
Antiderivadas

Definición 1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Decimos que $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ es una **antiderivada de f** si $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$.

Ejemplo 1. 1. Sea $f(x) = x^3$, entonces una antiderivada para f es $F(x) = \frac{x^4}{4} + 1$, ya que

$$F'(x) = \frac{4 \cdot x^3}{4} = x^3 = f(x).$$

2. Sea $f(x) = x^n$, entonces una antiderivada para f es $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, ya que

$$F'(x) = \frac{(n+1) \cdot x^n}{n+1} = x^n = f(x).$$

3. Encontrar $f(x)$ tal que $F(x) = f(x)$.

Solución. $f(x) = e^x$.

Teorema 1. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y F, G dos antiderivadas de f . Entonces existe $C \in \mathbb{R}$ tal que $F(x) = G(x) + C$, para todo $x \in [a, b]$.

Definición 2. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función y $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una de sus antiderivadas. Definimos la **integral de f** como

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

Observación. 1. Si F es una antiderivada de f , entonces $f(x) = F'(x)$. Integrando esto, obtenemos

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x) + C.$$

2. Por definición, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Si derivamos esto, obtenemos

$$\frac{d}{dx} \left(\int f(x)dx \right) = F'(x) = f(x)$$

Propiedades. Sean f, g dos funciones reales y $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. $\int \alpha dx = \alpha x + C, \alpha \in \mathbb{R}$

2. $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C, r \neq -1.$

3. $\int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C.$

4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(x) + C.$

$$5. \int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$$

$$6. \int \alpha f(x)dx = \alpha \int f(x)dx.$$

Observación. $\int f(x) \cdot g(x)dx \neq \int f(x)dx \cdot \int g(x)dx$: Considere $f(x) = x^2$, entonces

$$\frac{x^3}{3} + C = \int x^2 dx = \int x \cdot x dx \neq \int x dx \cdot \int x dx = \left(\frac{x^2}{2} + C\right) \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C\right)$$

Ejemplo 2. 1. Calcule la siguiente integral:

$$\int \left(3x^2 + e^{3x} - \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right) dx$$

Solución.

$$\begin{aligned} \int \left(3x^2 + e^{3x} - \frac{2}{x} + \sqrt{x}\right) dx &= \int 3x^2 dx + \int e^{3x} dx - \int \frac{2}{x} dx + \int \sqrt{x} dx \\ &= 3 \int x^2 dx + \int e^{3x} dx - 2 \int \frac{dx}{x} + \int x^{1/2} dx \\ &= 3 \cdot \left(\frac{x^3}{3} + C_1\right) + \frac{e^{3x}}{3} + C_2 - 2(\ln(x) + C_3) + \frac{x^{3/2}}{3/2} + C_4 \\ &= x^3 + \textcolor{red}{3}C_1 + \frac{e^{3x}}{3} + \textcolor{red}{C}_2 - 2\ln(x) - \textcolor{red}{2}C_3 + \frac{2x^{3/2}}{3} + \textcolor{red}{C}_4 \\ &= x^3 + \frac{e^{3x}}{3} - 2\ln(x) + \frac{2x^{3/2}}{3} + \textcolor{red}{C} \end{aligned}$$

Ejercicios. Calcule las siguientes integrales:

$$1. \int 5dx$$

$$7. \int (y^5 - 5y) dy$$

$$2. \int x^8 dx$$

$$8. \int (3t^2 - 4t + 5) dt$$

$$3. \int 5x^{-7} dx$$

$$9. \int (7 + e) dx$$

$$4. \int \frac{2}{x^{10}} dx$$

$$10. \int \left(\frac{x}{7} - \frac{3}{4}x^4\right) dx$$

$$5. \int \frac{1}{y^{11/5}} dy$$

$$11. \int 6e^x dx$$

$$6. \int (8 + u) du$$

$$12. \int (x^{8,3} - 9x^6 + 3x^{-4} + x^{-3}) dx$$

$$13. \int \frac{-2\sqrt{x}}{3} dx$$

$$14. \int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}} dx$$

$$15. \int \left(\frac{x^3}{3} - \frac{3}{x^3} \right) dx$$

$$16. \int \left(\frac{3w^2}{2} - \frac{2}{3w^2} \right) dw$$

$$17. \int \frac{2z - 5}{7} dz$$

$$18. \int (x^e + 10e^x) dx$$

$$19. \int (2\sqrt{x} - 3\sqrt[4]{x}) dx$$

$$20. \int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5} - \frac{7}{2\sqrt{x}} + 6x \right) dx$$

$$21. \int (x^2 + 5)(x - 3) dx$$

$$22. \int \sqrt{x}(x + 3) dx$$

$$23. \int (2u + 1)^2 du$$

$$24. \int v^{-2} (2v^4 + 3v^2 - 2v^{-3}) dv$$

$$25. \int \frac{z^4 + 10z^3}{2z^2} dz$$

$$26. \int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx$$