

Pauta Prueba N° 6 Física III

Problema 1

Una boya de vigilancia está anclada en alta mar para monitorear el oleaje. La boya flota en la superficie del agua y se mueve verticalmente debido a las olas que pasan. Las olas en el mar se pueden modelar como ondas viajeras unidimensionales de acuerdo con la siguiente expresión:

$$y(x, t) = (2 \text{ m}) \cdot \sin(0.15x + 20t) \quad (1)$$

donde $y(x, t)$ es la posición vertical de la boya en metros, x es la posición horizontal en metros y t es el tiempo en segundos.

1. (10 puntos) Determine la amplitud, longitud de onda y frecuencia de las ondas.
2. (10 puntos) Determine la velocidad de propagación de las ondas. ¿En qué dirección se propaga?
3. (10 puntos) Determine la velocidad transversal máxima de la boya.

Solución

1. Amplitud, Longitud de onda y Frecuencia

La ecuación de la onda es de la forma general:

$$y(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$$

donde:

- **(2 pts)** $A = 2$ m es la **amplitud** de la onda.
- **(2 pts)** k es el número de onda, dado como $k = 0.15 \text{ m}^{-1}$.
- **(2 pts)** ω es la frecuencia angular, dada como $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$.

Para encontrar la **longitud de onda** λ y la **frecuencia** f :

$$\textbf{(2 pts)} \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.15} \approx 41.89 \text{ m},$$

$$\textbf{(2 pts)} f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{20}{2\pi} \approx 3.18 \text{ Hz}.$$

Por lo tanto:

- La amplitud $A = 2$ m.
- La longitud de onda $\lambda \approx 41.89$ m.
- La frecuencia $f \approx 3.18$ Hz.

2. Velocidad de propagación y Dirección

La **velocidad de propagación** v de la onda está dada por:

$$\textbf{(5 pts)} v = \frac{\omega}{k} = \frac{20}{0.15} \approx 133.33 \text{ m/s}.$$

(5 pts) Como la forma de la onda es $y(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$, con el término positivo $kx + \omega t$, esto indica que la onda se propaga en la **dirección negativa del eje x** .

3. Velocidad transversal máxima de la boya

La **velocidad transversal** de la boya es la derivada de $y(x, t)$ con respecto a t :

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = A\omega \cos(kx + \omega t).$$

La **velocidad transversal máxima** ocurre cuando $\cos(kx + \omega t) = \pm 1$, por lo que:

$$\textbf{(10 pts)} v_{y,\max} = A\omega = 2 \times 20 = 40 \text{ m/s}.$$

Problema 2

Una onda viajera unidimensional en una cuerda tensa se puede describir por la siguiente ecuación:

$$y(x, t) = (0.3 \text{ m}) \cdot \sin(2\pi x - 100\pi t) \quad (2)$$

donde $y(x, t)$ es la posición vertical de un punto de la cuerda en metros, x es la posición horizontal en metros y t es el tiempo en segundos. La cuerda tiene una densidad lineal de masa $\mu = 0.05 \text{ kg/m}$ y está sometida a una tensión de $T = 100 \text{ N}$.

1. (10 puntos) Determine la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.
2. (10 puntos) Determine la posición de los nodos para $t = 0 \text{ s}$.
3. (10 puntos) Explique de qué manera se podría duplicar la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda.

Solución

1. Velocidad de propagación de las ondas

La velocidad de propagación v de una onda en una cuerda tensa está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde:

- $T = 100 \text{ N}$ es la tensión de la cuerda.
- $\mu = 0.05 \text{ kg/m}$ es la densidad lineal de masa.

Sustituyendo los valores:

$$\textbf{(10 pts)} v = \sqrt{\frac{100}{0.05}} = \sqrt{2000} \approx 44.72 \text{ m/s}.$$

Por lo tanto, la velocidad de propagación de las ondas en la cuerda es $v \approx 44.72 \text{ m/s}$.

2. Posición de los nodos para $t = 0 \text{ s}$

Para encontrar las posiciones de los nodos, recordemos que los nodos ocurren cuando el argumento del seno en la ecuación de la onda es un múltiplo de π . La ecuación de la onda es:

$$y(x, 0) = 0.3 \sin(2\pi x).$$

Para que haya un nodo, se debe cumplir que:

$$\textbf{(4 pts)} 2\pi x = n\pi,$$

donde n es un número entero ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Resolviendo para x :

$$\textbf{(3 pts)} x = \frac{n}{2} \Rightarrow x = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \dots$$

Por lo tanto, los nodos para $t = 0 \text{ s}$ están en las posiciones:

$$\textbf{(3 pts)} x = 0, \pm 0.5, \pm 1, \pm 1.5, \pm 2, \dots$$

3. Cómo duplicar la velocidad de propagación

(10 pts) Para duplicar la velocidad de propagación de la onda, podemos observar que la velocidad v depende de la tensión T y de la densidad lineal de masa μ según la relación:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Para duplicar v , es decir, hacer que $v' = 2v$, debemos aumentar el valor de $\frac{T}{\mu}$ por un factor de 4, ya que:

$$v' = \sqrt{\frac{4T}{\mu}} = 2\sqrt{\frac{T}{\mu}} = 2v.$$

Esto se puede lograr de dos maneras:

- Incrementando la tensión T por un factor de 4.
- Disminuyendo la densidad lineal de masa μ a la cuarta parte de su valor original.

Problema 3

En un buque, los cables tensores que sostienen el mástil pueden vibrar bajo ciertas condiciones, generando ondas estacionarias. Uno de los cables tensores tiene longitud $L = 4$ m, densidad lineal de masa $\mu = 0.02$ kg/m y está sometido a una tensión T . Durante una tormenta, las ráfagas de viento inducen una vibración en el cable, generando ondas estacionarias en su segundo modo normal, con una frecuencia $f = 30$ Hz.

1. (10 puntos) Determine la longitud de onda correspondiente al segundo modo normal de oscilación en el cable.
2. (10 puntos) ¿Cuál es la velocidad de propagación de las ondas en el cable?
3. (5 puntos) Dibuje el perfil de los tres primeros modos normales de oscilación del cable.
4. (5 puntos) Determine la tensión en el cable.

Solución

1. Longitud de onda del segundo modo normal

En un cable fijo en ambos extremos, la longitud de onda λ_n para el modo n está dada por la relación:

$$(2 \text{ pts}) \lambda_n = \frac{2L}{n},$$

donde n es el número del modo. Para el segundo modo normal ($n = 2$):

$$(4 \text{ pts}) \lambda_2 = \frac{2L}{2} = L = 4 \text{ m}.$$

Por lo tanto, la longitud de onda correspondiente al segundo modo normal es:

$$(4 \text{ pts}) \lambda_2 = 4 \text{ m}.$$

2. Velocidad de propagación de las ondas en el cable

La velocidad de propagación v de las ondas en el cable se puede calcular usando la relación:

$$(4 \text{ pts}) v = f \cdot \lambda.$$

Sustituyendo los valores de f y λ_2 :

$$(2 \text{ pts}) v = 30 \text{ Hz} \cdot 4 \text{ m} = 120 \text{ m/s}.$$

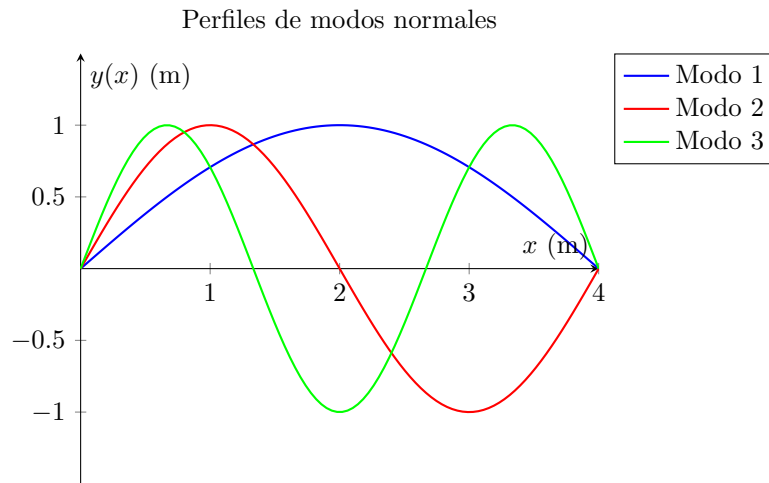
Por lo tanto, la velocidad de propagación de las ondas en el cable es:

$$(4 \text{ pts}) v = 120 \text{ m/s}.$$

3. Perfil de los tres primeros modos normales de oscilación

(5 pts) Los perfiles de los primeros modos normales en un cable fijo en ambos extremos son:

A continuación, se muestra el perfil de los tres primeros modos normales:



4. Tensión en el cable

(2 pts) La velocidad de propagación de la onda también se puede expresar en términos de la tensión T y la densidad lineal de masa μ :

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}.$$

Sustituyendo $v = 120 \text{ m/s}$ y $\mu = 0.02 \text{ kg/m}$:

$$120 = \sqrt{\frac{T}{0.02}}.$$

Elevando al cuadrado ambos lados:

$$14400 = \frac{T}{0.02}.$$

Por lo tanto,

(3 pts) $T = 14400 \cdot 0.02 = 288 \text{ N}.$