



CERTAMEN 2
MATEMATICAS III

NOMBRE: Panta N°CAD: _____ CURSO: 3° _____

- 1. DOCENTE(S): C. Hardy, A. Rauch.
- 2. FECHA: 29 / 04 / 2025
- 3. UNIDAD TEMÁTICA: I- Integral Indefinida II- Integral Definida
- 4. TIEMPO: 80 min.
- 5. MATERIALES: de escritorio. Calculadora no algebraica.

INDICACIONES:

- Lea cuidadosamente la prueba antes de comenzar a responder. La comprensión de los enunciados es parte de la prueba.
- Todo resultado debe estar argumentado o justificado a través de sus cálculos explícitos en sus respuestas.
- Escriba con tinta o pasta, en orden, con limpieza y claridad. Si desea anular parte de su trabajo, tórjelo con una línea horizontal encima del escrito (---), no use corrector; no se corregirá lo escrito sobre corrector.
- No utilice lápiz grafito para responder, si utiliza grafito no podrá tener acceso a correcciones.

6. RESULTADOS OBTENIDOS:

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	24	
2	38	
3	38	
Puntaje total	100	



PREGUNTA N° 1 (24 puntos)

Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral definida en el cálculo de integrales definidas.
Contenido: Integral definida.

- a) Resolver la siguiente integral definida, indicando cada paso de su desarrollo:

$$\int_{-4}^2 f(x) dx, \text{ si}$$

$$f(x) = \begin{cases} -x & ; -4 \leq x \leq -2 \\ 5x & ; -2 < x < 0 \\ x^2 + x & ; 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_{-4}^2 f(x) dx &= \int_{-4}^{-2} -x dx + \int_{-2}^0 5x dx + \int_0^2 x^2 dx \\ &= \left(-\frac{x^2}{2} \right) \Big|_{-4}^{-2} + \left(\frac{5x^2}{2} \right) \Big|_{-2}^0 + \left(\frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^2 \\ &= \left[-2 + 8 \right] + \left[0 - 10 \right] + \left[\frac{8}{3} - 0 \right] \\ &= 6 - 10 + \frac{8}{3} \\ &= -\frac{4}{3} \end{aligned}$$



b) Determine el valor de $m \in \mathbb{R}^+$

$$\int_{-1}^m (2x + 3) dx = 12$$

$$(x^2 + 3x) \Big|_{-1}^m = 12$$

$$m^2 + 3m - (1 - 3) = 12$$

$$m^2 + 3m - 10 = 0$$

$$(m + 5)(m - 2) = 0$$

$$\boxed{m = -5} \quad \vee \quad \boxed{m = 2} \quad \checkmark$$

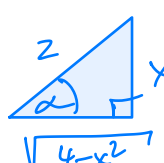
$\times$



PREGUNTA N°2 (38 ptos.)

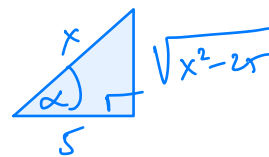
Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y métodos de integración en el cálculo de integrales.
Contenido: Integración por sustitución trigonométrica.

Resolver las siguientes integrales indefinidas, utilizando el método adecuado:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \int \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx &= \quad x = 2 \sin(\alpha) \quad \Rightarrow \sin(\alpha) = \frac{x}{2} \\
 &\quad dx = 2 \cos(\alpha) d\alpha \\
 &= \int \frac{(2 \sin(\alpha) + 3) \cdot 2 \cos(\alpha) d\alpha}{\sqrt{4 - 4 \sin^2(\alpha)}} \\
 &= \int \frac{(2 \sin(\alpha) + 3) \cdot 2 \cancel{\cos(\alpha)} d\alpha}{2 \cancel{\cos(\alpha)}} \\
 &= \int 2 \sin(\alpha) d\alpha + \int 3 d\alpha \\
 &= -2 \cos(\alpha) + 3\alpha + C \\
 &= -2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{2} + 3 \cdot \sin^{-1}\left(\frac{x}{2}\right) + C //
 \end{aligned}$$




$$\sec(\alpha) = \frac{x}{5}$$



$$b) \int \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x^2} dx =$$

$$x = 5 \sec(\alpha)$$

$$dx = 5 \sec(\alpha) \cdot \tan(\alpha) d\alpha$$

$$= \int \frac{\sqrt{25 \sec^2(\alpha) - 25}}{25 \sec^2(\alpha)} \cdot 5 \sec(\alpha) \cdot \tan(\alpha) d\alpha$$

$$= \int \frac{5 \tan(\alpha) \cdot \cancel{5 \sec(\alpha)} \cdot \tan(\alpha)}{\cancel{25 \sec^2(\alpha)}} d\alpha$$

$$= \int \frac{\tan^2(\alpha)}{\sec(\alpha)} d\alpha$$

$$= \int \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^3(\alpha)} \cdot \cancel{\cos(\alpha)} d\alpha$$

$$= \int \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} d\alpha$$

$$= \int \frac{1 - \cos^2(\alpha)}{\cos(\alpha)} d\alpha$$

$$= \int \sec(\alpha) d\alpha - \int \cos(\alpha) d\alpha$$

$$= \ln|\sec(\alpha) + \tan(\alpha)| - \sin(\alpha) + C$$

$$= \ln\left|\frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{5}\right| - \frac{\sqrt{x^2 - 25}}{x} + C //$$



PREGUNTA N° 3 (38 puntos)

Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. Aplicar propiedades y métodos de integración en el cálculo de integrales.
Contenido: Integración por fracciones parciales.

a) $\int \frac{-7x^2 + 27x}{(x+3)(x-1)^2} dx =$

$$\frac{-7x^2 + 27x}{(x+3)(x-1)^2} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2} \quad \bigg| \cdot (x+3)(x-1)^2$$

$$-7x^2 + 27x = A(x-1)^2 + B(x+3)(x-1) + C(x+3)$$

$$-7x^2 + 27x = A(x^2 - 2x + 1) + B(x^2 + 2x - 3) + Cx + 3C$$

$$-7x^2 + 27x = Ax^2 - 2Ax + A + Bx^2 + 2Bx - 3B + Cx + 3C$$

$$-7x^2 + 27x = x^2(A+B) + x(-2A+2B+C) + A-3B+3C$$

$$\begin{cases} A+B = -7 \\ -2A+2B+C = 27 \\ A-3B+3C = 0 \end{cases}$$

$$A = -9$$

$$B = 2$$

$$C = 5$$

$$\therefore \int \frac{-7x^2 + 27x}{(x+3)(x-1)^2} dx = \int \frac{-9}{x+3} dx + \int \frac{2}{x-1} dx + \int \frac{5}{(x-1)^2} dx$$

$$= -9 \ln|x+3| + 2 \ln|x-1| - 5(x-1)^{-1} + C$$

$$u = x-1$$

$$du = dx$$

$$5 \int u^{-2} du$$

$$\frac{5u^{-1}}{-1}$$



b)

$$\int \frac{-8x^3 + x^2 - 11x}{(x-1)(x+2)(x^2+2)} dx =$$

$$\frac{-8x^3 + x^2 - 11x}{(x-1)(x+2)(x^2+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \quad \bigg| \cdot (x-1)(x+2)(x^2+2)$$

$$-8x^3 + x^2 - 11x = A(x+2)(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)(x+2)$$

$$-8x^3 + x^2 - 11x = A(x^3 + 2x + 2x^2 + 4) + B(x^3 + 2x - x^2 - 2) + (Cx+D)(x^2 + x - 2)$$

$$-8x^3 + x^2 - 11x = Ax^3 + 2Ax + 2Ax^2 + 4A + Bx^3 + 2Bx - Bx^2 - 2B + Cx^3 + Cx^2 - 2Cx + Dx^2 + Dx - 2D$$

$$-8x^3 + x^2 - 11x = Ax^3 + 2Ax + 2Ax^2 + 4A + Bx^3 + 2Bx - Bx^2 - 2B + Cx^3 + Cx^2 - 2Cx + Dx^2 + Dx - 2D$$

$$\begin{cases} A+B+C = -8 \\ 2A-B+C+D = 1 \\ 2A+2B-2C+D = -11 \\ 4A-2B-2D = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} A &= -2 \\ B &= -5 \\ C &= -1 \\ D &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \int \frac{-8x^3 + x^2 - 11x}{(x-1)(x+2)(x^2+2)} dx = \int \frac{-2}{x-1} dx + \int \frac{-5}{x+2} dx + \int \frac{-x+1}{x^2+2} dx$$

$$= -2 \ln|x-1| - 5 \ln|x+2| - \int \frac{x}{x^2+2} dx + \int \frac{1}{x^2+2} dx$$

$$\begin{aligned} u &= x^2+2 \\ du &= 2x dx \\ \frac{du}{2} &= x dx \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u|$$

$$= -2 \ln|x-1| - 5 \ln|x+2| - \frac{1}{2} \ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C //$$