
Método de integración: Cambio de variable

Ejemplo 1. Calcule $\int (2x - 5)^{19} dx$.

Solución. El problema que se nos presenta ahora, es que quizás los cálculos al multiplicar 19 veces el factor $2x - 5$ quedan bastante extensos, por lo que se podría pensar que debemos realizar una especie de "cambio de variable", llamando $u = 2x - 5$, y así tener una integral más fácil de calcular. El siguiente teorema nos permite realizar esto.

Continuando la idea del ejemplo anterior, es importante mencionar que no todas las integrales pueden evaluarse en forma directa usando las integrales estándar vistas anteriormente. Sin embargo, muchas veces la integral dada puede reducirse a una integral estándar ya conocida mediante un cambio en la variable de integración. Tal método se conoce como **cambio de variable** (o **método de sustitución**) y corresponde a la regla de la cadena en diferenciación. Suponga que F es una antiderivada de f , de modo que

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

En esta ecuación podemos cambiar el nombre de la variable de x a u :

$$\int f(u) du = F(u) + C$$

Ahora, el teorema básico del método de sustitución establece que podemos reemplazar u por $g(x)$, en donde g es cualquier función diferenciable y esta ecuación permanece siendo verdadera. En este reemplazo, du se trata como una diferencial, en otras palabras,

$$du = g'(x) dx$$

Teorema 1. Sean $g : [a, b] \rightarrow [\alpha, \beta]$ y $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones y F una antiderivada de f , entonces:

1. $\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) du = F(u) + C = F(g(x)) + C$
2. $\int_a^\beta f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^b f(u) du = F(u)|_a^b$.

Ejemplo 2. Calcule:

1. $\int (2x - 5)^{19} dx$.

Solución. Si $u = 2x - 5$, entonces $du = 2dx$, es decir, $dx = \frac{1}{2}du$. Así,

$$\begin{aligned}\int (2x - 5)^{19} dx &= \int u^{19} \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int u^{19} du \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{u^{20}}{20} + C_1 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{(2x - 5)^{20}}{20} + C_1 \right) \\ &= \frac{(2x - 5)^{20}}{40} + C\end{aligned}$$

2. $\int x e^{x^2} dx$.

Solución. Si $u = x^2$, entonces $du = 2xdx$, es decir, $xdx = \frac{1}{2}du$. Así,

$$\begin{aligned}\int x e^{x^2} dx &= \int e^{x^2} \cdot x dx \\ &= \int e^u \cdot \frac{1}{2} du \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} (e^u + C_1) \\ &= \frac{1}{2} (e^{x^2} + C_1) \\ &= \frac{e^{x^2}}{2} + C\end{aligned}$$

3. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx$.

Solución. Si $u = 1 + x^3$, entonces $du = 3x^2 dx$, es decir, $x^2 dx = \frac{1}{3} du$. Así,

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx &= \int \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \cdot x^2 dx \\
&= \int \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot \frac{1}{3} du \\
&= \frac{1}{3} \int u^{-1/2} du \\
&= \frac{1}{3} \left(\frac{u^{1/2}}{1/2} + C_1 \right) \\
&= \frac{1}{3} \left(2\sqrt{1+x^3} + C_1 \right) \\
&= \frac{2\sqrt{1+x^3}}{3} + C
\end{aligned}$$

Ejercicios. 1. Usando un cambio de variable adecuado, determine las siguientes integrales:

- | | |
|---|---|
| (a) $\int (2x+1)^7 dx$ | (n) $\int \sqrt{x}(2+x\sqrt{x})^5 dx$ |
| (b) $\int \frac{1}{(2-5t)^2} dt$ | (o) $\int te^{t^2} dt$ |
| (c) $\int \frac{1}{2y-1} dy$ | (p) $\int \frac{e^{xn}}{x^{1-n}} dx$ |
| (d) $\int \frac{2u-1}{4u^2-1} du$ | (q) $\int \frac{e^{3/x}}{x^2} dx$ |
| (e) $\int e^{3x+2} dx$ | (r) $\int \frac{x}{e^x \sqrt{x}} dx$ |
| (f) $\int \frac{e^5}{e^x} dx$ | (s) $\int x^2 e^{x^3} dx$ |
| (g) $\int \frac{e^{2x+3}}{e^{1-x}} dx$ | (t) $\int \frac{(2x-1)e^{x^2}}{e^x} dx$ |
| (h) $\int (x^2+7x+3)^4 (2x+7) dx$ | (u) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{\sqrt{x} dx}$ |
| (i) $\int \frac{2x+3}{(x^2+3x+1)^3} dx$ | (v) $\int xe^{x^2} dx$ |
| (j) $\int x\sqrt{x^2+1} dx$ | (w) $\int \frac{e^{5x}+e^{6x}}{e^{3x}} dx$ |
| (k) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ | (x) $\int \frac{1}{y(1+\ln y)} dy$ |
| (l) $\int \frac{t^2}{\sqrt[3]{t^3+8}} dt$ | (y) $\int x\sqrt{x^2+4} dx$ |
| (m) $\int \frac{(\sqrt{x}+7)^5}{\sqrt{x}} dx$ | (z) $\int (e^x - \sqrt{\ln x}) dx$ |
-