



CERTAMEN 2
MATEMATICAS III

NOMBRE: _____ N°CAD: _____ CURSO: 3° _____

- 1. DOCENTE(S): S. Baquedano, C. Hardy, A. Rauch.
- 2. FECHA: 10 / 05 / 2024
- 3. UNIDAD TEMÁTICA: I- Integral Indefinida II- Integral Definida
- 4. TIEMPO: 80 min.
- 5. MATERIALES: de escritorio. Calculadora no algebraica.

INDICACIONES:

- Lea cuidadosamente la prueba antes de comenzar a responder. La comprensión de los enunciados es parte de la prueba.
- Todo resultado debe estar argumentado o justificado a través de sus cálculos explícitos en sus respuestas.
- Escriba con tinta o pasta, en orden, con limpieza y claridad. Si desea anular parte de su trabajo, tárjelo con una línea horizontal encima del escrito (---), no use corrector; no se corregirá lo escrito sobre corrector.
- No utilice lápiz grafito para responder, si utiliza grafito no podrá tener acceso a correcciones.

6. RESULTADOS OBTENIDOS:

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	38	
2	38	
3	24	
Puntaje total	100	



PREGUNTA N° 1 (38 puntos)

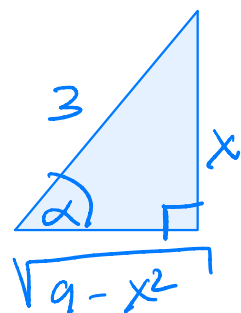
Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y métodos de integración en el cálculo de integrales.
Contenido: Integración por sustitución trigonométrica.

Resolver las siguientes integrales indefinidas, utilizando el método adecuado:

$$a) \int \frac{3}{(\sqrt{9-x^2})^3} dx =$$

$$x = 3 \sin(\alpha) \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{x}{3}$$

$$dx = 3 \cos(\alpha) d\alpha$$



$$= \int \frac{3}{(\sqrt{9-9\sin^2(\alpha)})^3} \cdot 3 \cos(\alpha) d\alpha$$

$$= \int \frac{9 \cos(\alpha) d\alpha}{(3 \cos(\alpha))^3} = \int \frac{9 \cos(\alpha)}{27 \cos^3(\alpha)} d\alpha$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{1}{\cos^2(\alpha)} d\alpha = \frac{1}{3} \int \sec^2(\alpha) d\alpha$$

$$= \frac{1}{3} \tan(\alpha) + C$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C //$$

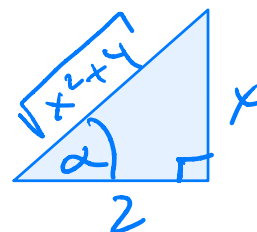


$$b) \int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}} dx =$$

$$x = 2 \operatorname{tg}(\alpha)$$

$$dx = 2 \sec^2(\alpha) d\alpha$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{x}{2}$$



$$\int \frac{(2 \operatorname{tg}(\alpha) + 2)}{\sqrt{4 \operatorname{tg}^2(\alpha) + 4}} \cdot 2 \sec^2(\alpha) d\alpha$$

$$= \int \frac{(2 \operatorname{tg}(\alpha) + 2) \cdot \cancel{2 \sec^2(\alpha)} d\alpha}{\cancel{2 \sec(\alpha)}}$$

$$= \int 2 \sec(\alpha) \cdot \operatorname{tg}(\alpha) d\alpha + \int 2 \sec(\alpha) d\alpha$$

$$= 2 \sec(\alpha) + 2 \ln |\sec(\alpha) + \operatorname{tg}(\alpha)| + C$$

$$= 2 \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + 2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2} \right| + C //$$



PREGUNTA N° 2 (38 puntos)

Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y métodos de integración en el cálculo de integrales.
Contenido: Integración por fracciones parciales.

$$a) \int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x} dx = \int \frac{4x-2}{x(x^2-x-2)} dx = \int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} dx$$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1}$$

$$4x-2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

$$\begin{aligned} \text{Si } x &= 0 \\ -2 &= -2A \end{aligned}$$

$$A = 1$$

$$\text{Si } x = 2$$

$$6 = 6B$$

$$B = 1$$

$$\text{Si } x = -1$$

$$-6 = 3C$$

$$C = -2$$

$$= \int \frac{1}{x} dx + \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{-2}{x+1} dx$$

$$= \ln|x| + \ln|x-2| - 2 \ln|x+1| + C //$$



$$b) \int \frac{3-2x}{(x-2)^2 (x^2+1)} dx =$$

$$\frac{3-2x}{(x-2)^2 (x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad / \cdot (x-2)^2 (x^2+1)$$

$$3-2x = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2$$

$$3-2x = (Ax-2A)(x^2+1) + Bx^2+B + (Cx+D)(x^2-4x+4)$$

$$3-2x = Ax^3 + Ax - 2Ax^2 - 2A + Bx^2 + B + Cx^3 - 4Cx^2 + 4Cx + Dx^2 - 4Dx + 4D$$

$$3-2x = x^3(A+C) + x^2(-2A+B-4C+D) + x(A+4C-4D) - 2A+B+4D$$

$$\begin{cases} A+C=0 \\ -2A+B-4C+D=0 \\ A+4C-4D=-2 \\ -2A+B+4D=3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = -6/25 \\ B = -1/5 \\ C = 6/25 \\ D = 17/25 \end{cases}$$

$$\therefore \int \frac{-6/25}{x-2} dx + \int \frac{-1/5}{(x-2)^2} dx + \int \frac{\frac{6}{25}x + \frac{17}{25}}{x^2+1} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x-2 \\ du &= dx \\ -\frac{1}{5} \int u^{-2} du \\ -\frac{1}{5} \frac{u^{-1}}{-1} \end{aligned}$$

$$+ \frac{6}{25} \int \frac{x}{x^2+1} dx + \frac{17}{25} \int \frac{dx}{x^2+1}$$

$$\begin{aligned} u &= x^2+1 \\ du &= 2x dx \\ \frac{du}{2} &= x dx \\ \frac{6}{25} \cdot \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \end{aligned}$$

$$= \frac{-6}{25} \ln|x-2| + \frac{1}{5} (x-2)^{-1} + \frac{3}{25} \ln|x^2+1| + \frac{17}{25} \arctg(x) + C //$$



PREGUNTA N° 3 (24 puntos: 8 – 16)

Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral definida en el cálculo de integrales definidas.
Contenido: Integral definida.

- a) Resolver la siguiente integral definida, indicando cada paso de su desarrollo:

$$\int_{-2}^3 (x^2 - 5x + 3) dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-2}^3$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} + 9 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 10 - 6 \right)$$

$$= -\frac{9}{2} - \frac{-56}{3}$$

$$= \frac{85}{6}$$

- b) Calcule

$$\int_{-1}^5 f(x) dx \quad \text{si} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; -1 \leq x \leq 3 \\ 8 & ; 3 < x < 4 \\ 2x & ; 4 \leq x \leq 5 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^5 f(x) dx = \int_{-1}^3 (x^2 - 1) dx + \int_3^4 8 dx + \int_4^5 2x dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-1}^3 + (8x) \Big|_3^4 + (x^2) \Big|_4^5$$

$$= \left[(9 - 3) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right] + [32 - 24] + [25 - 16]$$

$$= \frac{16}{3} + 8 + 9$$

$$= \frac{67}{3} //$$

