para el análisis y la gráfica de la función  $f$ ,  
 $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$ ;  $f'(x) = \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$  y  $f''(x) = \frac{6x}{(x-1)^4}$ .

Indicar en la tabla siguiente:

- (a) Determine el  $\text{Dom} f$   
 (b) Los valores de  $x$  donde la gráfica cambia de comportamiento.  
 (c) Los sectores de crecimiento y decrecimiento  
 (d) los sectores donde la gráfica es concava hacia arriba y donde es concava hacia abajo.

|                                |  |
|--------------------------------|--|
| Puntos Importante              |  |
| Signo de $f'(x)$               |  |
| Signo de $f''(x)$              |  |
| Crecimiento y<br>Decrecimiento |  |
| Concava y convexa              |  |

- (e) Las asíntotas verticales son
- (f) Las asíntotas oblicuas son
- (g) Grafique