

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES

C.Hardy

Ecuaciones Diferenciales Lineales

La ecuación diferencial lineal tiene la forma:

$$f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f(x) \quad / \text{ dividiendo por } f_1(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + \frac{f_2(x)}{f_1(x)}y = \frac{f(x)}{f_1(x)}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x)$$

Llamaremos factor integrante a

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x) \quad , \text{ multiplicamos por } \mu(x)$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot e^{\int p(x)dx} + p(x)y \cdot e^{\int p(x)dx} = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

DERIVADA DE LA MULTIPLICACIÓN

$$\frac{d}{dx}[y \cdot e^{\int p(x)dx}] = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}$$

$$d[y \cdot e^{\int p(x)dx}] = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx \quad , \text{ integrando}$$

$$y \cdot e^{\int p(x)dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx$$

$$y = \frac{\int q(x) \cdot e^{\int p(x)dx} dx}{e^{\int p(x)dx}} + C$$

Ejemplo:

$$(x + 1) \frac{dy}{dx} - 2y = (x + 1)^4 \quad / : (x + 1)$$

Siempre $\frac{dy}{dx}$ debe quedar
"SOLO"

1

$$\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x+1}y = (x+1)^3$$

2

$$p(x) = -\frac{2}{x+1}$$
$$q(x) = (x+1)^3$$

Obtener el factor integrante:

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

3

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x+1}dx}$$

$$\mu(x) = e^{-2\ln(x+1)}$$

$$\mu(x) = e^{\ln(x+1)^{-2}}$$

$$\mu(x) = (x+1)^{-2}$$

Multiplicar por el factor integrante

4

$$\frac{dy}{dx} \cdot (x+1)^{-2} - \frac{2}{x+1}y \cdot (x+1)^{-2} = (x+1)^3 \cdot (x+1)^{-2}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot (x+1)^{-2} - 2(x+1)^{-3}y = x+1$$

5

$$\frac{d}{dx}[y \cdot (x+1)^{-2}] = x+1$$

Derivada de la multiplicación

$$d[y \cdot (x+1)^{-2}] = (x+1)dx$$

Integrar

6

$$y \cdot (x+1)^{-2} = \int (x+1)dx$$

$$y \cdot (x+1)^{-2} = \frac{x^2}{2} + x + C$$

7

$$y = \frac{\frac{x^2}{2} + x + C}{(x+1)^{-2}}$$

Ejercicios

1 $e^x \frac{dy}{dx} + e^x y = 2x^2$

2 $x \frac{dy}{dx} + y = x$

3 $\frac{dy}{dx} - xy = \frac{11}{8}x$