

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Catherine Hardy

La transformada de Laplace

- Definición: Sea f una función definida para $t \geq 0$, entonces se dice que la integral

$$\mathcal{L} \{f(t)\} = \int_0^{\infty} (e^{-st} \cdot f(t)) dt$$

Es la transformada de Laplace de f , siempre que la integral sea convergente

Ejemplo

Evalúe $\mathcal{L}(1)$

Aplicando la definición anterior (utilizando integral impropia) se obtiene $\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}$

Pero esto NO será necesario hacerlo (utilizar la definición) pues existen fórmulas que permiten obtener la transformada de Laplace de diferentes funciones :)

Propiedades:

Propiedades de Linealidad:

$$a) \mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} + \mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$b) \mathcal{L}\{\alpha f(t)\} = \alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$$

Fórmulas transformadas de Laplace (APRENDÉRSELAS)

(Fijarse que la función ingresa con la variable t y resulta una nueva función con la variable s)

$f(t) \xrightarrow{L} F(s)$	
1	$\frac{1}{s}; s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}; s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}; s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}; s > a$
$\text{sen } bt$	$\frac{b}{s^2 + b^2}; s > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2 + b^2}; s > 0$
$\delta(t)$	1

Ejemplos: evaluar las siguientes transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}(t^4) =$$

Según el formulario de la página anterior
ocupamos la segunda fórmula

$$\mathcal{L}(t^4) = \frac{4!}{s^5} = \frac{24}{s^5}$$

Recordar que:

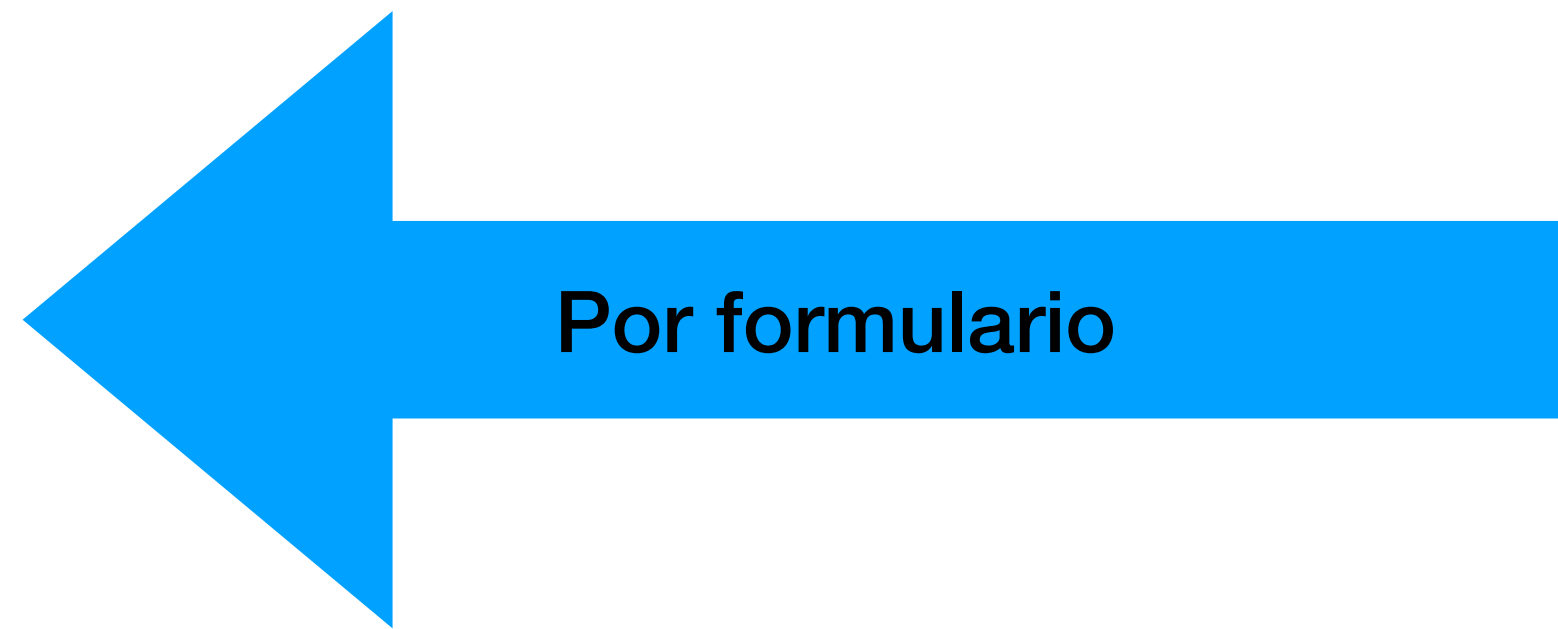
$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \dots \cdot 1$$

Ejemplo:

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplos

$$\mathcal{L}(e^{6t}) = \frac{1}{s - 6}$$



Calcular las siguientes transformadas de Laplace

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-t}\operatorname{sen}(t)+\operatorname{sen}(2t)}{\operatorname{sen}(t)}\right]$$

Sugerencia: Separar la suma y utilizar la identidad del seno del ángulo doble. Luego separar en dos transformadas y calcular según formulario

Utilizar propiedades

Propiedades de Linealidad:

$$a) \mathcal{L}\{f(t)+g(t)\}=\mathcal{L}\{f(t)\}+\mathcal{L}\{g(t)\}$$

$$b) \mathcal{L}\{\alpha f(t)\}=\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}$$

$$\mathcal{L}\left[\left(e^t-e^{-t}\right)^2\right]$$

Sugerencia: Resolver el cuadrado de binomio y luego separar en 3 transformadas y calcular según formulario

Utilizar propiedades