



PRUEBA N°3
MATEMÁTICAS III

NOMBRE: _____ CURSO: 3° EJ _____.

- 1. **DOCENTE(S):** L. Arancibia, C. Hardy
- 2. **FECHA:** 06/06 /2023
- 3. **UNIDAD TEMÁTICA 3:** Aplicaciones de la Integral.
- 4. **TIEMPO:** 80 min.
- 5. **PUNTAJE TOTAL - PUNTAJE PARA APROBAR:** 100 - 60
- 6. **MATERIALES:** de escritorio. Calculadora no algebraica.

INDICACIONES:

- Lea cuidadosamente la prueba antes de comenzar a responder. La comprensión de los enunciados es parte de la prueba.
- Todo resultado debe estar argumentado o justificado a través de sus cálculos explícitos en sus respuestas.
- Escriba con tinta o pasta, en orden, con limpieza y claridad. Si desea anular parte de su trabajo, tórjelo con una línea horizontal encima del escrito, no use corrector; no se corregirá lo escrito sobre corrector.
- No utilice lápiz grafito para responder, si utiliza grafito no podrá tener acceso a correcciones.

7. RESULTADOS OBTENIDOS:

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	30	
2	35	
3	35	
TOTAL	100	
	NOTA	



PREGUNTA N° 1 (30 Puntos).

Capacidad Evaluada: Razonamiento lógico.

Objetivo: Analizar la convergencia de integrales impropias.

Contenido: Integral impropia.

a) Determine si las siguientes integrales impropias converge $\int_{-\infty}^0 \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^0 \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^0 \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^0 \frac{2e^x}{1+(e^x)^2} dx \right) \quad \int \frac{2e^x}{1+(e^x)^2} dx \quad t = e^x \Rightarrow dt = e^x dx \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(2 \arctg(e^x) \Big|_a^0 \right) \quad \int \frac{2 dt}{1+t^2} = 2 \arctg(e^x) \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(2 \arctg(1) - 2 \arctg(e^a) \right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{2\pi}{4} - 2 \arctg(e^a) \right) \\
 &= \left(\frac{2\pi}{4} - 2 \arctg(e^{-\infty}) \right) \\
 &= \left(\frac{2\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

el límite existe

$$\int_{-\infty}^0 \frac{2e^x}{1+e^{2x}} dx \quad \text{converge}$$



b) Dada la integral impropia; **expres**e el análisis de convergencia, **sin resolver**:

$$\int_{-3}^{\infty} \frac{1}{5x(x+3)} dx$$

$$rest : x \neq 0 \wedge x \neq -3$$

$$= \int_{-3}^{-2} f(x) dx + \int_{-2}^0 f(x) dx + \int_0^2 f(x) dx + \int_2^{\infty} f(x) dx$$

$$= \lim_{a \rightarrow -3^+} \left(\int_a^{-2} f(x) dx \right) + \lim_{b \rightarrow 0^-} \left(\int_{-2}^b f(x) dx \right) + \lim_{c \rightarrow 0^+} \left(\int_c^2 f(x) dx \right) + \lim_{d \rightarrow -\infty} \left(\int_2^{\infty} f(x) dx \right)$$



PREGUNTA N° 2 (35 Puntos).

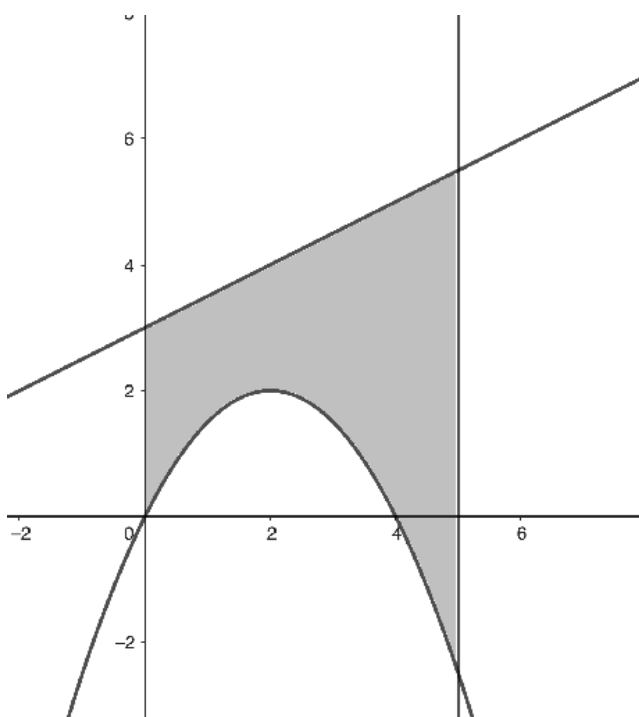
Capacidad Evaluada: Razonamiento lógico

Objetivo: Aplicar la integral definida en la resolución de problemas de áreas de curvas definidas en coordenadas rectangulares.

Contenido: Área.

a) **Grafique, achure y calcule**, mediante integrales, el área de la región delimitada

entre las curvas $y = 2x - \frac{x^2}{2}$; $y = \frac{x}{2} + 3$; $x = 0$; $x = 5$



$$A = \int_0^5 \left(\left(\frac{x}{2} + 3 \right) - \left(2x - \frac{x^2}{2} \right) \right) dx$$

$$A = \left(\frac{x^2}{4} + 3x - x^2 + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^5$$

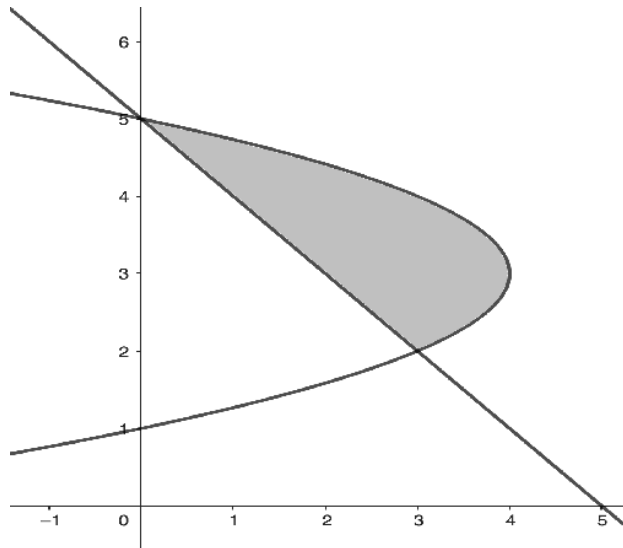
$$A = \left(3x - \frac{3x^2}{4} + \frac{x^3}{6} \right) \Big|_0^5$$

$$A = \left(15 - \frac{75}{4} + \frac{125}{6} \right) - (0)$$

$$A = \frac{205}{12} \approx 17,08$$



b) Grafique, achure y exprese, mediante integrales, el área de la región delimitada entre las curvas $x = 4 - (3 - y)^2$; $y = 5 - x$



ptos intersección

$$\left. \begin{array}{l} x = 4 - (3 - y)^2 \\ x = 5 - y \end{array} \right\}$$

$$4 - (3 - y)^2 = 5 - y$$

$$4 - (9 - 6y + y^2) = 5 - y$$

$$-10 + 7y - y^2 = 0$$

$$y^2 - 7y + 10 = 0$$

$$y = 2 \vee y = 5$$

$$A = \int_2^5 \left(\left(4 - (3 - y)^2 - (5 - y) \right) \right) dy$$

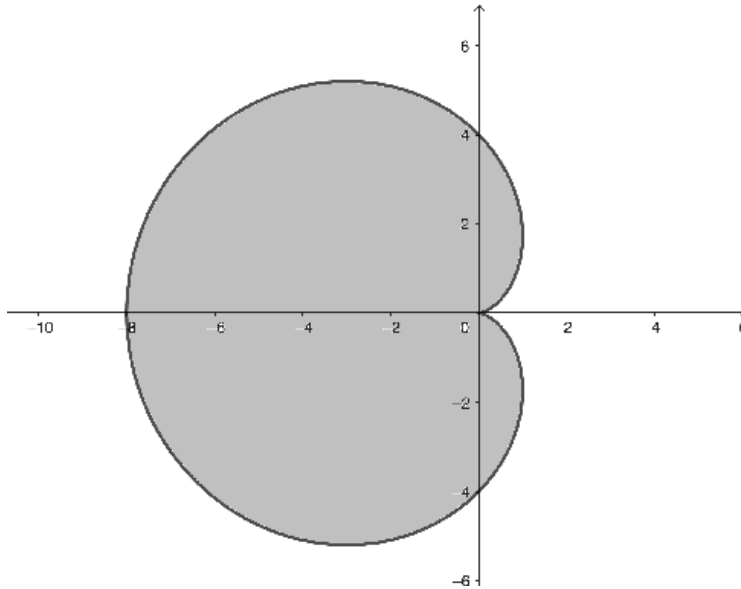


PREGUNTA N° 3 (35 Puntos).

Capacidad Evaluada:	Razonamiento lógico
Objetivo:	Aplicar la integral definida en la resolución de problemas de áreas de curvas definidas en coordenadas polares.
Contenido:	Área en coordenadas polares.

a) **Grafique, achure y calcule** el área, mediante integrales las curva

$$r = 4 - 4 \cos(\theta)$$



$$A_T = 2 A_1$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (4 - 4 \cos(\theta))^2 d\theta$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (16 - 32 \cos(\theta) + 16 \cos^2(\theta)) d\theta$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \left(16 - 32 \cos(\theta) + 16 \frac{\cos(2\theta) + 1}{2} \right) d\theta$$

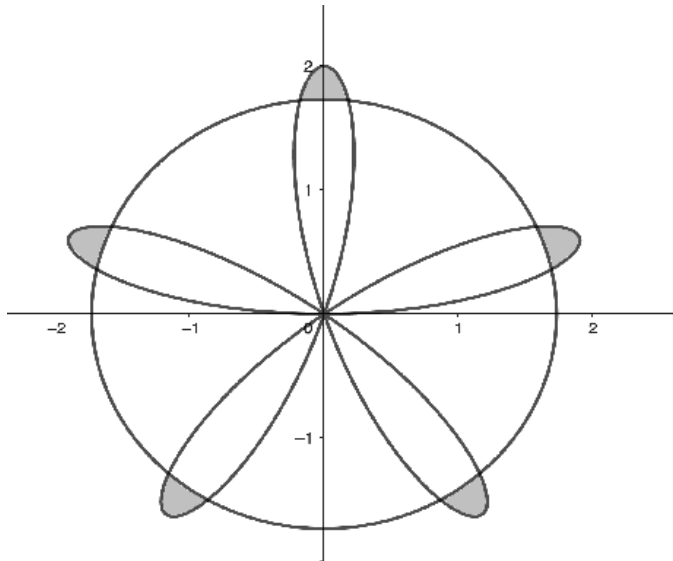
$$A_1 = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (16 - 32 \cos(\theta) + 8(\cos(2\theta) + 1)) d\theta$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \left(16\theta - 32 \sin(\theta) + \frac{8 \sin(2\theta)}{2} + 8\theta \right) \Big|_0^{\pi}$$

$$= \frac{1}{2} (16\pi - 0 + 0 + 8\pi) - (0) = 12\pi \quad u^2$$



b) **Achure y exprese**, mediante integrales, el área exterior a la curva $r = \sqrt{3}$ e interior a la curva $r = 2 \operatorname{sen}(5\theta)$



$$\left. \begin{array}{l} r = 2 \operatorname{sen}(5\theta) \\ r = \sqrt{3} \end{array} \right\}$$

$$2 \operatorname{sen}(5\theta) = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{sen}(5\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5\theta = \frac{\pi}{3} \quad \vee \quad 5\theta = \frac{2\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{\pi}{15} \quad \vee \quad \theta = \frac{2\pi}{15}$$

$$A_T = 5A_1$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{\pi/15}^{2\pi/15} \left[(2 \operatorname{sen}(5\theta))^2 - (\sqrt{3})^2 \right] d\theta$$

$$A_T = 5 \left(\frac{1}{2} \int_{\pi/15}^{2\pi/15} \left[(2 \operatorname{sen}(5\theta))^2 - (\sqrt{3})^2 \right] d\theta \right)$$