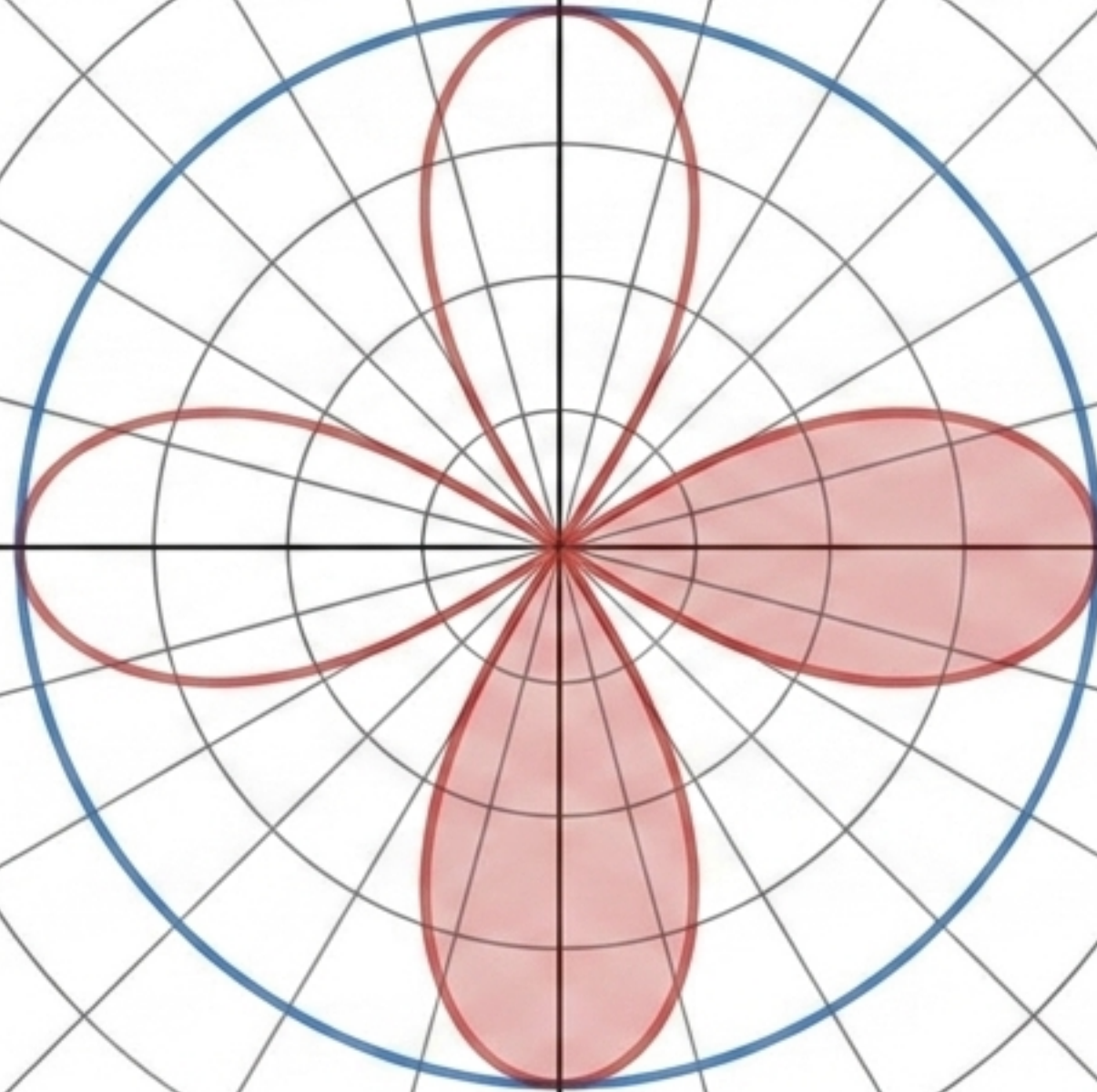
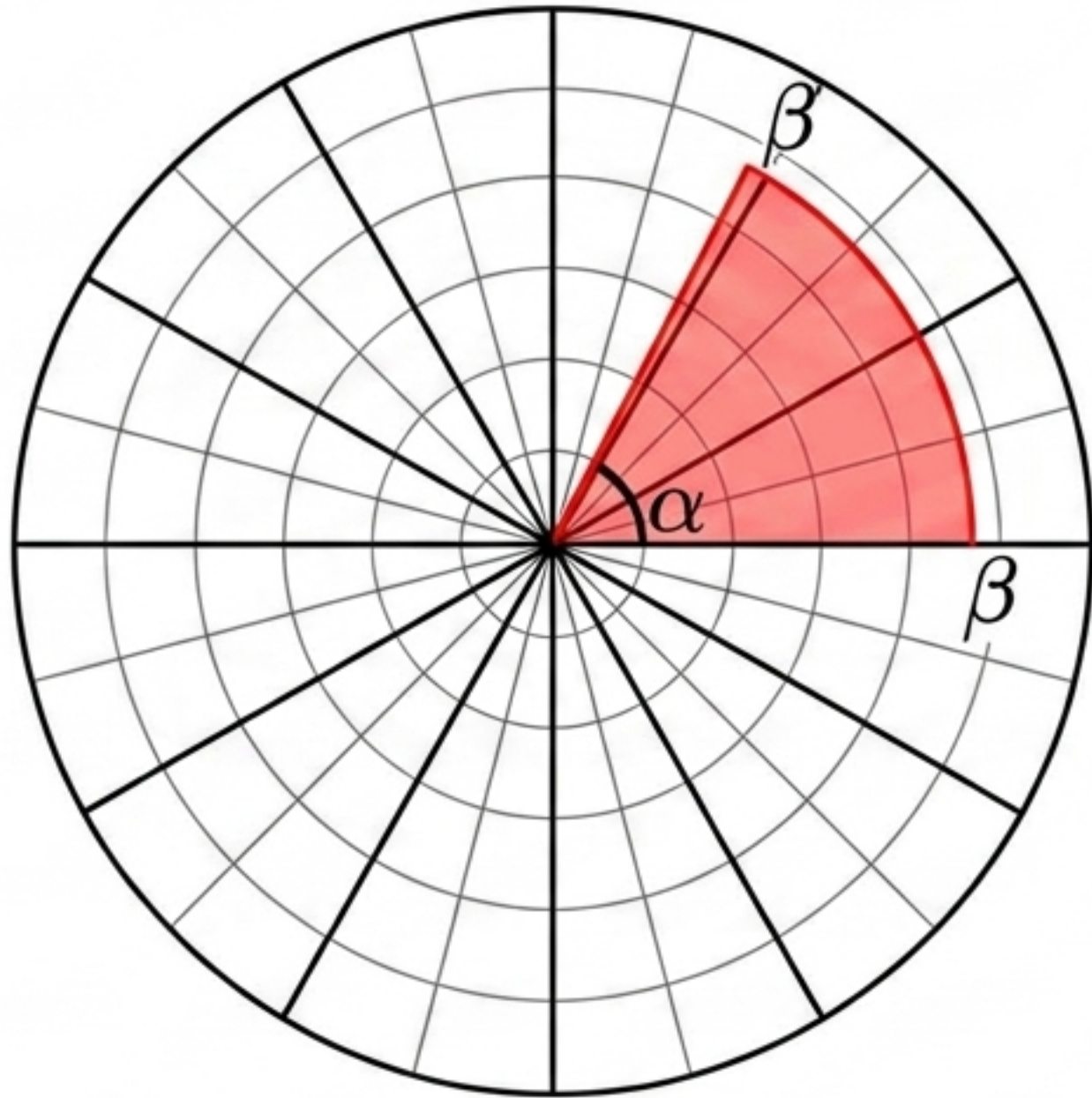


Área en Coordenadas Polares



Cálculo de Área en Coordenadas Polares



Sumando sectores circulares mediante un barrido radial.

$$A = \frac{1}{2} \int r^2 d\theta$$

En polares, no avanzamos sobre un eje; rotamos como un radar.

Anatomía de la Fórmula

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta$$

El Sector Circular: Deriva del área geométrica de un sector de círculo ($A = \frac{1}{2}r^2\theta$). El radio r es nuestra función $f(\theta)$.

Límites de Barrido: Los ángulos de inicio y fin. Definen dónde nace y dónde termina la región a calcular.

El Diferencial: Un incremento de ángulo infinitamente pequeño (el grosor de nuestro haz de radar).

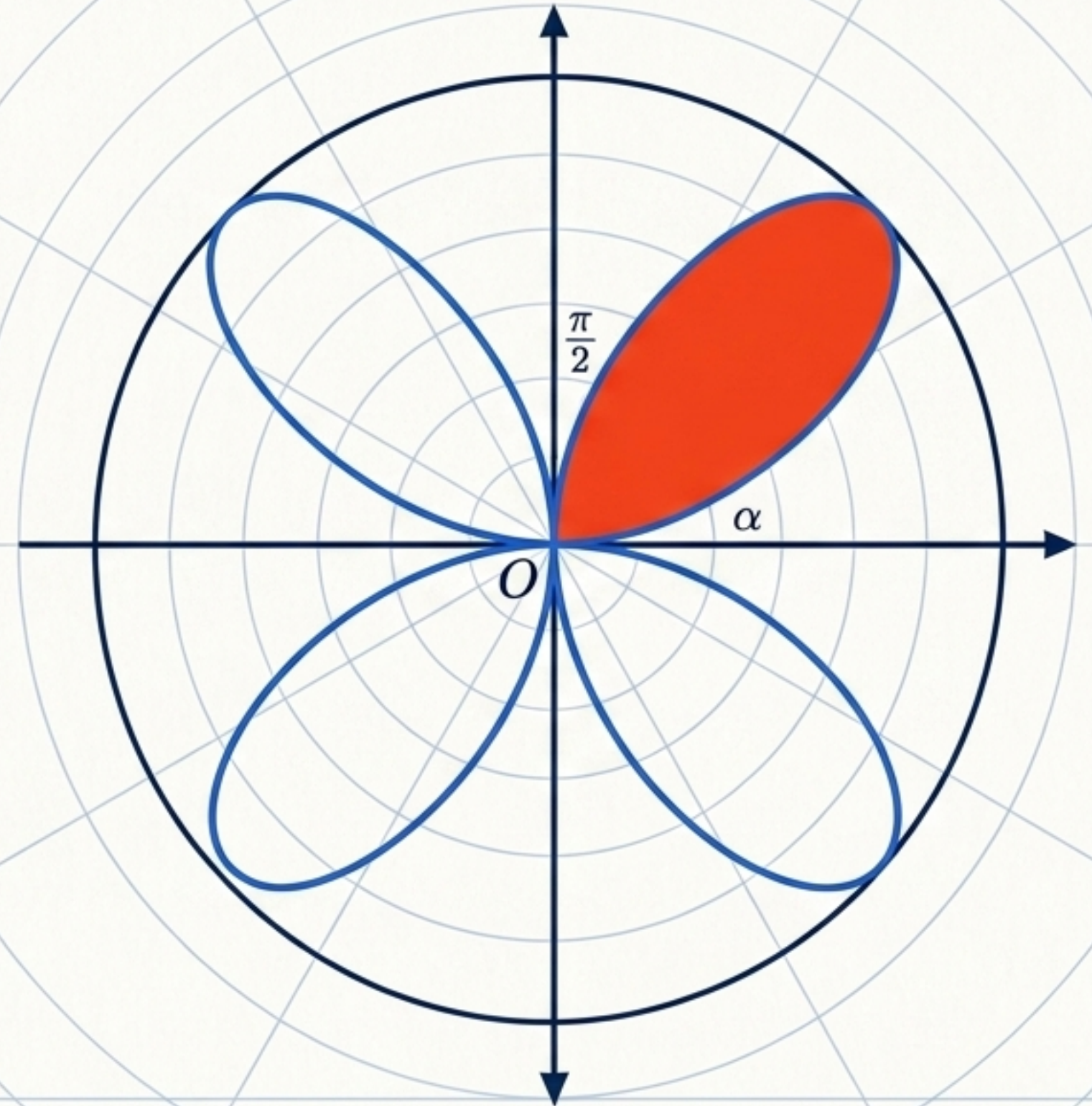
Ejemplo 1: El Problema

Encontrar el área de un solo pétalo de la rosa definida por la ecuación:

$$r = 3 \operatorname{sen}(2\theta)$$

¿Cuáles son nuestros límites de integración (α y β)?

Para integrar, necesitamos descubrir matemáticamente cuándo la curva sale del origen y cuándo regresa a él.



Ejemplo 1: Encontrando los Límites

Paso 1: Condición Inicial

La curva nace y muere en el polo (origen). Igualamos el radio a cero.

$$r = 0 \rightarrow 3 \operatorname{sen}(2\theta) = 0$$

Paso 2: Resolución Trigonométrica

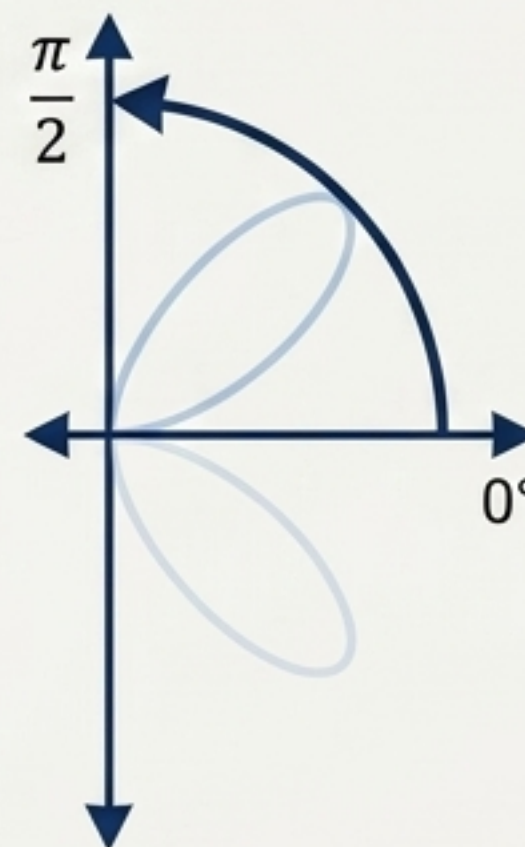
¿Para qué ángulos el seno es cero?

$$2\theta = 0, \pi, 2\pi \dots$$

Paso 3: Obtener los Límites

Despejamos θ dividiendo entre 2.

$$\theta = 0 \text{ y } \theta = \frac{\pi}{2}$$



Ejemplo 1: Planteamiento de la Integral

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} [3 \operatorname{sen}(2\theta)]^2 d\theta$$

Elevamos al cuadrado:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} 9 \operatorname{sen}^2(2\theta) d\theta$$

Sacamos la constante:

$$A = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2(2\theta) d\theta$$

¡Alerta de Regla de Oro!

Siempre necesitaremos reducir el grado. No podemos integrar sen^2 directamente.

Identidad Clave:

$$\operatorname{sen}^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

Aplicada a nuestro caso ($x = 2\theta$):

$$\operatorname{sen}^2(2\theta) = \frac{1 - \cos(4\theta)}{2}$$

Ejemplo 1: La Solución Final

Paso 1 (Sustitución):

$$A = \frac{9}{2} \int_0^{\pi/2} \left[\frac{1 - \cos(4\theta)}{2} \right] d\theta$$

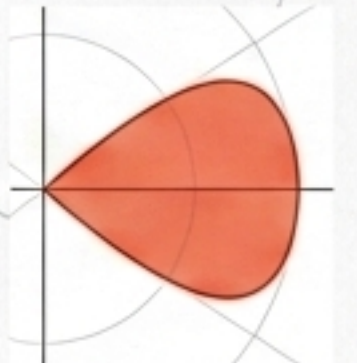
Paso 2 (Extracción y Antiderivada):

$$= \frac{9}{4} \left[\theta - \frac{\text{sen}(4\theta)}{4} \right] \Big|_0^{\pi/2}$$

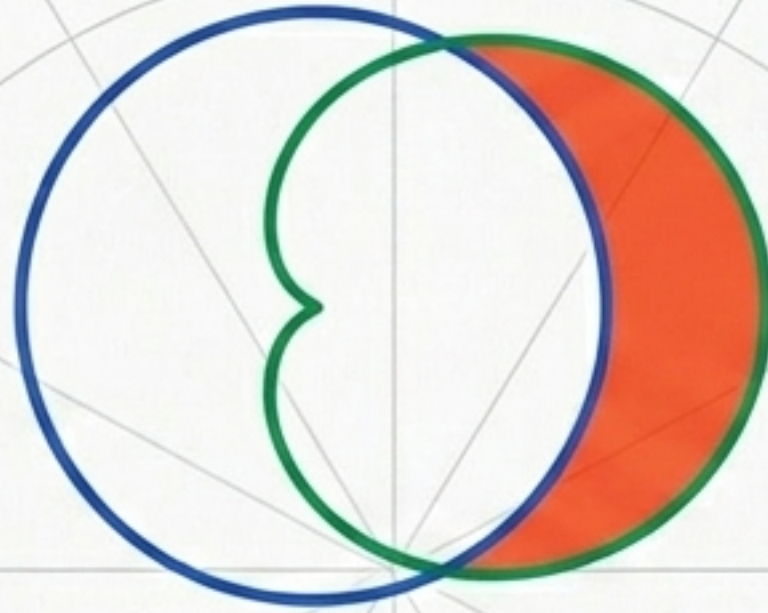
Paso 3 (Evaluación):

$$= \frac{9}{4} \left[\left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) - (0 - 0) \right]$$

$$\text{Área} = \frac{9\pi}{8} u^2$$



Subiendo el Nivel: Área Entre Dos Curvas



Cuando interactúan dos curvas, aplicamos la lógica de **Curva Exterior** menos **Curva Interior** sobre el mismo barrido angular.

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left[(r_{\text{exterior}})^2 - (r_{\text{interior}})^2 \right] d\theta$$

¡Precaución! Eleva cada radio al cuadrado de forma independiente. **NUNCA** hagas $(r_{\text{ext}} - r_{\text{int}})^2$.

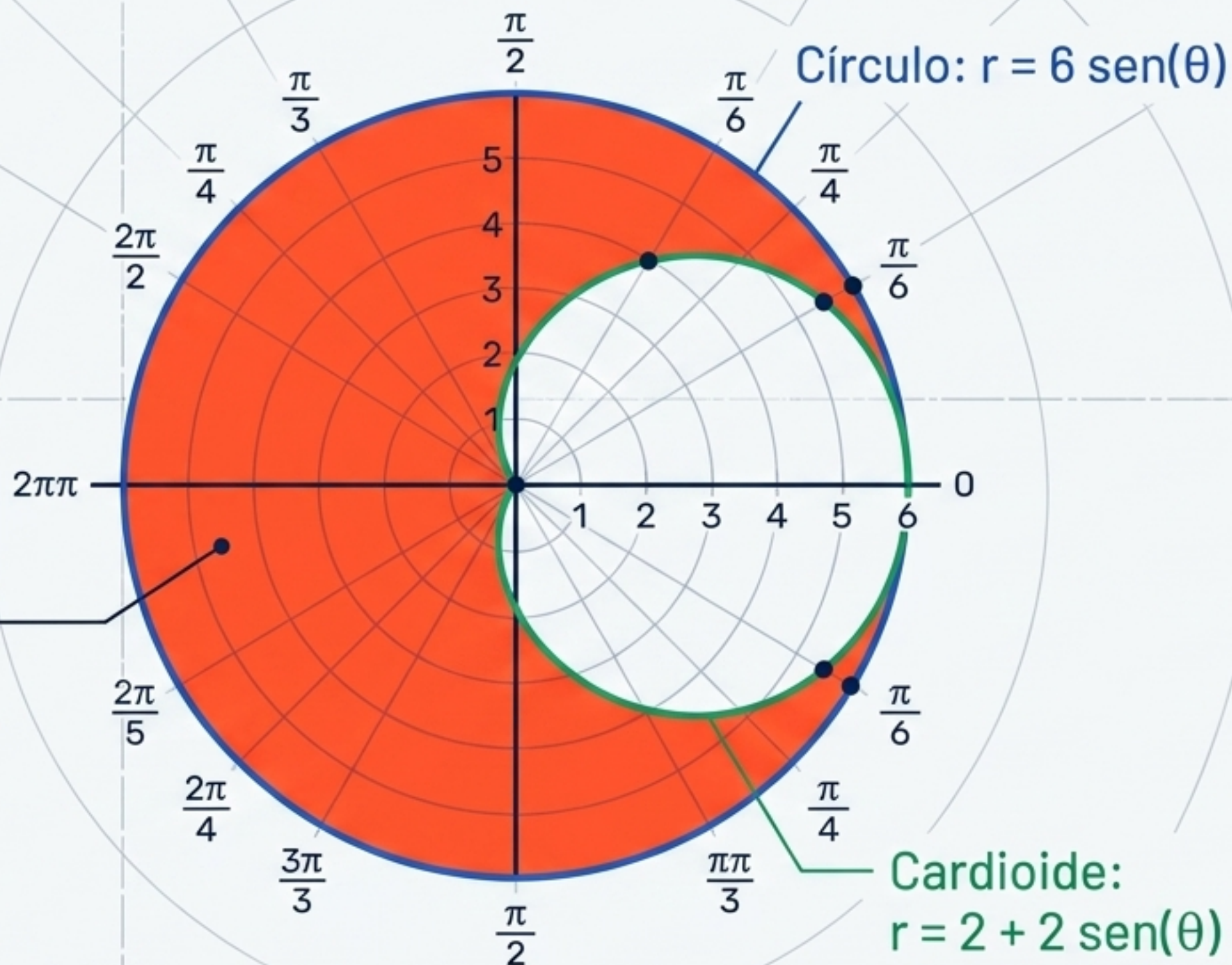
Ejemplo 2: Intersección de Dos Curvas

Objetivo

Calcular el área fuera de la cardioide y dentro del círculo.



Nuestro radar solo debe barrer el área destacada. ¿En qué ángulos exactos se cruzan estas dos fronteras?



Ejemplo 2: Hallando los Puntos de Cruce

Diagrama de Flujo Algebraico

Paso 1: Igualamos las curvas.

$$6 \operatorname{sen}(\theta) = 2 + 2 \operatorname{sen}(\theta)$$

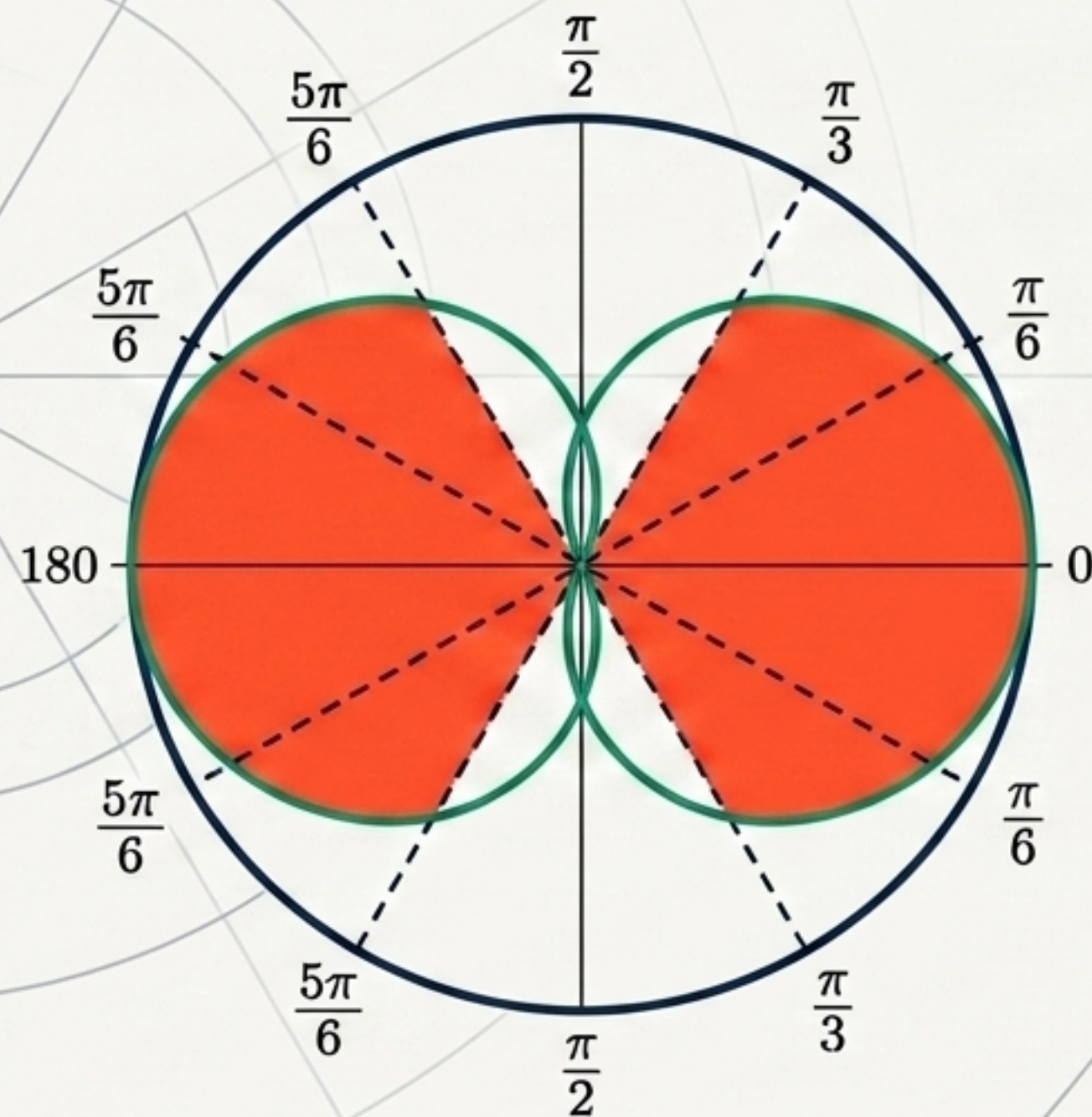
Paso 2: Despejamos el seno.

$$4 \operatorname{sen}(\theta) = 2 \rightarrow \operatorname{sen}(\theta) = \frac{1}{2}$$

Paso 3: Ángulos de corte.

$$\theta = \frac{\pi}{6} \text{ y } \theta = \frac{5\pi}{6}.$$

La Visión



Ejemplo 2: Planteamiento de la Integral Múltiple

$$A = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\frac{5\pi}{6}} \left[(6 \operatorname{sen}(\theta))^2 - (2 + 2 \operatorname{sen}(\theta))^2 \right] d\theta$$

Límites del barrido
(donde se intersectan).

r_{exterior} (El Círculo, más
alejado del origen en
esta región).

r_{interior} (La Cardioide,
la barrera interna).

El planteamiento correcto representa el 80% del éxito en coordenadas polares.

Ejemplo 2: Expansión y Simplificación

Paso 1: Desarrollar los cuadrados.

$$\int \left[(36 \operatorname{sen}^2(\theta)) - (4 + 8 \operatorname{sen}(\theta) + 4 \operatorname{sen}^2(\theta)) \right] d\theta$$

Paso 2: Distribuir el signo negativo.

$$\int (36 \operatorname{sen}^2(\theta) - 4 - 8 \operatorname{sen}(\theta) - 4 \operatorname{sen}^2(\theta)) d\theta$$

Paso 3: Agrupar términos semejantes. $\int_{\pi/6}^{\frac{5\pi}{6}} (32 \operatorname{sen}^2(\theta) - 8 \operatorname{sen}(\theta) - 4) d\theta$

Integral simplificada a resolver: $A = \int_{\pi/6}^{\frac{5\pi}{6}} (16 \operatorname{sen}^2(\theta) - 4 \operatorname{sen}(\theta) - 2) d\theta$

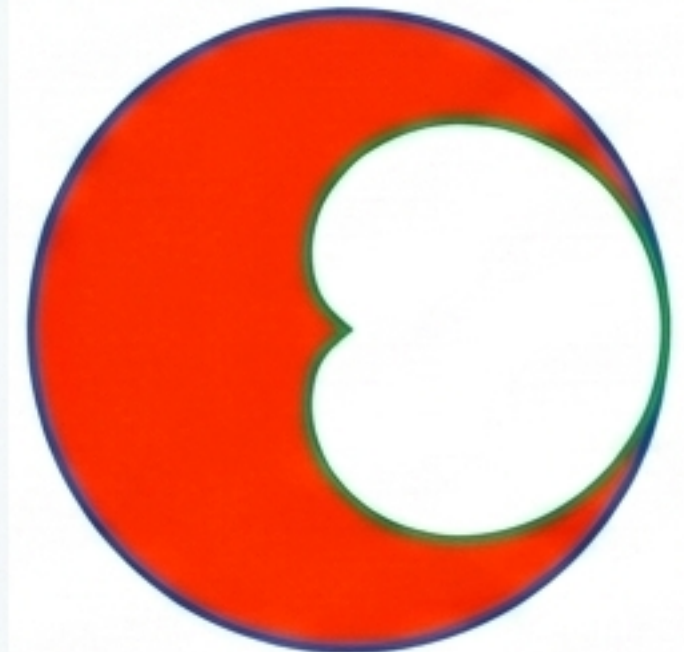
Ejemplo 2: Resultado Final

La Integración

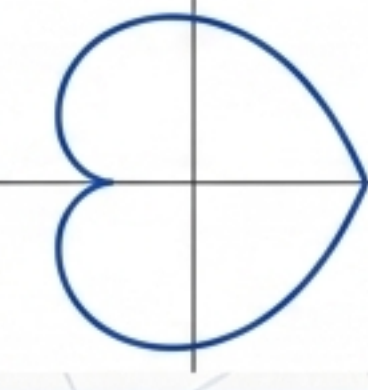
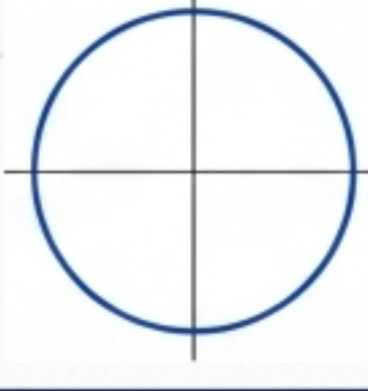
- Se aplica la identidad de reducción a $16 \operatorname{sen}^2(\theta) = 8(1 - \cos(2\theta))$.
$$16 \operatorname{sen}^2(\theta) = 8(1 - \cos(2\theta))$$
- Antiderivada final: $[8\theta - 4\operatorname{sen}(2\theta) + 4\cos(\theta) - 2\theta]$
- Evaluando en $5\pi/6$ y $\pi/6$...

El Resultado

Área Total = 4π unidades cuadradas



Síntesis: Guía Rápida de Curvas Polares

Forma	Ecuación Típica	Tip de Integración
Rosa Polar 	$r = a \operatorname{sen}(n\theta)$ o $r = a \cos(n\theta)$	Para un pétalo, iguala $r=0$ para hallar la raíz de inicio y fin. Si n es impar, hay n pétalos. Si n es par, hay $2n$.
Cardioide 	$r = a \pm a \operatorname{sen}(\theta)$	Usualmente requiere integrar de 0 a 2π para el área total. Aprovecha la simetría integrando la mitad y multiplicando por 2 .
Círculo Desplazado 	$r = a \operatorname{sen}(\theta)$ o $r = a \cos(\theta)$	Un recorrido completo se da en π , no en 2π .

El dominio del área polar no trata de memorizar integrales ciegas.

Trata de aprender a ver el espacio geométrico a través de un radio que barre infinitamente. Visualiza el radar primero, el álgebra vendrá después.

Recomendación: Domina tus identidades de reducción trigonométrica ($\sin^2(\theta)$, $\cos^2(\theta)$). Son la llave maestra de las coordenadas polares.