

Solución: Guía de Ejercicios - Ondas Viajeras Unidimensionales y Ondas Estacionarias en una Cuerda

October 28, 2024

Ejercicio 1: Descripción de una Onda Viajera

Dada la onda:

$$y(x, t) = 0.05 \sin(4\pi x - 40\pi t)$$

donde $y(x, t)$ está en metros, x en metros, y t en segundos.

a) Amplitud $A = 0.05$ m.

Número de onda $k = 4\pi$, por lo tanto la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{4\pi} = 0.5 \text{ m.}$$

Frecuencia angular $\omega = 40\pi$, por lo tanto la frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{40\pi}{2\pi} = 20 \text{ Hz.}$$

b) La velocidad de propagación v es:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{40\pi}{4\pi} = 10 \text{ m/s.}$$

c) Para $t = 0$, los nodos ocurren cuando $y(x, 0) = 0$, es decir:

$$0.05 \sin(4\pi x) = 0.$$

Resolviendo, tenemos $4\pi x = n\pi$ con $n \in \mathbb{Z}$, por lo tanto:

$$x = \frac{n}{4}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- d) La velocidad transversal máxima es $v_{\max} = A\omega = 0.05 \times 40\pi = 2\pi \text{ m/s} \approx 6.28 \text{ m/s}$.

Ejercicio 2: Onda Viajera en un Medio

Dada la onda:

$$y(x, t) = 0.02 \cos(6\pi x + 90\pi t)$$

a) Amplitud $A = 0.02$ m.

Número de onda $k = 6\pi$, entonces la longitud de onda es:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{6\pi} = \frac{1}{3} \text{ m.}$$

Frecuencia angular $\omega = 90\pi$, entonces la frecuencia es:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{90\pi}{2\pi} = 45 \text{ Hz.}$$

b) Velocidad de propagación $v = \frac{\omega}{k} = \frac{90\pi}{6\pi} = 15$ m/s.

La onda se mueve en la dirección negativa del eje x ya que el término de ωt es positivo.

Ejercicio 3: Onda Viajera en una Cuerda de Longitud Infinita

Dada la onda:

$$y(x, t) = 0.04 \sin(8\pi x - 16\pi t)$$

a) Amplitud $A = 0.04$ m.

Número de onda $k = 8\pi$, entonces:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{8\pi} = \frac{1}{4} \text{ m.}$$

Frecuencia angular $\omega = 16\pi$, entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{16\pi}{2\pi} = 8 \text{ Hz.}$$

b) Velocidad de propagación:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{16\pi}{8\pi} = 2 \text{ m/s.}$$

La onda se mueve en la dirección positiva del eje x .

Ejercicio 4: Ondas Viajeras en el Mar

Dada la onda:

$$y(x, t) = 1.5 \sin(0.5\pi x - 2\pi t)$$

a) Amplitud $A = 1.5$ m.

Número de onda $k = 0.5\pi$, entonces:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{0.5\pi} = 4 \text{ m.}$$

Frecuencia angular $\omega = 2\pi$, entonces:

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \text{ Hz.}$$

b) Velocidad de propagación:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi}{0.5\pi} = 4 \text{ m/s.}$$

La onda se mueve en la dirección positiva del eje x .

c) Para $x = 10$ m, la altura máxima es 1.5 m, y ocurre con una frecuencia de 1 Hz.

Ejercicio 5: Ondas Estacionarias en una Cuerda de Longitud Fija

a) La velocidad de propagación de las ondas en una cuerda está dada por:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde $T = 50$ N y $\mu = 0.005$ kg/m.

Sustituyendo:

$$v = \sqrt{\frac{50}{0.005}} = \sqrt{10000} = 100 \text{ m/s}$$

- b) Los primeros tres modos normales de vibración de una cuerda fija en ambos extremos están dados por las longitudes de onda:

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}$$

para $n = 1, 2, 3$.

Para ilustrarlos, usamos gráficos de los primeros tres modos:

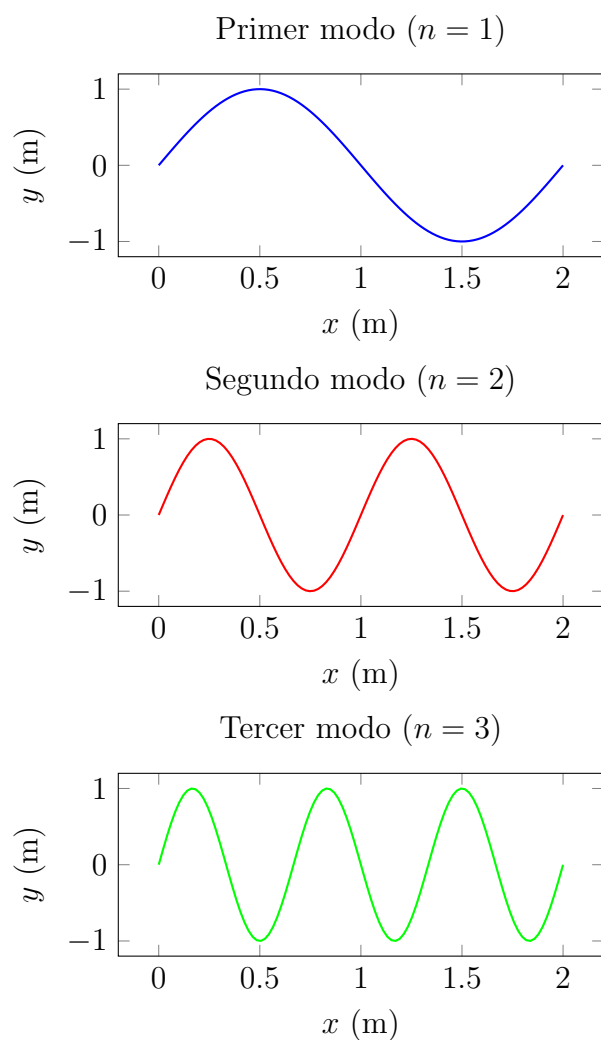


Figure 1: Primeros tres modos normales de vibración.

c) La frecuencia de cada modo está dada por:

$$f_n = \frac{nv}{2L}$$

Calculamos las frecuencias para $n = 1, 2, 3$:

$$f_1 = \frac{1 \times 100}{2 \times 2} = 25 \text{ Hz}$$

$$f_2 = \frac{2 \times 100}{2 \times 2} = 50 \text{ Hz}$$

$$f_3 = \frac{3 \times 100}{2 \times 2} = 75 \text{ Hz}$$

d) A medida que aumenta n , la longitud de onda $\lambda_n = \frac{2L}{n}$ disminuye. Esto significa que los modos más altos tienen longitudes de onda más cortas y más nodos en la cuerda.

Ejercicio 6: Influencia de la Tensión y Densidad en los Modos Normales

a) La frecuencia fundamental (primer armónico) está dada por:

$$f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

donde $L = 1.5 \text{ m}$, $T = 40 \text{ N}$, y $\mu = 0.004 \text{ kg/m}$.

Sustituyendo:

$$f_1 = \frac{1}{2 \times 1.5} \sqrt{\frac{40}{0.004}} = \frac{1}{3} \times 100 = 33.33 \text{ Hz}$$

b) Las frecuencias del segundo y tercer armónico son:

$$f_2 = 2 \times f_1 = 66.67 \text{ Hz}, \quad f_3 = 3 \times f_1 = 100 \text{ Hz}$$

c) La longitud de onda en el segundo armónico es:

$$\lambda_2 = \frac{2L}{2} = L = 1.5 \text{ m}$$

d) Si la tensión se duplicara, la frecuencia fundamental sería:

$$f'_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{2T}{\mu}} = f_1 \times \sqrt{2} = 33.33 \times 1.414 = 47.14 \text{ Hz}$$

La frecuencia fundamental aumentaría en un factor de $\sqrt{2}$.

Ejercicio 7: Ajuste de Tensión para Obtener el Quinto Modo Normal

a) La longitud de onda para el quinto modo es:

$$\lambda_5 = \frac{2L}{5} = \frac{2 \times 1.8}{5} = 0.72 \text{ m}$$

b) La velocidad de propagación es:

$$v = f_5 \lambda_5 = 10 \times 0.72 = 7.2 \text{ m/s}$$

c) La tensión necesaria es:

$$T = \mu v^2 = 0.002 \times (7.2)^2 = 0.002 \times 51.84 = 0.1037 \text{ N}$$

Ejercicio 8: Ondas Estacionarias en los Cables de un Buque

a) La longitud de onda del tercer modo normal es:

$$\lambda_3 = \frac{2L}{3} = \frac{2 \times 4.0}{3} = 2.67 \text{ m}$$

b) La velocidad de propagación es:

$$v = f_3 \lambda_3 = 30 \times 2.67 = 80.1 \text{ m/s}$$

c) La tensión T necesaria es:

$$T = \mu v^2 = 0.006 \times (80.1)^2 = 0.006 \times 6416.01 = 38.5 \text{ N}$$

d) Los primeros tres modos normales se ilustran en los siguientes gráficos:

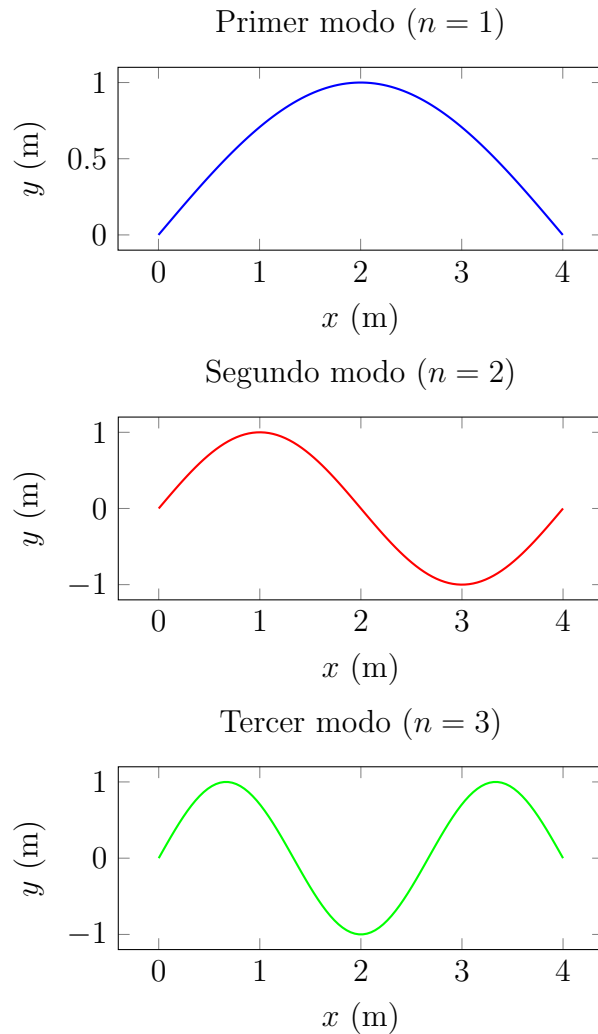


Figure 2: Primeros tres modos normales de oscilación del cable.

e) Las ondas estacionarias generadas por vibraciones pueden inducir resonancia, aumentando las tensiones en el cable y potencialmente debilitando el mástil debido a cargas cíclicas adicionales.