



Modelamiento de Sistemas I

Sesión 3
Segundo Semestre 2021

Modelamiento de Sistemas I

Objetivos de la sesión

Analizar las implicancias de los diversos planteamientos de modelos en las ciencias.

Analizar las razones y proporciones matemáticas como una herramienta para la resolución de problemas.

Analizar situaciones problemáticas que se puedan responder a partir de planteamientos matemáticos.

Proponer modelos matemáticos que sean capaces de responder a diversas situaciones problema.

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática: razones y proporciones

Desde el punto de vista matemático ¿Qué es una razón?

Razón

En matemáticas una razón es la comparación de dos cantidades, por medio de una división o cociente.

La razón entre a y b , cuando b es un número distinto de cero se escribe como:

$\frac{a}{b}$ o $a : b$ y se lee « a es a b »

Por ejemplo, la razón entre 6 y 5 se escribe:

$\frac{6}{5}$ o $6 : 5$ y se lee «seis es a cinco»



TIPS

En una razón escrita como fracción:

El numerador recibe el nombre de antecedente

$\frac{a}{b}$

$b \neq 0$

El denominador recibe el nombre de consecuente

El denominador debe ser distinto de cero

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

¿Cómo se calcula una razón?

Debemos determinar el valor que tiene, el que se establece realizando la división entre el antecedente y el consecuente.

a) El valor de la razón entre 1 y 2 es:

$$\frac{1}{2} \rightarrow 1:2 \rightarrow \begin{array}{r} 1:2 = 0,5 \\ 10 \\ 0/ \end{array}$$

3) Escriba la razón entre la distancia (d) recorrida por un automóvil y el tiempo (t) empleado:



TIPS

Velocidad es una razón entre la distancia y el tiempo.

a) $d = 300 \text{ km}$ $t = 3 \text{ h}$

b) $d = 588 \text{ km}$ $t = 12 \text{ h}$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Desde el punto de vista matemático ¿Qué es una proporción?

Proporción

La proporción es la igualdad entre dos o más razones, se escribe como:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k \quad \text{o} \quad a:b = c:d = k \quad b, d \neq 0 \quad \text{y para que pueda existir la razón } a, c \neq 0$$

Se lee: «*a* es a *b* como *c* es a *d*»

k: Constante de proporcionalidad

a, *d*: Se denominan extremos de la proporción.

b, *c*: Se denominan medios de la proporción.



TIPS

Se denomina **Constante de proporcionalidad (*k*)** al resultado de la división de las razones, **el cual es el mismo para cada una de ellas** en una proporción.



Ejemplos:

a) $\frac{7}{3} = \frac{14}{6} = 2,\overline{3}$

b) $\frac{10}{50} = \frac{5}{25} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} = 0,2$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Teorema fundamental de las proporciones (TFP)

En una proporción, el producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c \quad b, d \neq 0 \text{ y para que pueda existir la razón } a, c \neq 0$$

Recíprocamente, dos productos iguales pueden escribirse como una proporción:

$$a \cdot d = b \cdot c \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad b, d \neq 0 \text{ y para que pueda existir la razón } a, c \neq 0$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Teorema fundamental de las proporciones (TFP): Ejercicios

a) $20 \cdot 3 = 12 \cdot 5$

b) $a \cdot b = 24$

TIPS

Recordar que producto de los extremos es igual al producto de los medios:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Resolución de ecuaciones

Para resolver ecuaciones, se suele aplicar el teorema fundamental de las proporciones

$$\frac{x}{6} = \frac{25}{5}$$

$$5x = 6 \cdot 25$$

$$x = \frac{6 \cdot \cancel{25}^5}{\cancel{5}}$$

$$x = 30$$

- Aplicando el TFP:
- Los productos de medios y extremos son iguales
- Dividimos por 5 a ambos lados de la igualdad.
- Operando

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Con los datos expuestos, escriba una proporción y calcule el valor de la incógnita:

a) 5, 7, 15, x

¿Por qué se obtuvieron distintos valores para la misma incógnita?

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

1. En un curso de la Escuela Naval, la razón entre la cantidad de hombres y mujeres es 3 : 2. Si hay 24 hombres ¿Cuántos estudiantes hay en total en el curso?

Sugerencia: extraer los datos e incógnita del problema.

Datos:

H: número de hombres en el curso

M: número de mujeres en el curso

La razón entre H y M es 3 : 2.

En el curso hay 24 hombres.

$$H : M = 3 : 2$$

$$H : 3 = M : 2$$

Podemos reemplazar $H = 24$ en la proporción.

$$H : 3 = M : 2$$

$$24 : 3 = M : 2$$

$$\frac{24}{3} = \frac{M}{2}$$

$$M = 16$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

2. Un gáster y su ayudante reciben por la instalación de tres sanitarios en las dependencias de la Escuela Naval \$ 270.000, los que se reparten en la razón 7 : 2, ¿cuánto dinero recibirá cada uno?

Datos:

g: dinero que recibirá el gáster

a: dinero que recibirá el ayudante

Gáster mas ayudante reciben
\$270.000

El dinero se reparte en la razón 7 : 2

$$g : a = 7 : 2$$

$$g + a = 270.000$$

Podemos despejar g de la proporción

$$g = \frac{7}{2}a$$

Reemplazamos g en $g + a = 270.000$

$$270.000 = \frac{7}{2}a + a$$

$$a = 60.000$$

Reemplazando a en $g + a = 270.000$, podemos determinar cuánto recibe el gáster.

$$g = 210.000$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

3. El perímetro de la cancha de fútbol de la Escuela Naval mide 432 metros. Si la razón entre el ancho y el largo es 5 : 7, ¿cuánto mide cada lado de la cancha?

Datos:

a: medida del ancho de la cancha
l: medida del largo de la cancha
El perímetro mide 432 metros
La razón entre el ancho y largo es 5 : 7

$$\frac{a}{5} = \frac{l}{7}$$

$$a : l = 5 : 7$$

En la proporción,
podemos despejar a:

$$a = \frac{5}{7} l$$

Reemplazamos a en $2a + 2l = 432$

$$432 = 2 * \frac{5}{7} l + 2 l \qquad l = 126$$

Reemplazando l en la misma
expresión anterior ($2a + 2l = 432$)

$$a = 90$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

4. A una cantidad de lápices entregados en la Escuela Naval se les sumó 6 unidades, la cual se dividió entre 8 cadetes. Al valor resultante, se le sumaron 5 lápices y esta nueva suma se dividió entre 2 cadetes, obteniendo como resultado 4 lápices cada uno. ¿Cuántos lápices entregó la Escuela Naval?

Sea x el número buscado

$$\frac{(x + 6)}{8}$$

$$\frac{(x + 6)}{8} + 5$$

$$\frac{\frac{(x+6)}{8} + 5}{2} = 4$$

$$x = 18 \text{ lápices}$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

5. El gasto de consumo eléctrico en la Armada se dividen en dos áreas, las reparticiones en tierra y los buques. El costo monetario total en un año correspondió a \$ 48.000 millones de pesos, de tal manera que la parte que consumió menos equivale a los $\frac{5}{7}$ de la parte que consumió más. Determine cuánto fue el costo energético de las reparticiones y buques de la Armada respectivamente.

Sea **R** el área que consumió más.

$\frac{5}{7}R$: el área que consumió menos.

$$\frac{5}{7}R + R = 48.000 \qquad 7R + 5R = 336.000$$

$$R = 28.000$$

$$\frac{5}{7}R \longrightarrow \frac{5}{7} * 28.000 = 20.000$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

6. Un cadete compró cierto número de libros a 2 por US\$ 5 y los vendió a 2 por US\$ 7, ganando en la operación US\$ 8. ¿Cuántos libros compró el cadete?

Sea L la cantidad de libros comprados.

$$\frac{7}{2}L - \frac{5}{2}L = 8$$

$$7L - 5L = 16$$

$$L = 8$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

7. El profesor de modelamiento de sistemas vendió su auto en \$ 8.000.000 más la tercera parte de lo que le había costado, y en esta operación ganó \$ 2.000.000. ¿Cuánto le costó el auto al profesor?

Sea V el valor el auto.

$$8.000.000 + \frac{V}{3} = V + 2.000.000$$

$$24.000.000 + V = 3V + 6.000.000$$

$$V = 9.000.000$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

1. Se ha repartido una herencia entre 3 herederos. El heredero A recibió \$ 30 menos que la mitad de la herencia; el heredero B recibió \$ 20 más que los $\frac{3}{7}$ de la herencia y el tercer heredero (C), recibió el monto restante, que eran \$ 30. ¿cuánto recibieron los herederos A y B?

$$\text{A recibió: } \frac{X}{2} - 30$$

$$\text{B recibió: } \frac{3X}{7} + 20$$

$$\frac{X}{2} - 30 + \frac{3X}{7} + 20 + 30 = X$$

$$A = 110$$

$$X = 280$$

$$B = 140$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

2. Una familia gasta $\frac{3}{5}$ de su sueldo anual en arreglos de la casa, $\frac{1}{8}$ en ropa, $\frac{1}{20}$ en paseos y ahorra 810 euros al año. ¿Cuánto es el ingreso anual de la familia?

$$X - \frac{3X}{5} - \frac{X}{8} - \frac{X}{20} = 810$$

$$X = 3600$$

Modelamiento de Sistemas I

Recordemos algunos aspectos de la matemática

Ejercicios

Sea A la edad de la primera persona

3. Dos personas tienen la misma edad. Si la primera tuviera 10 años menos y la segunda 5 años más, la edad de la primera sería $\frac{2}{3}$ de la segunda. ¿Cuál es la edad de la primera persona?

$$A = B$$

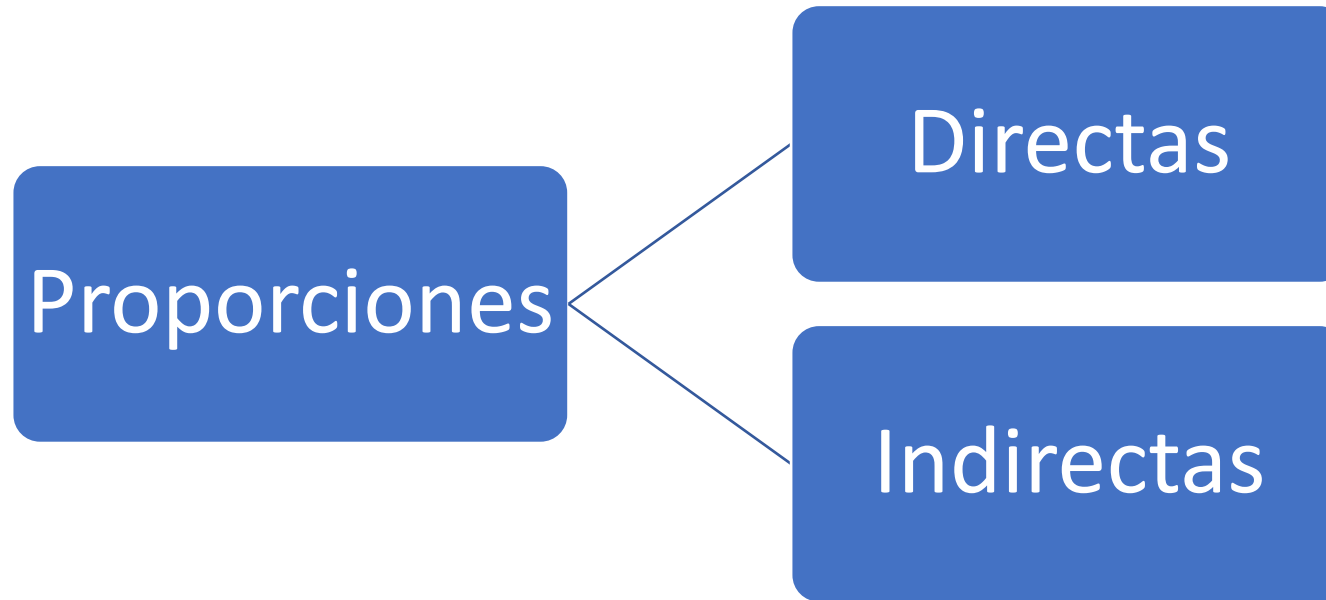
$$X - 10 = \frac{2}{3}(x + 5)$$

$$A = 40$$

Modelamiento de Sistemas I

Aspectos matemáticos que nos servirán para proponer modelos

Las proporciones son de gran utilidad para el desarrollo de modelos matemáticos que sean capaces de responder a diversas situaciones problemáticas, pero no solo existe un solo tipo de proporciones.

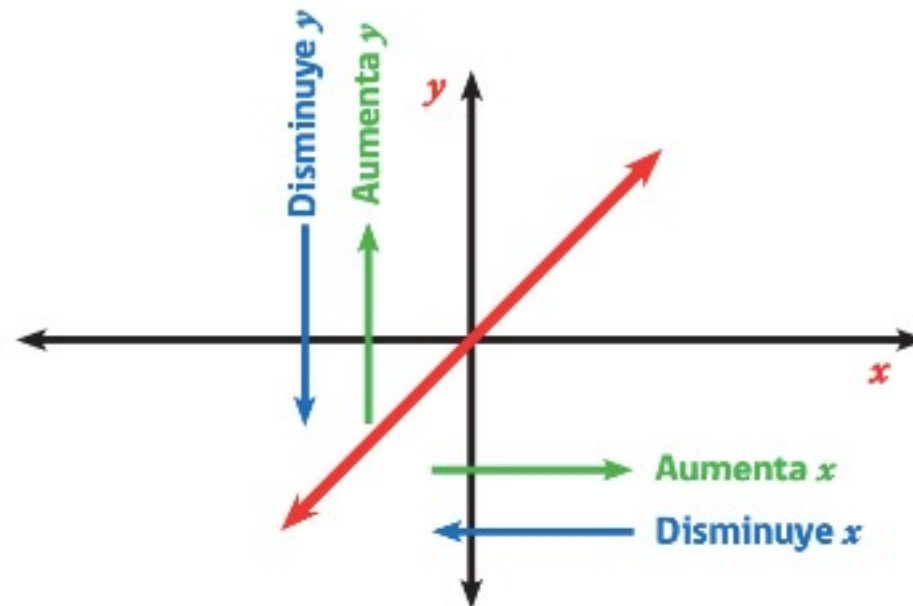


Modelamiento de Sistemas I

Proporciones directas

Se dice que a es directamente proporcional a b si al aumentar a , b también aumenta manteniendo la proporcionalidad o si al disminuir a , b también disminuye manteniendo la proporcionalidad.

Ingredientes	4 personas	6 personas	8 personas	10	12
Harina (gramos)	30	45	60	75	X
Huevos	2	3	4	5	9
Harina/huevos	$30/2 = 15$	$45/3 = 15$	$60/4 = 15$	$75/5 = 15$	



Modelamiento de Sistemas I

Proporciones directas: veamos el siguiente caso

Comparemos la siguiente información de un kiosko que vende agua mineral.

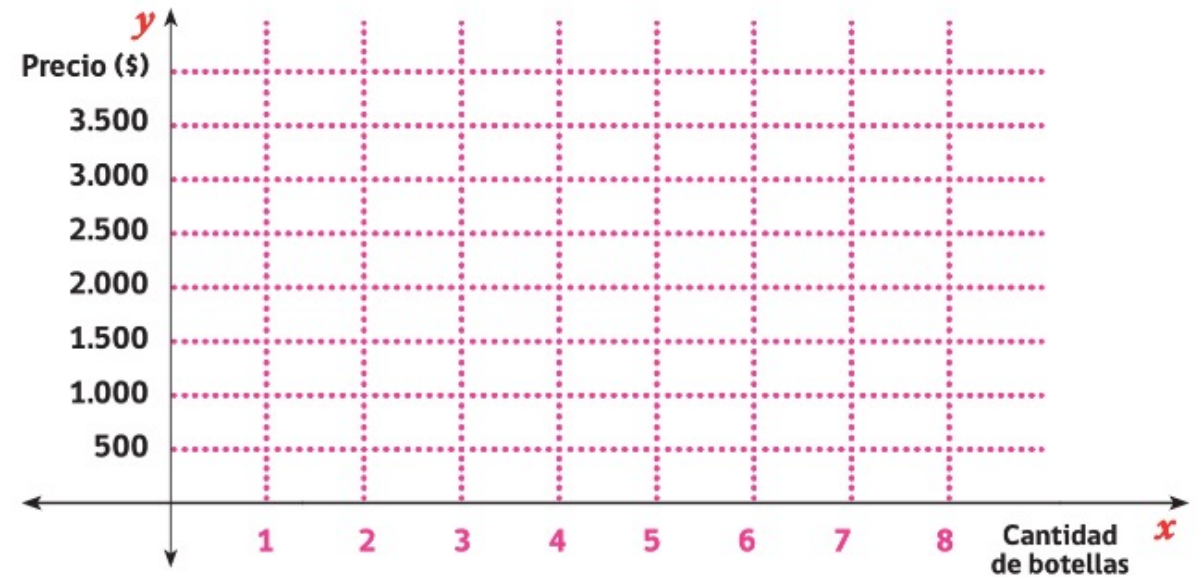
Nº de botellas de agua mineral	1	2	5	8	12	17	24	48
Precio (\$)	500							

¿Cuál es la razón entre el precio y el número de botellas de agua vendidas?

La razón, ¿es constante? ¿por qué?

La cantidad de dinero que recaudará y el número de botellas que venda son directamente proporcionales? ¿Por qué?

Con la información anterior grafique:



¿Cuá será el costo de 6 botellas? ¿y de 33?

Modelamiento de Sistemas I

Proporciones directas: veamos el siguiente caso

Durante una jornada de trabajo, 6 operarios cavan una zanja de 80 metros de longitud. ¿Cuántos metros cavarán 42 operarios trabajando en las misas condiciones?

a) Datos del problema:

Nº de operarios	Longitud de la zanja
6	80
42	x

$$\frac{6}{42} = \frac{80}{X}$$

$$X = 560$$

Modelamiento de Sistemas I

Proporciones directas: veamos el siguiente caso

Resolver la siguiente situación: pastel de papas para 4 personas.

Instrucciones

Pelar, lavar y poner a cocer las papas en agua fría con sal. Escurrir y pasarlas por cedazo. Preparar el puré con la mitad de la mantequilla y la leche. Revolver bien. Picar la carne en cuadritos y la cebolla en plumas. Aliñar con sal y pimienta. Freír en una sartén con mantequilla durante 15 minutos. En una fuente enmantequillada, poner una capa de puré, luego el pino de carne, los huevos, y cubrir con el resto del puré. Recubrir con queso rallado y llevar al horno caliente durante unos 20 minutos.

Ingredientes

- 1 kg de papas
- $\frac{1}{2}$ kg de carne
- $1\frac{1}{2}$ cebolla
- 2 huevos duros
- $\frac{1}{8}$ de queso rallado
- 4 cucharadas de aceite
- 4 cucharadas de mantequilla
- 1 taza de leche.
- Sal y pimienta a gusto

Cantidad de personas	Ingredientes							
	PAPAS	CARNE	CEBOLLAS	HUEVOS DUROS	QUESO RALLADO	CUCHARADAS DE ACEITE	CUCHARADAS DE MANTEQUILLA	TAZAS DE LECHE
4	1 kg.	$\frac{1}{2}$ kg.	$1\frac{1}{2}$ kg.	2	$\frac{1}{8}$ kg.	4	4	1
6								
8								
10								
12								

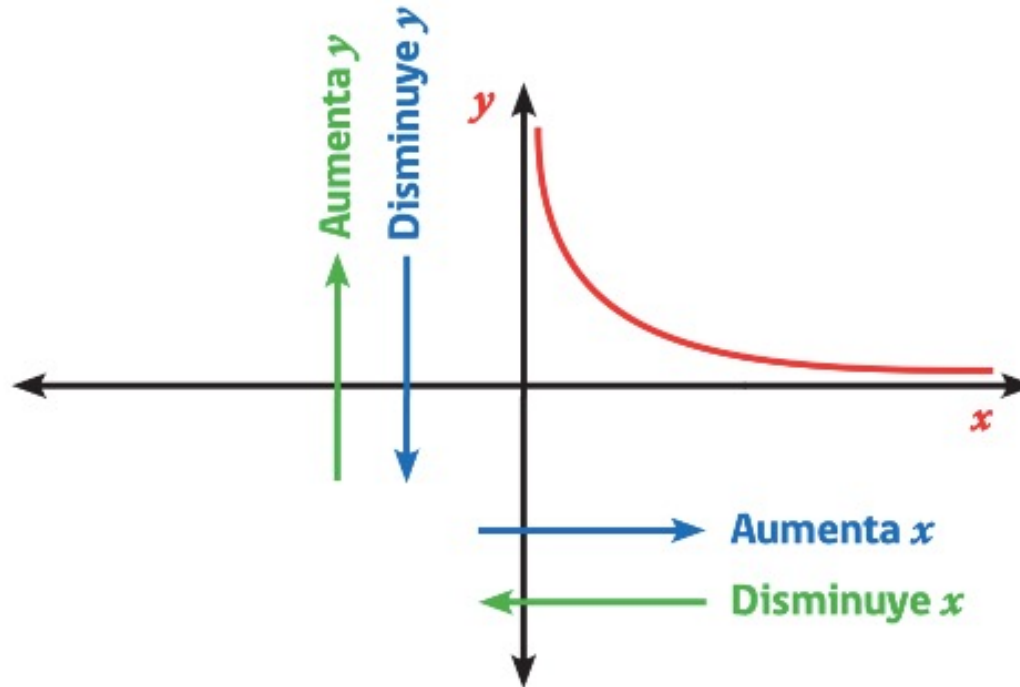
¿Por qué podemos utilizar la proporcionalidad directa para completar la tabla?

Modelamiento de Sistemas I

Proporciones inversa

Se habla de una proporcionalidad inversa cuando dos variables a y b son inversamente proporcionales, es decir, cuando aumenta una, la segunda disminuye en la misma proporción.

¿En qué situaciones se puede observar una proporcionalidad inversa?



Modelamiento de Sistemas I

Proporciones inversa : veamos el siguiente caso

Si 25 máquinas de overlock producen cierta cantidad de poleras en 120 horas. ¿Cuántas horas demoran 60 máquinas iguales en producir la misma cantidad de poleras?

a) Datos de problema

Nº de máquinas Overlock	Nº de horas de trabajo
25	120
60	x

¿Cómo podríamos saber que este problema corresponde a una proporción indirecta?

b) Una inferencia nos ayudará a determinar que si la variable nº de máquinas overlock aumenta, la variable número de horas de trabajo disminuye en la misma razón; mientras que por el contrario si una variable disminuye, la otra aumenta en la misma razón.

c) Plantear la proporción como consecuencia del tipo de proporcionalidad y resolver.

Nº de máquinas

$$\frac{25}{60}$$

Horas de trabajo

$$\frac{120}{X}$$

Como corresponde a una proporción inversa, invertimos una de las razones y se realiza la operatoria matemática respectiva

Nº de máquinas

$$\frac{25}{60}$$

Horas de trabajo

$$\frac{X}{120}$$

$$\frac{25}{60} = \frac{X}{120}$$

$$X = 50$$

Modelamiento de Sistemas I

Proporciones inversa : veamos el siguiente caso

La rapidez de un automóvil es de 70 km/h y demora 5 horas en recorrer una cierta distancia. ¿Cuántas horas demorará en recorrer la misma distancia otro automóvil con una rapidez de 80 km/h?

Rapidez

$$\frac{70}{80}$$

Tiempo

$$\frac{5}{X}$$

b) Una inferencia nos ayudará a determinar que para una distancia constante, si la variable rapidez aumenta, la variable tiempo disminuye en la misma razón, por el contrario, si una variable disminuye la otra aumenta en la misma razón.

c) Plantear la proporción como consecuencia del tipo de proporcionalidad y resolver.

Rapidez

$$\frac{70}{80}$$

Tiempo

$$\frac{5}{X}$$

$$\frac{70}{80} = \frac{X}{5}$$

$$X = 4,375$$

Modelamiento de Sistemas I

Porcentaje (%)

El porcentaje corresponde a un número o cantidad que representa la proporcionalidad de una parte respecto a un total que se considera dividido en cien unidades. De esta manera, el cálculo de porcentaje es una aplicación de la proporcionalidad directa al comparar cantidades y unidades de medida con partes de un ciento. Matemáticamente se pueden proponer 2 procedimientos para calcularlo:

Método 1: aplicación directa

Para el cálculo del $t\%$ de una cantidad N .

$$\frac{t}{100} \cdot N$$

Método 2: utilizando proporciones

Se plantea una proporción asignando 100% al total.

$$\frac{t\%}{x} = \frac{100\%}{N}$$

Calcular el 8% de 450.

$$\frac{8}{100} \cdot 450 \rightarrow \frac{8 \cdot 450}{100} = 36$$

$$\begin{aligned} \frac{450}{100} &= \frac{x}{8} \\ 100x &= 450 \cdot 8 \rightarrow x = \frac{3.600}{100} \rightarrow x = 36 \end{aligned}$$

Modelamiento de Sistemas I

Porcentaje (%)

Un trabajador es notificado que recibirá un aumento de sueldo correspondiente a un 20% de la remuneración actual. Si recibe mensualmente \$675.000, ¿Cuánto será el dinero que recibirá una vez entre en vigencia la resolución?

$$\text{\$ 675.000} + 20\% = \text{Sueldo nuevo}$$

$$\begin{array}{l} \text{\$675.000} \text{ -----} > 100\% \\ X \text{ -----} > 20\% \end{array}$$

$$X = \text{\$135.000}$$

$$\text{Sueldo nuevo} = \text{\$810.000}$$

Un grupo de trabajadores es informado que sus sueldos serán reajustados en un 2 % mensual durante 10 meses por motivos de la situación nacional. Si el sueldo de un trabajador en enero es de \$ 200.000. ¿Cuánto recibirá en el último mes de reajuste?

Modelamiento de Sistemas I

Porcentaje (%)

Un pasaje de avión a la ciudad de Atenas cuesta regularmente \$835.000. Si la empresa ofrece pasajes con un 28% de rebaja. ¿Cuál será el costo del pasaje?

Un pasaje de avión a la ciudad de Estambul cuesta regularmente \$1.150.000. Si la empresa ofrece pasajes a un 28% del valor. ¿Cuál será el costo del pasaje?

Modelamiento de Sistemas I

Porcentaje (%)

La Escuela Naval el año anterior tenía 536 cadetes y esta año tiene 621. ¿En cuánto porcentaje varió la cantidad de cadetes?

Modelamiento de Sistemas I

Ejercicio de aplicación tipo prueba

En la Escuela Rural ubicada en sector del Salto del Laja, existen dos cursos mixtos, donde el curso 1 es al curso 2 como de 6 a 5. La cantidad de hombres aprobados del primer curso es igual 60% del curso, mientras que las mujeres reprobadas del segundo curso son 15. Hay 15 hombres aprobados en el segundo curso y éstos equivalen al 30% del total del curso. Los hombres reprobados del segundo curso son iguales a un tercio de las mujeres reprobadas del mismo curso. La cantidad de reprobados del primer curso es igual a la sexta parte del curso y de éstos la décima parte son mujeres.

- a.- Calcular el porcentaje de aprobados del segundo curso respecto del total de alumnos de ambos cursos.
- b.- Calcular la proporción de mujeres del segundo curso respecto del total de hombres de ambos cursos.
- c.- Calcular el porcentaje del total de reprobados, respecto del total de mujeres de ambos cursos.
- d.- Calcular la proporción de hombres aprobados del primer curso, respecto de las mujeres reprobadas del segundo curso.
- e.- Calcular el porcentaje de mujeres reprobadas del segundo curso, respecto de las mujeres aprobadas del primer curso.