



CAPÍTULO 4

INDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE ALFABÉTICO.....	70
CAPÍTULO 4. EL MODELO Y SU BÚSQUEDA.....	72
4.1 RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.....	72
4.2 SISTEMA DE REFERENCIA.....	72
4.3 GENERALIDADES EN LA CONFECCIÓN DE GRÁFICOS.....	73
4.4 TABULACIÓN DE INFORMACIÓN Y GRÁFICA.	¡Error! Marcador no definido.
4.4.i.- IDENTIFICACIÓN DE CURVAS.....	79
4.5 FUNCIONES ALGEBRAICAS A USAR (curvas algebraicas).....	80
4.7 RECTIFICACIÓN DE CURVAS.....	85
4.7.i.- RECTIFICACIÓN POR COMPARACIÓN Y TANTEO.....	85
4.7.ii.- RECTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE POTENCIA POR MÉTODO ANALÍTICO.	86
4.7.iii.- RECTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL.....	88
4.7.iv.- RELACIÓN ENTRE TRES VARIABLES.....	90
4.7.v.- ANÁLISIS DE INFORMACIÓN. DETERMINACIÓN DE CONSTANTES.....	82
4.8 EJEMPLOS Y EJERCICIOS.....	91
4.8.i.- DESARROLLO USANDO MÉTODO DE AJUSTE LIBRE.....	91
4.8.ii.- DESARROLLO USANDO MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS.....	92
4.8.iii.- PROBLEMAS PROPUESTOS:	100
4.8.iv.- PROBLEMAS DE ANÁLISIS GRÁFICO CON PLANTEO.....	102



ÍNDICE ALFABÉTICO

abscisas	73
Ajuste libre.....	89
Cuadrados mínimos.....	90
Determinación de constantes.....	89
Ejemplos y ejercicios.....	93
ESCALAS.....	73
ESCALAS AXIALES.....	73
Función de potencia	81
Función exponencial.....	81
Función lineal.....	81
Funciones algebraicas a usar.....	80
GENERALIDADES DE CONFECCIÓN DE GRÁFICOS.....	73
Identificación de curvas.....	80
ÍNDICE ALFABÉTICO.....	70
ÍNDICE DE CONTENIDOS	69
MÉTODO DE AJUSTE LIBRE	93

MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS	94
ordenadas	73
Problemas con planteo	106
Problemas propuestos.....	104
Problemas resueltos.....	93
Recolección de información	72
RECTA, ecuación.....	82
Rectificación de curvas.....	84
Rectificación de una función exponencial.	87
RECTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN POTENCIAL	85
RECTIFICACIÓN POR COMPARACIÓN Y TANTEO	84
Relación entre tres variables.....	88
Sistemas de referencia.....	72
Tabulación de información	78



CAPÍTULO N°4:
EL MODELO Y SU BÚSQUEDA.



CAPÍTULO 4. EL MODELO Y SU BÚSQUEDA.

- A.- Recolección de información.
 - B.- Sistemas de referencias.
 - C.- Tabulación de información y gráfica.
 - D.- Rectificación de curvas.
 - E.- Análisis de información. Determinación de constantes.
 - F.- Ejemplos / Ejercicios.
-

4.1 RECOLECCIÓN DE INFORMACIÓN.

La recolección de información proviene de efectuar una experiencia o de la observación y control de un fenómeno que se presente en forma periódica. Normalmente, los datos obtenidos se ordenan en tablas de valores, cuyo análisis, permiten la obtención de "información" acerca del fenómeno en cuestión.

La recolección de los datos debe efectuarse en forma prolija y con mucha seriedad si se desea obtener un resultado certero en lo que se desea comprobar. Aquí deben identificarse correctamente las variables (dependiente e independiente) para efectuar un posterior análisis de la situación y así establecer una conclusión valedera.

4.2 SISTEMA DE REFERENCIA.

Cada vez que deseamos indicar la posición de un objeto, lo hacemos estableciendo una referencia, por ejemplo: "el florero que se encuentra sobre la mesa al centro del comedor". Hemos indicado el objeto y una secuencia de información que identifica su posición. En general, para fijar los elementos que intervienen en los fenómenos en estudio, utiliza sistemas de referencia, entre los que podemos mencionar: coordenadas rectangulares, coordenadas cilíndricas, coordenadas esféricas y otros, que permiten la vinculación con otros temas, por ejemplo: notaciones de rumbo (navegación), coordenadas polares (relación con la electrónica: uso de fasores).

En los trabajos o problemas presentados en la asignatura de Física, se encontrarán diversos tipos de notación referida a la posición de un punto en el plano (o en el espacio) y su relación con los ángulos, lo que se relaciona con otras nomenclaturas, por ejemplo: coordenadas polares y rumbo. Muchos aspectos de la Física incluyen una descripción de una ubicación en el espacio. Por ejemplo: "la descripción matemática del movimiento de un objeto, requiere un método para describir la posición del objeto en un intervalo de tiempo", lo cual hace uso de las funciones y la gráfica de ellas.

4.3 GENERALIDADES EN LA CONFECCIÓN DE GRÁFICOS.

Independientemente del tipo de gráfico que se construya, hay algunas normas de aplicación general. A modo de ejemplo, se pueden mencionar:

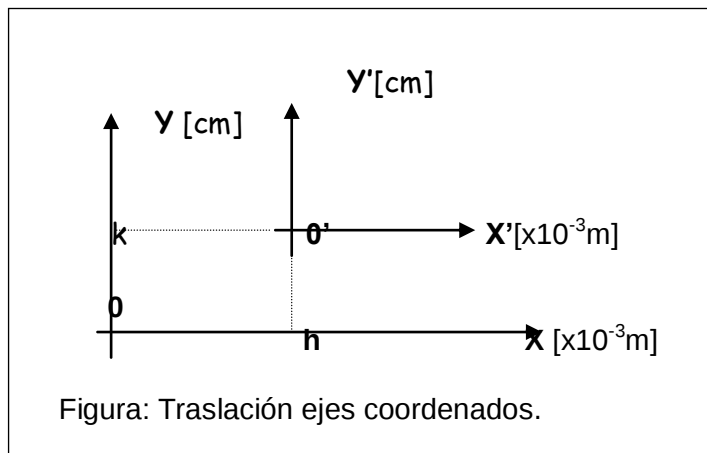
El plano cartesiano, el cual consta de dos rectas numéricas: una horizontal llamada eje de las abscisas o de las "X", y otra vertical llamada eje de las ordenadas o de las "Y", las cuales se intersecan en un punto que recibe el nombre de origen, al que corresponde el punto O.

Esos dos ejes dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes, que se numeran en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj: I, II, III y IV.

4.3.i.- ESCALAS AXIALES.

Se deben seleccionar las ESCALAS de los ejes (graduación en intervalos o subdivisiones), de tal manera que ocupe toda la hoja (o la mayor parte posible), evitando así que la gráfica quede reducida a una pequeña figura en una esquina. Las escalas (subdivisiones) en cada eje pueden ser diferentes en unidad de medida y tamaño de la subdivisión.

a) SISTEMA COORDENADO CONVENIENTE.



Dependiendo de los datos, el punto de intersección del par de ejes no tiene que ser necesariamente el origen del sistema de coordenadas $O(0,0)$, sino, el que sea conveniente $\{O'(h;k)\}$



4.3.ii.- GRÁFICO DE PUNTOS EN EL PLANO CARTESIANO.

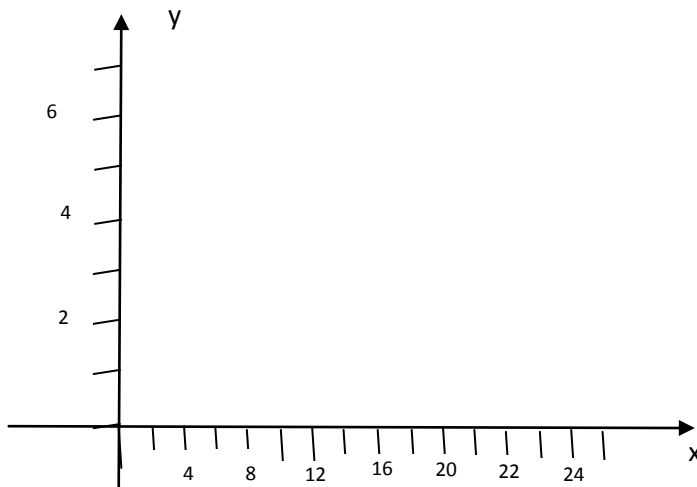
El sistema de referencia a utilizar como base será el de **coordenadas cartesianas** o también denominadas **rectangulares**.

Un punto en el plano se localiza como una pareja ordenada de valores (x, y) llamados coordenadas, donde "x" es la primera componente localizada en el eje de las abscisas, y la segunda es "y", la que se localiza en el eje de las ordenadas. Este punto representará una posición en el plano, por lo que sus unidades de medida serán de la dimensión "Longitud (L)".

a) EJES.

Generalmente la extensión física de las ordenadas y de las abscisas, por razones de equilibrio estético, son diferentes.

- En los ejes deben aparecer la notación de las variables, unidades y factores de multiplicación, si los hay. Por ejemplo: $D[x10^{-2} \text{ m}]$.
- La subdivisión es independiente por cada eje, es decir, el intervalo en que se subdividen no tiene por qué tener la misma unidad de medida ni la misma distancia entre cada subdivisión.



Las asignaturas dictadas por la Cátedra de Física, ocuparán la nomenclatura indicada en la figura "Sistemas de referencia". Es necesario recordar que las equivalencias mostradas, relacionan los siguientes grupos:

- Ejes Coordenados Cartesianos o Rectangulares.
- Notación de Navegación (Rumbo y orientación geográfica).
- Geometría y trigonometría (cuadrantes, ángulos, puntos en el plano)
- Vectores (notación cartesiana hasta tres dimensiones).



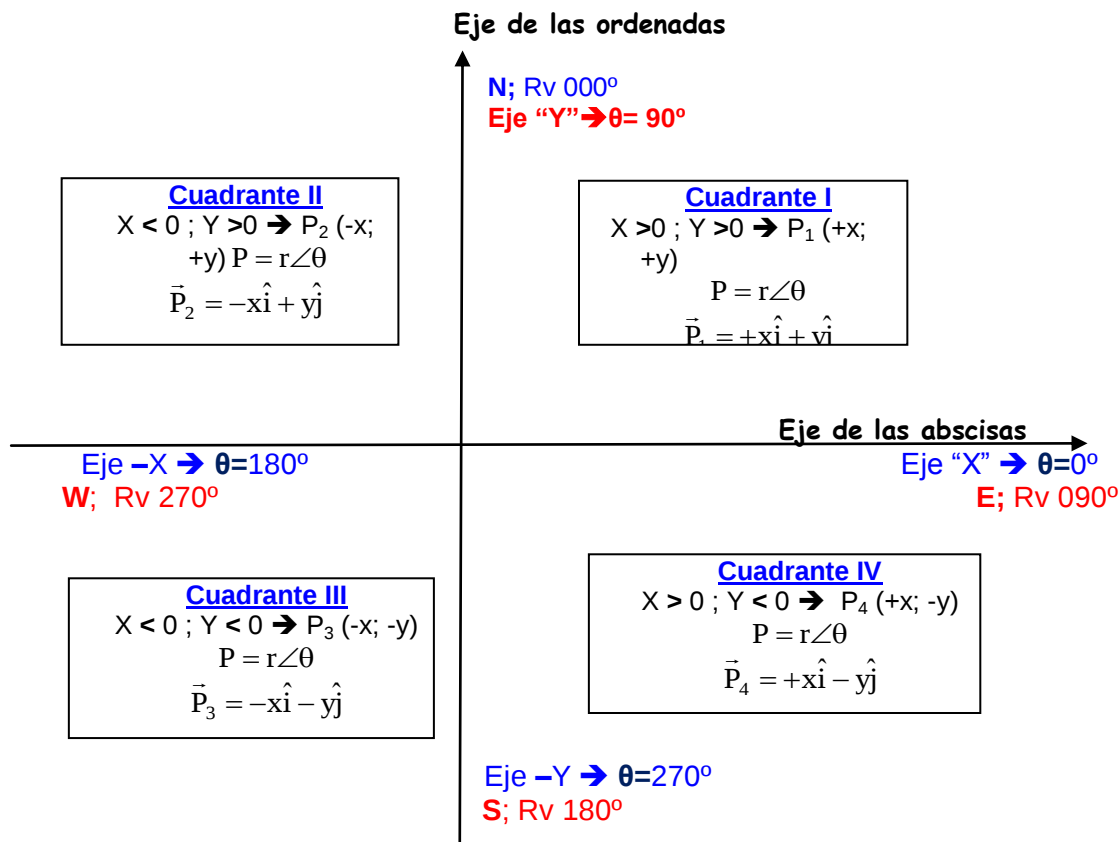
Tabla: Algunas equivalencias entre ejes que dividen el plano respecto al centro "O" del sistema:

SISTEMA	Horizontal hacia la derecha	Horizontal hacia la izquierda	Vertical hacia arriba	Vertical hacia abajo
GEOMETRÍA TRIGONOMETRÍA	+X	-X	+Y	-Y
	0°	180°	90°	270°
Coord. Axiales – Par ordenado	(+X ; 0)	(-X ; 0)	(0 ; +Y)	(0 ; -Y)
NAVEGACIÓN	Este	Oeste / Weste	Norte	Sur
	Rv 090°	Rv 270°	Rv 000°	Rv 180°
Vector unitario en coord. cartesianas o rectangulares	$\hat{i}$ o $\hat{x}$	$-\hat{i}$ o $-\hat{x}$	$\hat{j}$ o $\hat{y}$	$-\hat{j}$ o $-\hat{y}$

Rv: Rumbo verdadero respecto al norte geográfico.

Ubique los datos indicados el cuadro anterior, en la gráfica por cuadrantes dada a continuación:

Fig. EQUIVALENCIAS EN UN SISTEMA DE REFERENCIA:





Importante:

Un punto P(x;y) se escribe en coordenadas polares como "r/θ" (magnitud de la distancia al punto, símbolo de ángulo y la magnitud del ángulo).

Magnitud o longitud:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ donde "r" es el radio o distancia al origen".}$$

Ángulo con el eje polar (equivale al eje "X" positivo):

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), \text{ donde "θ" corresponde a la inclinación.}$$

Ejercicio:

- Confeccione un sistema de coordenadas rectangulares adecuado en el que pueda dibujar los siguientes puntos en el plano cartesiano: A(6;8)[cm], B(-12;5)[cm]; C(-16;-12)[cm] y D(4;3)[cm].
- Transforme cada punto dado a notación: (a) polar, (b) de navegación (rumbo).
- Graficar los rumbos en una Rosa de Maniobras y determinar un rumbo equivalente que reemplace a todos los anteriores.

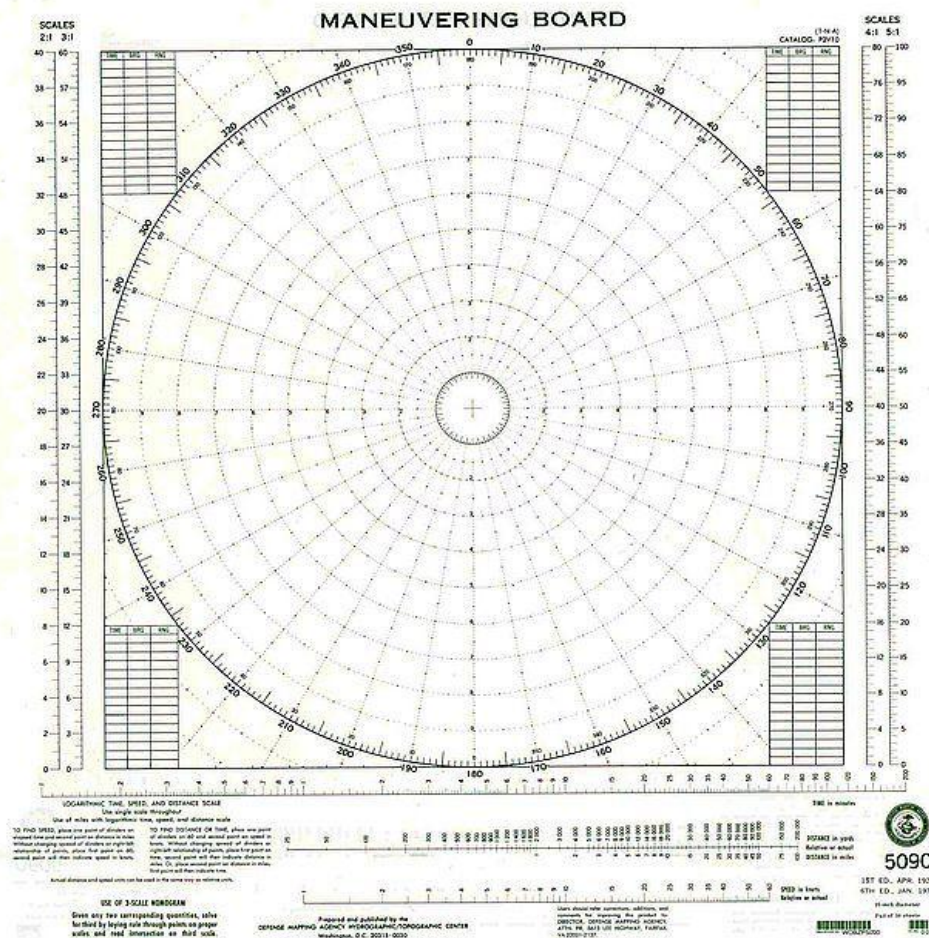
4.3.iii.- LA ROSA DE MANIOBRAS .

La “Rosa de Maniobras” corresponde a un sistema de coordenadas utilizado en navegación.

La Rosa de Maniobras es una hoja impresa con círculos concéntricos que representan distancias o velocidades y radios espaciados de diez en diez grados que representan rumbos o demoras, según el caso. Se emplean para la resolución gráfica de problemas de cinemática naval, en especial en cursos superiores y de Capitán de Yate.

La subdivisión del plano se efectúa asignando los cuatro puntos cardinales en lugar de los ejes de matemáticas “X” e “Y”. Además, contiene una subdivisión de la circunferencia en 360 partes comenzando desde la posición norte y aumentando de uno en uno hacia la derecha hasta el valor 359. En ella, la lectura del ángulo involucra pronunciar sus tres dígitos por el nombre de cada uno, por ejemplo: 030° se lee “cero”, “tres”, “cero” (no se indica “treinta”).

Las escrituras sobre la rosa de Maniobras pueden ser efectuadas considerando el norte geográfico (rumbo verdadero) o la proa del buque (norte relativo)





4.3.iv.- GRÁFICO DE FUNCIONES EN EL PLANO CARTESIANO

a) EJES.

En el eje vertical (eje de las ordenadas) va siempre la variable dependiente y en el eje horizontal (eje de las abscisas) la variable independiente, salvo que se indique explícitamente lo contrario. Generalmente la extensión física de las ordenadas y de las abscisas, por razones de equilibrio estético, son diferentes.

- i) En los ejes deben aparecer la notación de las variables, unidades y factores de multiplicación, si los hay.
- ii) Las escalas empleadas en los ejes pueden ser diferentes.
- iii) No es necesario que las unidades empleadas en los ejes tengan la misma magnitud.

b) IDENTIFICACIÓN.

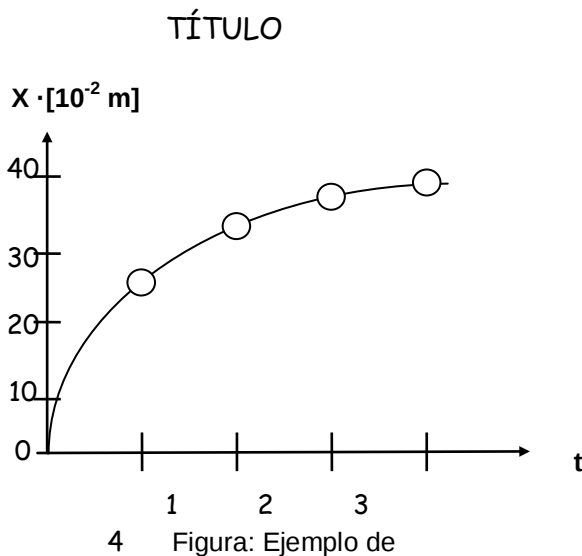
Todo gráfico debe llevar un título claro y breve, más una referencia a la tabla de donde provienen los datos.

c) ERROR.

Los puntos representados en la gráfica deben ir rodeados de pequeños círculos que indican aproximadamente los errores de la medición obtenida experimentalmente.

d) INCERTIDUMBRE.

La curva debe ocupar el tamaño de la hoja o el espacio dispuesto, para su construcción. No debe mostrar más exactitud que la incertidumbre en las mediciones, por lo tanto, la incertidumbre no debe corresponder a más de una o dos de las divisiones más chicas.



e) TRAZADO DE CURVA.

La unión de los puntos se hace a través de una curva suave (sin cambios bruscos) que se adaptan lo mejor posible al conjunto. Hablar de curvas es genérico, es decir, la "recta" es considerada una curva cuando se refiere a los tipos de funciones.

Se construye con la ayuda de una regla (de preferencia: transparente) trazando una recta que deje, por sobre y bajo ella, más o menos, la misma cantidad de puntos. Se sugiere lo siguiente:

- Graficar los puntos de la tabla de datos experimentales.
- En torno a cada uno de los puntos dibujar una circunferencia con centro en el punto en cuestión. Cada circunferencia debe tener un radio estimado por quien construye el gráfico, teniendo en cuenta las unidades usadas en su medición. Por ejemplo, si las medidas experimentales están en metros, su error puede ser del orden de los 4 [mm], luego, la circunferencia debería tener un radio aproximado de 2 [mm]. El círculo representa el error en la medición experimental obtenida.
- Finalmente, se traza una recta que debe dejar por sobre ella la misma cantidad de puntos que por debajo de ella, tratando de que la recta pase por la mayor cantidad de puntos posibles.

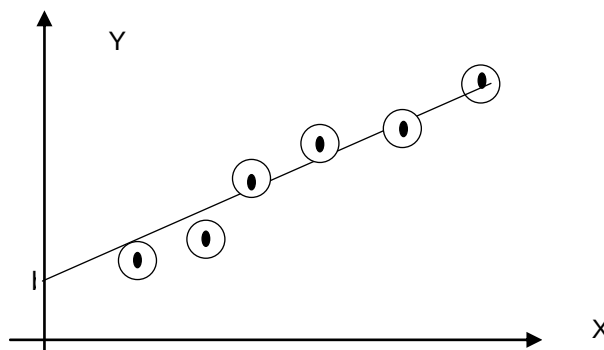


Fig.: Recta de ajuste libre.

4.3.v.- IDENTIFICACIÓN DE CURVAS.

Difícilmente, con la sola observación de una tabla de valores, se podrá establecer el tipo de relación que exista entre las variables involucradas, por tal motivo, se dispone de algunos métodos de análisis. Un método poderoso para estudiar los datos es su representación gráfica. Permite obtener y predecir un modelo matemático, para la relación entre las variables. En todo caso, el gráfico nos permite observar rápidamente donde se encuentra aproximadamente: un intercepto, un punto de mínimo y máximo, algún punto de inflexión, y el tipo de curva entre otros parámetros.

En estadística existen diversos tipos de gráficos, como: de sectores (pastel), de barras, de puntos, histogramas, etc. Utilizaremos en nuestro curso, gráficos de puntos en el plano cartesiano, de los cuales se analizarán todos sus elementos.



a) POR COMPARACIÓN:

Este método consiste en relacionar la curva graficada con alguna curva establecida por la Geometría Analítica o, a través de una tabla de curvas (por ej.: la Tabla Larsen) y sus respectivas ecuaciones.

b) POR TANTEO:

Se reemplaza los valores de la variable independiente en el modelo escogido, para obtener el valor de la variable dependiente. Si coincide con los medidos el modelo es el correcto.

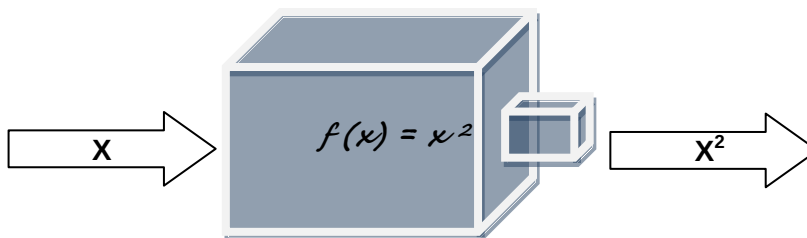
El método que utilizaremos para determinar el tipo de curva es el de comparación.

4.4 FUNCIONES ALGEBRAICAS A USAR (curvas algebraicas)

Una función "f" es una regla de correspondencia que asocia cada objeto "x" de un conjunto llamado dominio, un valor único $f(x)$ de un segundo conjunto. El conjunto de valores así obtenido se llama rango de la función.

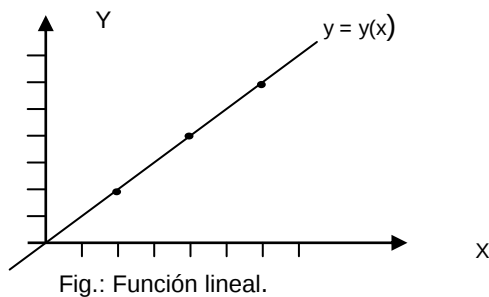
Una función es como una máquina: tiene una entrada y una salida. Lo que sale está relacionado de alguna manera con lo que entra. Así que $f(x)$ corresponde a la función (lo que hace la máquina) y se anota: "f", y el argumento "x" se pone dentro del paréntesis indicando la variable independiente (valores que se ingresarán a la máquina para ser procesados por "f").

Por ejemplo, al escribir la función: $f(x) = x^2$ se indica que la función "f" toma a "x" y lo eleva al cuadrado para cada valor de "x" considerado en el rango de definición de la función.



Nota: A veces las funciones no tienen nombre que las identifique (por ejemplo: $g(x)$, $v(t)$ o $h(s)$), y puede que vea algo como $y = x^2$. En el texto, se trabajará en dos variables y se estudiarán solamente las funciones: Lineal, de Potencia y Exponencial.

4.4.i.- FUNCIÓN LINEAL.



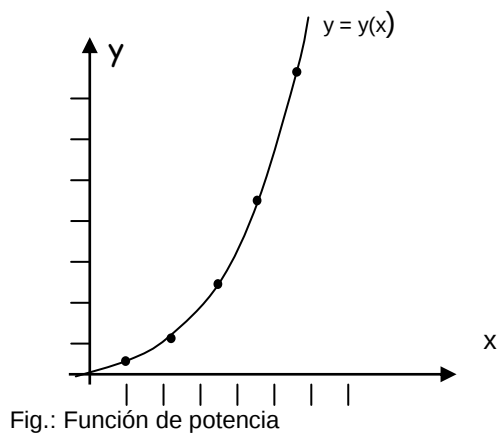
Modelo matemático:

$$y(x) = m \cdot x + b$$

Donde: "m" y "b" son las constantes.

Nombre: Función Lineal.

4.4.ii.- FUNCIÓN DE POTENCIA.



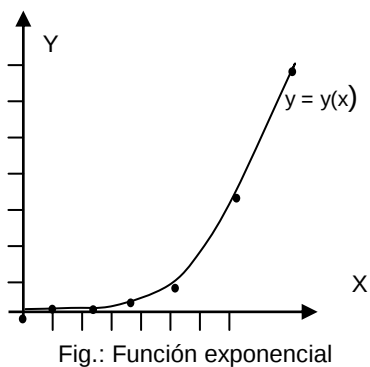
Modelo matemático:

$$y(x) = k \cdot x^n$$

Donde: "k" y "n" son las constantes.

Nombre: Función de potencia

4.4.iii.- FUNCIÓN EXPONENCIAL.



Modelo matemático:

$$y(x) = k \cdot e^{nx}$$

Donde: "k" y "n" son las constantes.

Nombre: Función exponencial

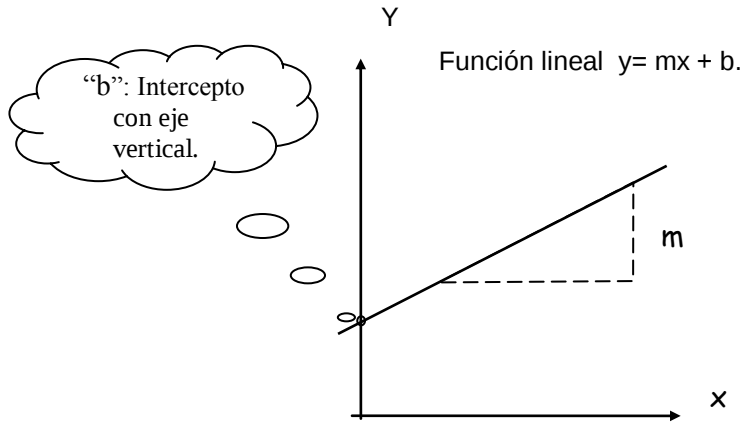


4.5 LA RECTA Y SU ECUACIÓN.

La función más simple es la "**función lineal**", más conocida como "**ecuación de la recta**". Su modelo matemático es:

$$y = m x + b$$

donde "m" corresponde a la pendiente de la recta y "b" al intercepto con el eje vertical.



4.5.i.- ANÁLISIS DE INFORMACIÓN. DETERMINACIÓN DE CONSTANTES.

Suponga que al representar los datos de una tabla de valores en papel milimetrado ordinario, se obtiene un conjunto de puntos que sugiere el trazado de una recta.

Debido al error experimental inherente al proceso de medición, el alineamiento de los puntos nunca será perfecto y sólo se aproximará a una recta. Entonces se tiene el problema de que varias rectas ligeramente diferentes podrían servir, y debemos elegir una que naturalmente ha de ser la mejor que se ajusta al conjunto de los datos representados.

Para determinar las constantes de la mejor función lineal (recta) que representa la curva en cuestión, pueden ocuparse dos métodos:

- CRITERIO DE LA OBSERVACIÓN PERSONAL, lo que se llama "RECTA DE AJUSTE LIBRE".
- CRITERIO MATEMÁTICO ESTADÍSTICO que da origen a la "RECTA DE CUADRADOS MÍNIMOS".



a) RECTA DE AJUSTE LIBRE.

La pendiente se calculará tomando dos puntos (nunca consecutivos) que **se encuentren sobre la recta**, en caso de que los puntos experimentales no coincidan o no estén sobre la recta dibujada, debe determinarse un par de ellos cercanos a los extremos de la recta y que pertenezcan a ella.

Para tal efecto se debe buscar un valor de la variable independiente, trazar la vertical hasta cortar la recta dibujada y trazar la horizontal hasta cortar el eje vertical. Luego, debe leer ambas coordenadas las que representarán su primer par ordenado perteneciente a la recta, análogamente, determina un segundo punto cercano al otro extremo de la recta y con ellos determina la pendiente.

$$\text{Pendiente: } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

El intercepto con el eje vertical "Y" es "b" y se puede obtener directamente de la tabla de valores, también se puede leer directamente del gráfico o del reemplazo del valor de la pendiente "m" y uno de los puntos P(x ; y) de la gráfica en la ecuación de la recta. Según lo dicho, resulta:

$$b = y - mx$$

No olvide el manejo de unidades en el cálculo y determinación de la pendiente y del intercepto.

b) MÉTODO DE LOS CUADRADOS MÍNIMOS.

Es un método estadístico que permite determinar los valores de la correlación, la pendiente y del intercepto de una recta.

Se calcula la PENDIENTE "m", el INTERCEPTO VERTICAL "b" y el COEFICIENTE DE CORRELACIÓN de la recta de cuadrados mínimos a través del método explicado a continuación.

Considerar "i" como el número indicador de cada una de las mediciones; "X" e "Y" los valores de las variables independiente y dependiente respectivamente. Previo al cálculo de "m" y "b", es recomendable ordenar los datos en base a la tabla "Análisis de cuadrados mínimos":



Tabla: Análisis de cuadrados mínimos					
'i'	X _i	(X _i) ²	Y _i	(Y _i) ²	(X _i)·(Y _i)
1					
2					
...					
...					
X _i					
n= __	Σ(X _i)=	Σ(X _i) ² =	Σ(Y _i)=	Σ(Y _i) ² =	Σ(X _i ·Y _i) =
	(ΣX _i) ² =		(ΣY _i) ² =		

El que se haya dibujado una recta no significa que realmente lo sea, lo que los mínimos cuadrados hacen es dar la mejor recta que se puede asociar al conjunto de puntos, para saber si realmente el conjunto de puntos corresponde a una recta debe usarse la correlación lineal "r" dada por:

$$r = \frac{n\Sigma(x_i y_i) - \Sigma(x_i) \cdot \Sigma(y_i)}{\sqrt{[n\Sigma(x_i^2) - (\Sigma x_i)^2] \cdot [n\Sigma(y_i^2) - (\Sigma y_i)^2]}}$$

Relación para calcular la correlación lineal.

Si su valor es cercano a "1" o "-1", como **0,99988**, la recta es buena, sin embargo, si es 0,988, lo más probable es que los puntos no correspondan a una recta (se ha escogido mal el modelo inicial y debe buscar otro).

Una vez verificada la correlación, se calculan los valores numéricos de la pendiente "m" y del intercepto "b" con el eje vertical, según las relaciones dadas por:

$$m = \frac{n\Sigma(x_i \cdot y_i) - \Sigma(x_i) \cdot \Sigma(y_i)}{n\Sigma(x_i^2) - (\Sigma x_i)^2}$$

$$b = \frac{\Sigma(x_i^2) \cdot \Sigma(y_i) - \Sigma(x_i) \cdot \Sigma(x_i \cdot y_i)}{n\Sigma(x_i^2) - (\Sigma x_i)^2}$$



- n: número de mediciones.
m: pendiente de la recta de cuadrados mínimos.
b: Intercepto de la recta con eje de las ordenadas.

4.6 RECTIFICACIÓN DE CURVAS. .

Muchas veces los pares de puntos se disponen siguiendo una función **no lineal** conocida (como son: la función de potencia y la función exponencial); mediante un cambio conveniente se puede reducir la función del caso a una función lineal, puesto que la recta es la forma más satisfactoria de una gráfica para ser identificadas con seguridad sus constantes: pendiente ("m") e intercepto con eje ("b"). Por tal motivo se han desarrollado procedimientos que permiten conseguir una representación lineal de datos experimentales, conocidos como métodos de rectificación de curvas.

- Rectificar: se entenderá como una "transformación" de la función no lineal del caso en estudio a una lineal mediante la aplicación de la función "logaritmo" al modelo escogido.

4.6.i.- RECTIFICACIÓN POR COMPARACIÓN.

En el texto ocuparemos solamente la comparación con dos curvas simples de dos funciones no lineales: función de potencia y función exponencial.

Identificación de curva: Este método consiste en relacionar la curva graficada (idealmente en papel milimetrado) con alguna curva establecida por la Geometría Analítica o, a través de una tabla de curvas (por ej.: la Tabla Larsen) y sus respectivas ecuaciones.

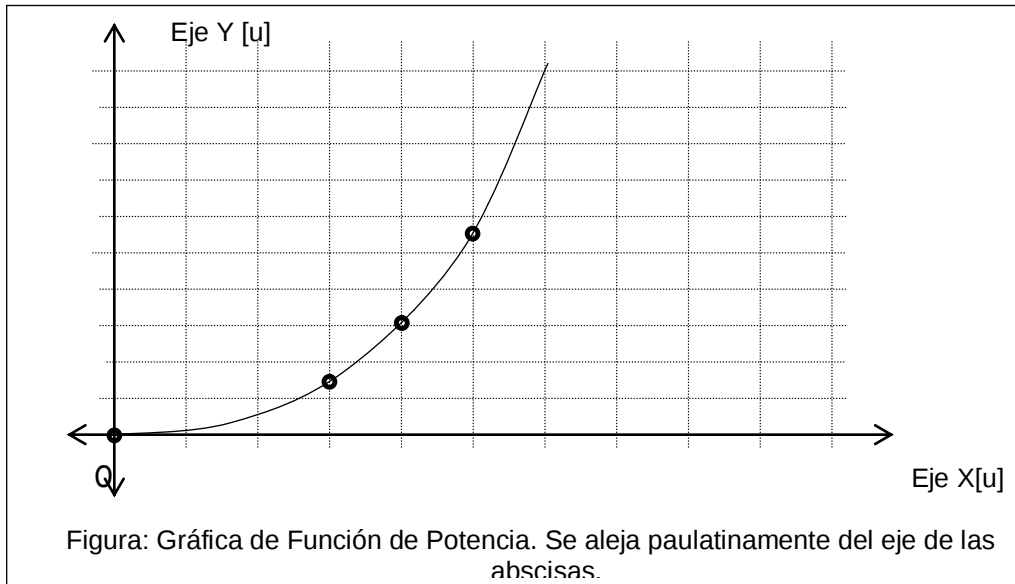
Determinación de ecuación: Una vez hallada la curva (con su ecuación), más parecida a la del gráfico del problema, se reemplaza la variable independiente de éste por la "ecuación posible".

Función de rectificación: Se aplica la función logaritmo (natural o decimal) según el tipo de función algebraica que cumpla con ser similar a la gráfica experimental. Si la suposición de semejanza fue correcta, se habrá de obtener una línea recta de pendiente positiva, cero o negativa.



4.6.ii.- RECTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN DE POTENCIA POR MÉTODO ANALÍTICO.

La característica de esta curva es que se aleja suavemente del eje horizontal (se aproxima si el exponente es negativo) a medida que se avanza a lo largo de él.

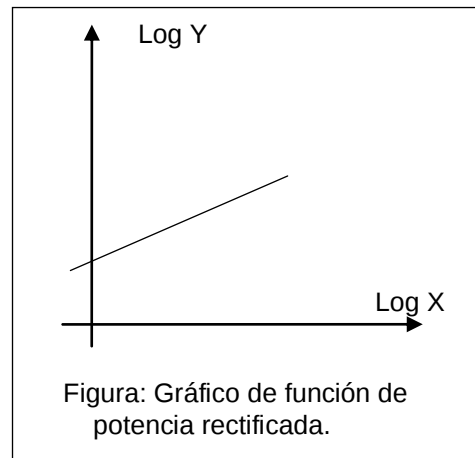


Este método es el indicado cuando el fenómeno en estudio se rige por una expresión matemática del grupo de las funciones de potencia de la forma:

$$y = k x^n,$$

donde "k" y "n" son constantes de proporcionalidad.

Para analizar la gráfica se recurre a un método de análisis que implica la **aplicación del logaritmo decimal**, cuyo propósito de obtener una recta (ver figura: Gráfico de función de potencia rectificada), de la cual, es más fácil obtener su pendiente e intercepto con el eje de las ordenadas, luego, efectuando la operatoria inversa (antilogaritmo) se obtienen los valores para el modelo de la función.



Aplicando el logaritmo decimal (ver propiedades de logaritmos en anexos) a ambos miembros de la igualdad, se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{Log } y & = & n \cdot (\text{Log } x) & + & \text{Log } K. \\ \boxed{} & & \boxed{} & & \boxed{} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Y & = & m \cdot X & + & b \end{array}$$

La expresión anterior concuerda con el modelo matemático de la ecuación de la recta:

$$Y = m \cdot X + b.$$

Además, como "K" es constante, también lo es, **Log(K) = b** (que corresponde al intercepto de la curva con el eje de las ordenadas o eje vertical).

Si se asocian los logaritmos con las constantes y variables indicadas:

$$\text{Log}(y) \rightarrow Y$$

$$\text{Log}(x) \rightarrow X$$

$$\text{Log}(K) \rightarrow b \quad \text{obteniendo:} \quad Y = m \cdot X + b$$

Donde:

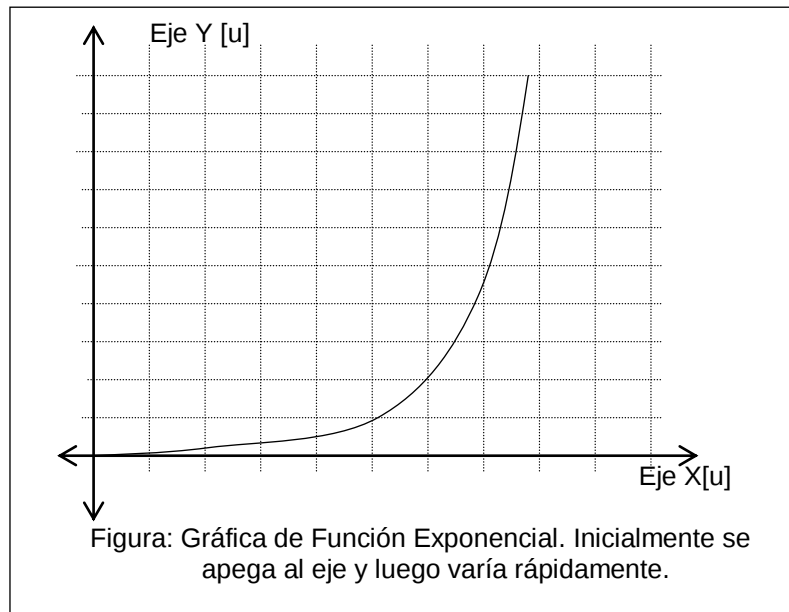
- "m" corresponde a la pendiente de la ecuación de una recta (correspondiendo en este caso a la de una curva rectificada).
- "b" es el intercepto con el eje vertical.
- Tanto la pendiente "m" como el intercepto "b" se pueden determinar por el ;Método de Ajuste Libre o el Método de los Cuadrados Mínimos.

Por esta razón:

- Si se grafica **Log(y)** v/s **Log(x)**, se obtendrá automáticamente una recta si es que la función en juego es del tipo: función de potencia.
- La pendiente de esta recta entregará el **valor del exponente "n"** (donde $n=m$).
- El intercepto vertical, $b = \text{Log}(K)$ entregará el **valor de la constante de proporcionalidad "K"**.
- Luego, calculando " $K = \text{Log}^{-1}(b) = \text{antilog}(b)$ ", se obtendrá el valor de la constante "K" de la función.



4.6.iii.- RECTIFICACIÓN DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL.



La característica de la gráfica es: en su comienzo se encuentra muy cerca al eje "X" y luego se aleja rápidamente (cuando el exponente es positivo).

Trabajo personal: Averiguar qué sucede cuando el exponente es negativo y cuando es fraccionario.

Si un conjunto de pares de datos se distribuyen como se muestra en la figura, entonces se dice que la distribución de puntos es de la forma de curva exponencial, cuya ecuación representativa es:

$$y = k e^{nx}$$

donde "n" y "k" son constantes por determinar.

Como la base utilizada en el modelo es de tipo exponencial, o sea, "e" ($e=2,718281\dots$), se utiliza el logaritmo natural para rectificar la función, lo que genera una lista de datos lineales. Se aplica la función logaritmo natural a ambos miembros de la igualdad, obteniendo:

$$y = k e^{nX} \quad \text{/aplicando "Ln"}$$

$$\text{Ln } y = \text{Ln } K + n \cdot x$$

Asociando:

$$\underbrace{Y}_{\text{Y}} = \underbrace{b}_{\text{b}} + \underbrace{n}_{\text{m}} \cdot \underbrace{x}_{\text{X}}$$

Donde la pendiente es: $m = n$,

y el intercepto vertical es:

$$b = \text{Ln}(k).$$

despejando "k":

$$k = \text{antiln}(b) = \ln^{-1}(b)$$

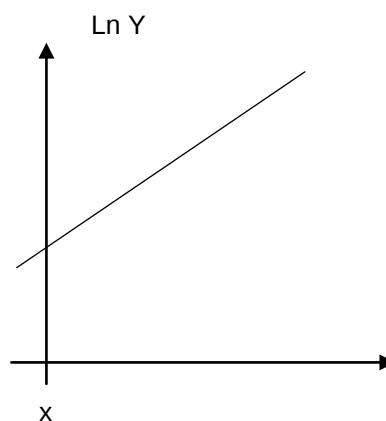


Fig.: Gráfico rectificación

Una vez calculados los valores de "m" y "b", se reemplazan en el modelo, y se escribe la ecuación de la recta de cuadrados mínimos en las siguientes formas:

$Y = m x + b$:si originalmente es una recta.

$\text{Log}(y) = m \cdot \text{Log}(x) + \text{Log}(K)$ si originalmente es una función de potencia.

$\text{Ln}(y) = m \cdot (x) + \text{Ln}(K)$:si originalmente es una función exponencial.

Nota :

- Las variables X e Y corresponden a los puntos (X;Y) de la tabla obtenida de las mediciones.
- Los logaritmos no llevan unidades (en los ejes coordenados).

Luego, en esta última expresión, se da a "X" dos valores arbitrarios del mismo orden de los que tiene X_i , pero no iguales a ellos, y se calcula el valor de " Y_i " en cada caso. Con esto, se tienen dos puntos $P_1(X_1;Y_1)$ y $P_2(X_2;Y_2)$ de la recta; representándolos en el papel junto a los otros se pueden unir por una recta. Esta es la recta de cuadrados mínimos, o sea, la que estadísticamente es la que se ajusta en forma más precisa a sus mediciones.



4.6.iv.- RELACIÓN ENTRE TRES VARIABLES.

Cuando en un experimento la variable dependiente “depende” de dos variables independientes, por ejemplo, $T = T(L; d)$, el procedimiento consiste en considerar primero la variable dependiente sólo con una variable independiente, manteniendo la otra constante. Debe encontrarse la relación identificando la constante de proporcionalidad ($T = T(L)$), con “d” constante. A continuación debe encontrarse la relación entre la variable dependiente con la otra variable independiente, manteniendo la otra constante. De igual manera debe determinarse la constante de proporcionalidad ($T = T(d)$), con “L” constante.

Finalmente, la relación de dependencia de la variable dependiente en función de las dos independientes será el resultado de las dos anteriores, donde debe evaluarse la constante de proporcionalidad, que de alguna manera está relacionada con las otras constantes de proporcionalidad ($T = T(L, d)$).

4.7 EJEMPLOS Y EJERCICIOS.

A) EJEMPLO 1: Mediante Una experiencia de laboratorio se obtiene la siguiente tabla de datos:

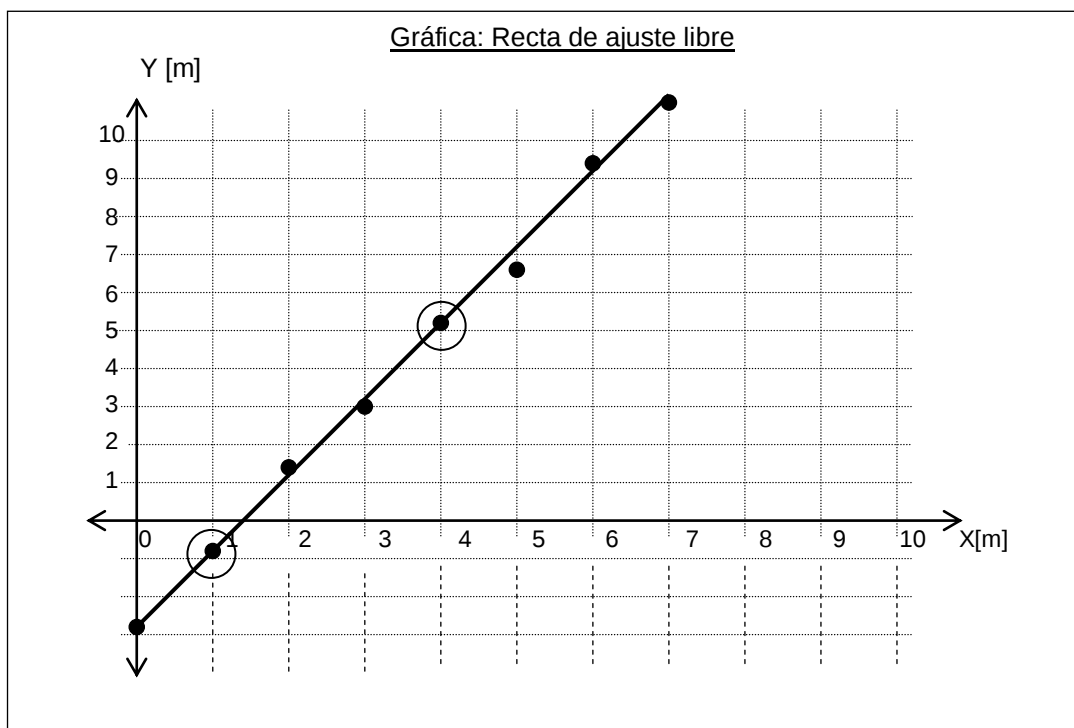
X[m]	0	1	2	3	4	5	6	7
Y[m]	-2,8	-0,8	1,4	3,0	5,2	6,6	9,4	11,0

Sobre un mismo gráfico y con diferente color, graficar las rectas que resultan de aplicar el método:

- (a) de ajuste libre.
- (b) de los cuadrados mínimos.

4.7.i.- DESARROLLO USANDO MÉTODO DE AJUSTE LIBRE.

Al graficar los datos por el método de ajuste libre se obtiene la recta mostrada en la gráfica "Recta de ajuste libre", desde donde se obtienen el intercepto con el eje de las ordenadas y pendiente de la recta.



Intercepto: Se obtiene del gráfico (apoyado en la tabla de datos) y corresponde al punto en donde $x=0$, es decir,

$$y = b = -2,8 \text{ [m]}$$



Pendiente: Se consideran dos puntos de la recta y se aplica la relación

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Si se consideran los puntos contenidos en la recta: $P_1(1;-0,8)$ y $P_2(4;5,2)$, se obtiene:

$$m = \frac{5,2 - (-0,8)}{4 - 1} = 2,0$$

Trabajo personal: Analice los datos y cálculos efectuados y responda: ¿Qué unidad de medida tiene "m" y por qué razón?

4.7.ii.- DESARROLLO USANDO MÉTODO DE CUADRADOS MÍNIMOS.

Primero se genera la tabla de valores para obtener los valores de "m" y "b" según indicaciones anteriores.

i	X_i	X_i^2	Y_i	Y_i^2	$X_i \cdot Y_i$
1	0	0	-2,8	7,84	0
2	1	1	-0,8	0,64	-0,8
3	2	4	1,4	1,96	2,8
4	3	9	3,0	9,00	9,0
5	4	16	5,2	27,04	20,8
6	5	25	6,6	43,56	33,0
7	6	36	9,4	88,36	56,4
8	7	49	11,0	121,00	77,0
N = 8	$\Sigma X_i = 28$	$\Sigma X_i^2 = 140$	$\Sigma Y_i = 33$	$\Sigma Y_i^2 = 299,4$	$\Sigma X_i \cdot Y_i = 198,2$
	$(\Sigma X_i)^2 = 784$		$(\Sigma Y_i)^2 = 1089$		

Segundo: Para verificar que realmente si se trata de una recta, hay que determinar el coeficiente de correlación "r":

$$r = \frac{8(198,2) - 28(33)}{\sqrt{[8(140) - 784] \cdot [8(299,4) - 1089]}} = \frac{661,6}{662,4} = 0,99879...$$

Análisis del valor de "r".

Como "r" es cercano a "1", los datos de la tabla representan los puntos de una recta. Luego, se determina el valor de "m" y "b" ocupando las relaciones para ello:

Tercero: Determinación de los valores de las constantes "m" y "b".

$$m = \frac{8(198,2) - 28(33)}{8(140) - 784} = \frac{661,6}{336} = 1,969...$$

$$b = \frac{140(33) - 28(198,2)}{8(140) - 784} = \frac{-929,6}{336} = -2,766...$$

Cuarto: Se escribe la ecuación de la recta cuyas constantes se han obtenido mediante el método de los cuadrados mínimos:

$$y = 1,969 x - 2,766$$

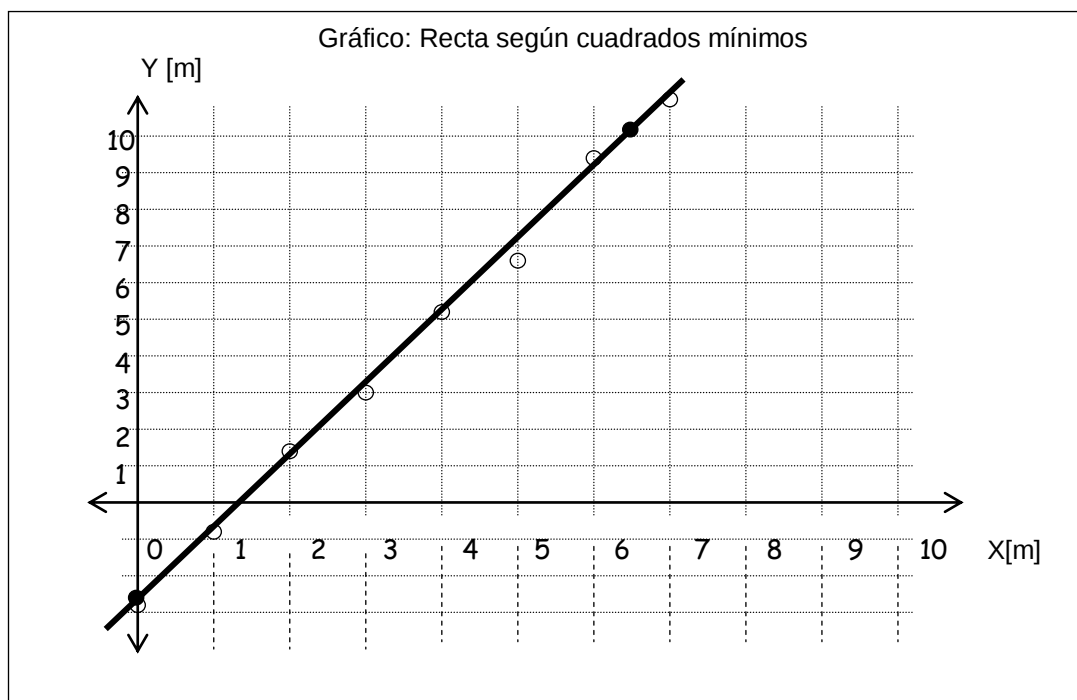
Que puede aproximarse a: $y = 2 x - 2,8$

Quinto: Verificación de la ecuación obtenida:

- De la ecuación se obtiene el intercepto ($b = -2,8[m]$) con el eje de las ordenadas y la pendiente de la recta ($m = 2,0$).
- Se considera un punto "x" cualquiera que no pertenezca a los de la tabla y se determina su ordenada "y". Con el par (x,y) más el intercepto se grafica la recta de los cuadrados mínimos.

Consideremos $x = 6,5$ y calculamos la ordenada correspondiente. $Y = 2(6,5) - 2,8 = 10,2$

Se dibuja en el gráfico los punto "b" (intercepto) y P(6,5); Luego se traza la recta de cuadrados mínimos:





B) EJEMPLO 2:

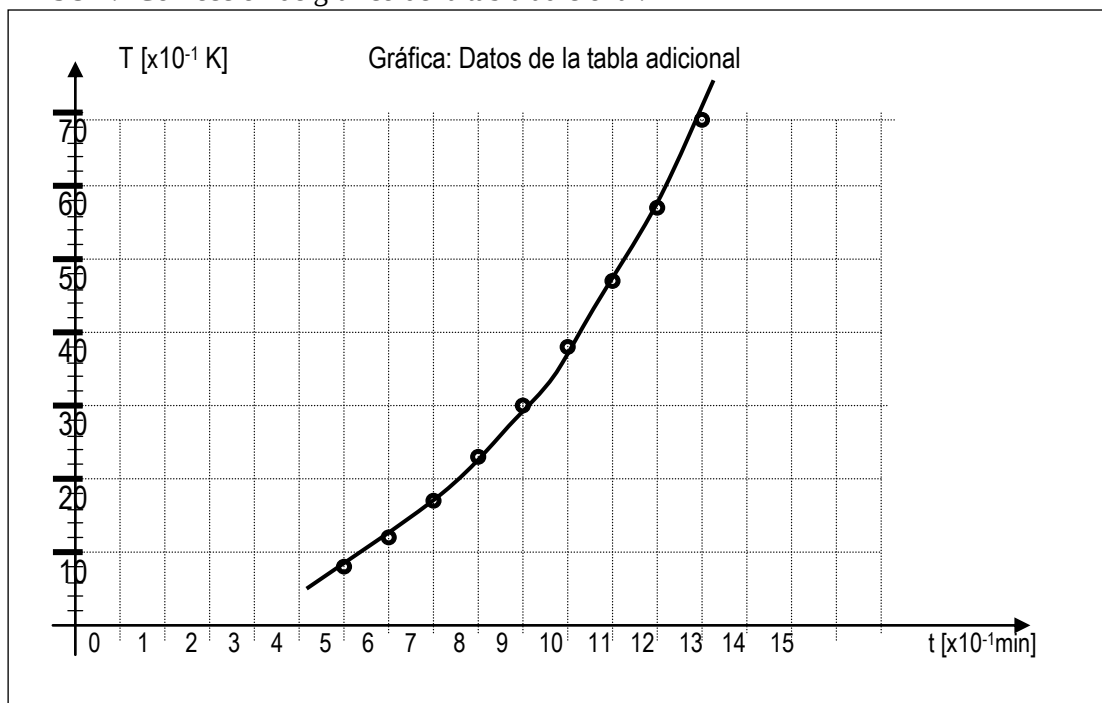
En un Laboratorio se efectúa una experiencia en donde se mide temperatura en función del tiempo arrojando la siguiente tabla de datos:

Tabla $T=T(t)$									
t [min]	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
T [K]	0.84	1.23	1.72	2.31	3.00	3.81	4.73	5.78	6.96

PASO 1.- Puede confeccionar una tabla adicional, ajustando medidas mediante el empleo de potencias de 10. Esto se hace para amplificar el gráfico y tener mejor visión de los datos sin modificar los mismos

Tabla adicional									
t [$\times 10^{-1}$ min]	6	7	8	9	10	11	12	13	14
T [$\times 10^{-1}$ K]	8.4	12.3	17.2	23.1	30.0	38.1	47.3	57.8	69.6

PASO 2.- Confección de gráfico de la tabla adicional.



PASO 3.- Modelo matemático:

Corresponde a una FUNCIÓN de POTENCIA, del tipo $Y = kX^n$.

PASO 4.- Criterio de rectificación a utilizar:



Aplicar logaritmos vulgares (o decimales) para rectificar la curva.

$$\text{Log } Y = \text{Log } k + n \log X$$

donde $\log(k) = b$ (intercepto de la recta con el eje $\log Y$)

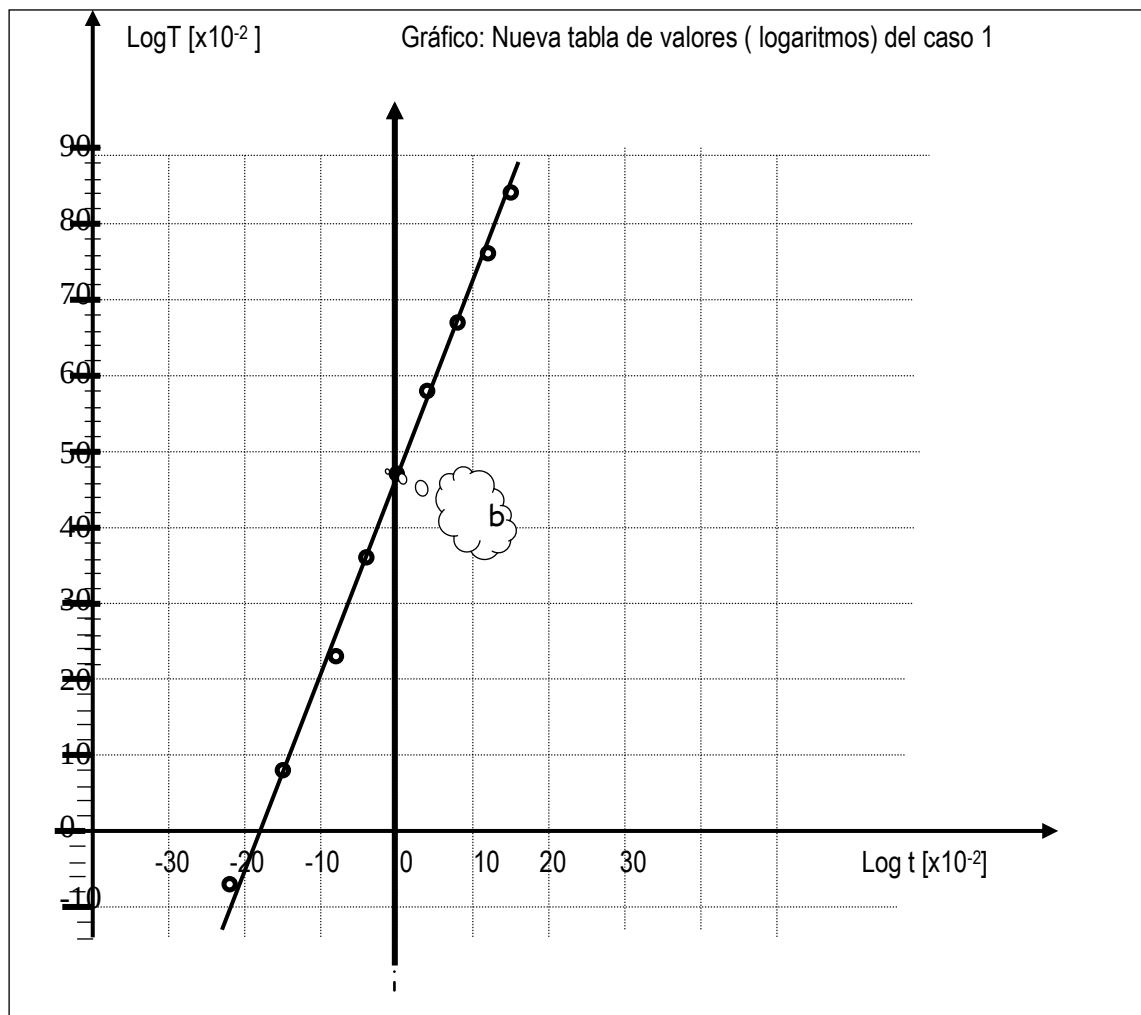
PASO 5.- Nueva tabla de valores con su gráfica (usando logaritmos) y su correspondiente tabla adicional modificando su escala para graficar en forma cómoda.

Log t	-0.222	-0.155	-0.097	-0.046	0.000	0.041	0.079	0.114	0.146
Log T	-0.076	0.090	0.236	0.364	0.477	0.581	0.675	0.762	0.843



Tabla modificada (acomodación de escalas sólo para graficar).

Log t [x10 ⁻²]	-22,2	-15,5	-9,7	-4,6	0,00	4,1	7,9	11,4	14,6
Log T[x10 ⁻²]	-7,6	9,0	23,6	36,4	47,7	58,1	67,5	76,2	84,2



PASO 6.- Determinación de parámetros:

De la tabla más la ayuda del gráfico 4, se puede obtener el intercepto de la curva con el eje log Y:

$$\log k = b = 0,477$$

$$k = \text{antilog}(0,477) = \log^{-1}(0,477) = 10^{0,447}$$

$k = 2,99916\dots$ el cual podemos aproximar a 3, luego

$$k = 3.$$

Además, tomando dos puntos de la curva, se determina la pendiente m , que en nuestro caso corresponde al valor de " $m = n$ ".

$$m = n = (0,363 - 0,090) / (-0,046 - (-0,155)) = 0,273 / 0,109 = 2,5045\dots$$



Lo que se puede aproximar a 2,5.

PASO 7.- Ecuación que relaciona las variables.

Finalmente, se reemplazan los valores en la ecuación supuesta:

$$y = k x^n..$$

$$T = 3 t^{2,5} = 3 t^{5/2} = 3 \sqrt{t^5}$$

C) EJEMPLO 3:

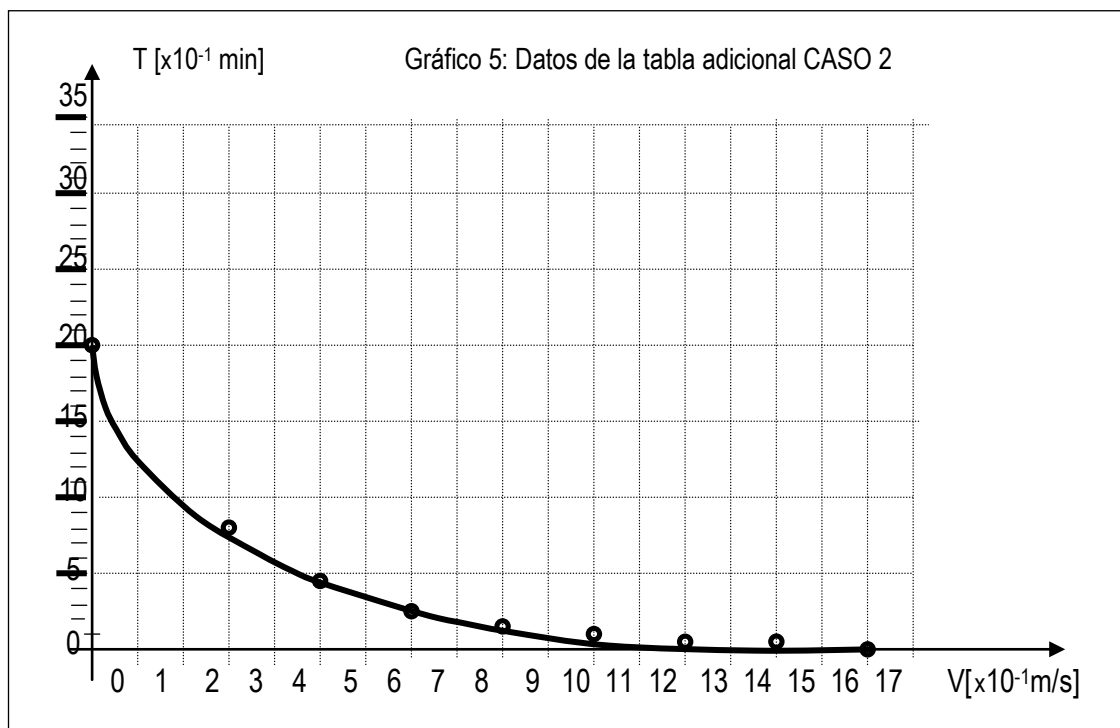
En un Laboratorio se efectúa una experiencia donde se relaciona la rapidez con el tiempo arrojando la siguiente tabla de datos:

Tabla V=V(T)									
V [m/s]	0	0.3	0.5	0.7	0.9	1.1	1.3	1.5	1.7
T [min]	2.00	0.8 1	0.45	0.24	0.13	0.07	0.04	0.02	0.01

PASO 1.- Confección de tabla adicional ajustando medidas empleando potencias de 10.

Tabla adicional									
V [x10 ⁻¹ m/s]	0	3	5	7	9	11	13	15	17
T [x10 ⁻¹ min]	20.0	8.1	4.5	2.4	1.3	0.7	0.4	0.2	0.1

PASO 2.- Confección de gráfico 5 de la tabla adicional.





PASO 3.- Modelo matemático: corresponde a una FUNCIÓN EXPONENCIAL del tipo

$$Y = k e^{cX}.$$

PASO 4.- Criterio de rectificación a utilizar: aplicar logaritmo natural para rectificar la curva.

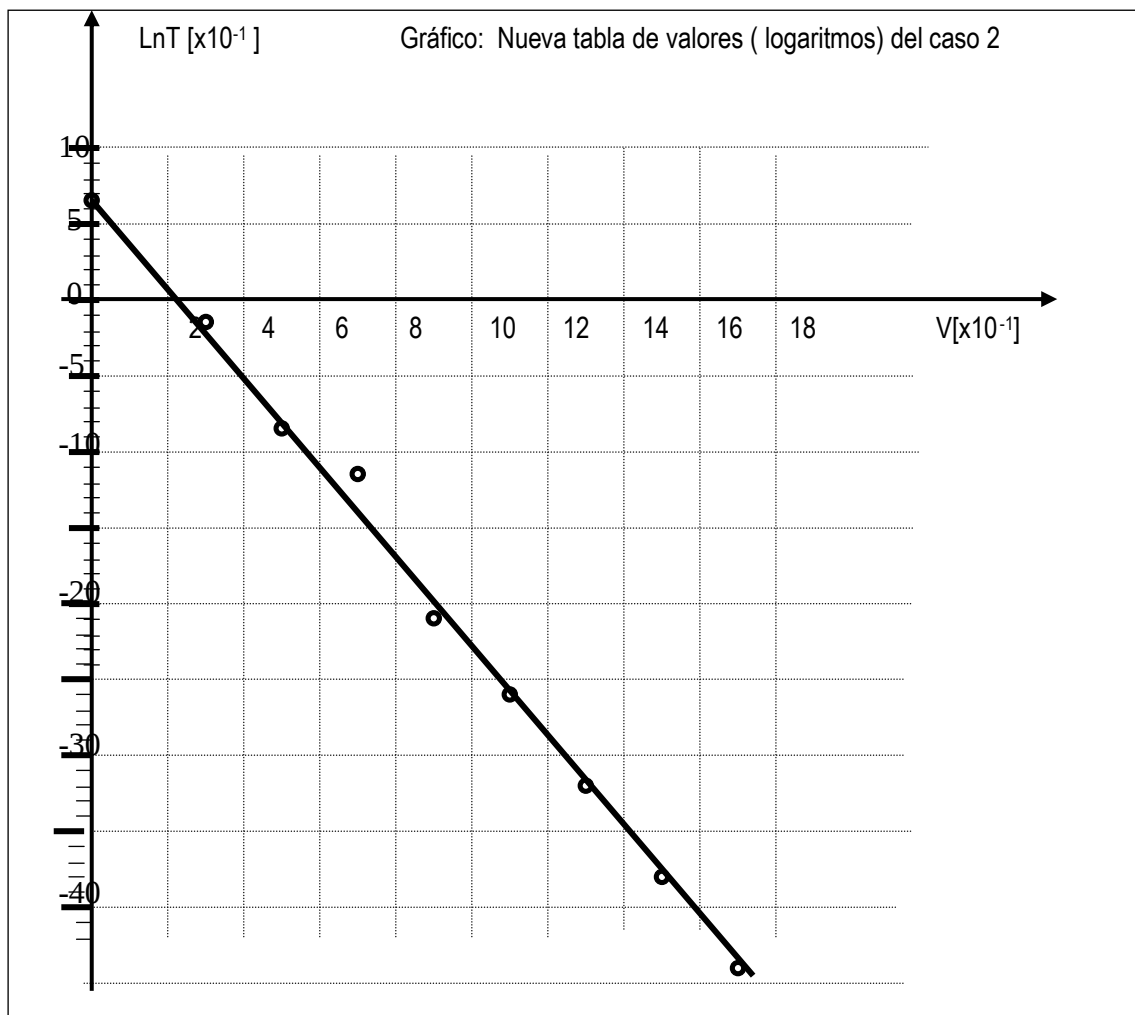
$$\ln(Y) = \ln(k) + c(X)$$

donde $\ln(k) = b$ (intercepto de la recta con el eje $\ln Y$).

PASO 5.- Nueva tabla de valores con su gráfica (usando logaritmos naturales para Y solamente) y una tabla con los datos "acomodados" a una escala mejor.

V	0.000	0.300	0.500	0.700	0.900	1.100	1.300	1.500	1.700
Ln T	0.693	-0.207	-0.807	-1.407	-2.007	-2.607	-3.207	-3.807	-4.407

$V[x10^{-1}]$	0,0	3,0	5,0	7,0	9,0	11,0	13,0	15,0	17,0
$\ln T[x10^{-1}]$	6,93	-2,07	-8,07	-14,07	-20,07	-26,07	-32,07	-38,07	-44,07



PASO 6.- Determinación de parámetros:

De la tabla, más la ayuda del gráfico, se puede obtener el intercepto de la curva con el eje $\ln Y$.

$$\ln k = b = 0,693$$

$$k = \ln^{-1}(0,693) = e^{(0,693)}$$

$$k = 1,99970 \quad \text{el cual podemos aproximar a 2, luego}$$

$$\mathbf{k = 2.}$$

Además, tomando dos puntos de la curva, se determina la pendiente m , que en nuestro caso corresponde al valor de " c ".

$$m = c = (-1,407 - 0,207) / (0,700 - 0,300) = -1,200 / 0,400 = -3 \dots$$

Punto 7.- Ecuación que relaciona las variables.

Finalmente, se reemplazan los valores en la ecuación supuesta: $y = k e^{nx}$.

$$\mathbf{T = 2 e^{-3v}}$$

Obs.:

Si no aparece una recta en la gráfica de la función rectificada, significa que es otro el modelo a utilizar.



4.7.iii.- PROBLEMAS PROPUESTOS:

Para cada uno de los casos dados a continuación (problemas propuestos), efectúe las acciones indicadas:

- 1.- Confeccione, si es necesario, una tabla adicional de modo que los datos sean fácilmente graficables.

Por ej.:

+ para eje X, cambiar a: $X [x 10^{-1} \text{ min}]$

+ para eje Y, cambiar a: $Y [x 10^{-2} \text{ }^{\circ}\text{K}]$

Comente: ¿Cuál es la razón de hacer este cambio en los ejes?

- 2.- Confeccione un gráfico de la situación (puede ser ocupando los datos de la tabla adicional).
- 3.- Identifique el modelo matemático de la gráfica obtenida.
- 4.- Aplique un criterio de rectificación adecuado para la curva cuando corresponda.
- 5.- Si rectificó: Confeccione una nueva tabla de valores y su gráfica. Compare con sus datos experimentales.
- 6.- Determine los parámetros necesarios (pendiente e intercepto) para obtener la relación matemática adecuada que rige la información de la tabla de datos experimentales.
- 7.- Escriba la ecuación que relaciona ambas variables del grupo de datos analizados (modelo con parámetros físicos).



Prob.1. Dada la tabla siguiente:

Y[m]	1	6,5	11	15,5	21,5	25,6	30,0	40,5
X[m]	1	3	4	6	8	9	11	14

- (a) Construya el gráfico correspondiente $X=X(Y)$.
- (b) Determine la ecuación de la recta de ajuste libre.
- (c) Determine la ecuación de la recta de cuadrados mínimos. Grafíquela.
- (d) Comente las ventajas o desventajas de cada método.

(Recta)

Prob.2. En un cierto experimento de mecánica, se obtuvieron los siguientes datos, para el tiempo "t" y la rapidez "v" de un móvil:

t [s]	0	1	2	3	4	5	6
V [cm/s]	2,0	4,7	7,8	10,0	12,4	14,6	17,7

- (a) Construya un gráfico $V=V(t)$ en papel milimetrado aplicando las indicaciones generales al respecto.
- (b) Trace una recta de ajuste libre, determine su pendiente y el intercepto con el eje vertical. Escriba la ecuación de la recta.
- (c) Determine el coeficiente de correlación "r", la pendiente "m" y el intercepto con el eje vertical "b" según el criterio de los cuadrados mínimos. Trace la recta de cuadrados mínimos aplicando las indicaciones dadas anteriormente para éste efecto.

Basándose en los ejemplos dados, desarrolle en su cuaderno cada uno de los casos propuestos. luego, si es posible, utilizando planilla electrónica, las .

Prob.3. Grafique $V=V(t)$.

Tabla 3.									
V [m/s]	-113	-92	-76	-56	-41	-25	-19	-15	-10
t [min]	0.1	0.3	0.5	0.8	1.1	1.6	1.9	2.1	2.5

(Exponencial; $V=-125e^{-t}$)



Prob.4. Grafique $t=t(T)$.

Tabla 4.									
t [s]	0.456	0.5500	0.600	0.6500	0.700	0.7800	0.8409	0.900	0.9500
T [°K]	0.09	0.18	0.26	0.36	0.48	0.74	1.00	1.31	1.63

(de Potencia)

Prob.5. Grafique $T=T(L)$.

Tabla 5.									
T [s]	0.01	0.05	0.1	0.5	1	3	6	9	14
L [m]	0.50	1.12	1.58	3.54	5.00	8.66	12.25	15.00	18.71

(de Potencia; $L=5t^{0.5}$)

Prob.6. Grafique $R=R(T)$.

Tabla 6.									
R [m/s]	2,72	2,46	1,65	1,11	0,61	0,27	0,15	0,06	0,02
T [s] *	0,5	1	3	5	8	12	15	20	25

(Exponencial ; $R=3e^{-0,2t}$)

4.7.iv.- PROBLEMAS DE ANÁLISIS GRÁFICO CON PLANTEO.

Prob. 1. El número "N" de bacterias por unidad de volumen, presentes en un cultivo después de "t" horas, está dado por la siguiente tabla:

T [h]	0	1	2	3	4	5	6
N[bact]	32	47	65	92	132	190	275

(a) Confeccione un gráfico de N v/s t.

(b) Rectifique la función, siguiendo las indicaciones dadas en el apunte.

(c) ¿Cuál es la ecuación que rige este fenómeno ?.

(d) ¿Cuál es el número de bacterias por unidad de volumen que se espera después de 8[hr]; 9,5[hr] y 12 [hr] ?.



Prob.2. La siguiente tabla entrega valores, para el tiempo (expresado en segundos) que el agua de una vasija tarda en vaciarse totalmente, a través de un orificio practicado en su fondo.

Las otras dos variables que intervienen son respectivamente la altura h [cm] del agua en la vasija y el diámetro d [cm] del orificio del fondo.

Diámetro: d_n [cm]	Altura h [cm]			
	30	10	4	1
1,5	$t=73,0$	43,5	26,7	13,5
2	41,2	23,7	15,0	7,2
3	18,4	10,5	6,8	3,7
5	6,8	3,9	2,2	1,5

Con los datos anteriores, encuentre la relación analítica que expresa " t " en función de " h " y " d ". Para ello proceda de la manera siguiente:

(a) Grafique y una los puntos, para representar el tiempo en función del diámetro, para una altura constante de 30 [cm]. Aunque esta curva puede utilizarse, para interpolaciones entre las medidas e incluso de un modo aproximado, para extrapolaciones, no conocemos la forma de la expresión algebraica que relaciona " t " con " d ".

Del gráfico se deduce que " t " decrece bastante rápidamente con " d ", lo cual sugiere una relación inversa. Más aún, se puede apreciar que el tiempo de flujo debe estar relacionado de un modo simple con el área de la abertura, ya que cuanto mayor sea ésta, mayor es la cantidad de agua que fluye por ella en el mismo tiempo. Al comparar con la tabla de curvas conocidas, esto sugiere una gráfica de " t " en función de " $1/d^2$ ".

(b) Por ello agregue una columna, para los valores de " $1/d^2$ " y, de nuevo, eligiendo una escala apropiada, represente " t " en función de " $1/d^2$ " y una los puntos con una curva continua. ¿Qué resulta?. ¿Se puede deducir una relación entre " t " y " d ", para el nivel de agua utilizado?. ¿Eran correctas las suposiciones?

(c) Con el objeto de comprobar si este tipo de relación entre " t " y " d " es válido, para alturas diferentes, represente en la misma hoja las gráficas de " t " en función de " $1/d^2$ ", para diferentes alturas o niveles de agua. ¿Cuál es la conclusión?

(d) Observe que el gráfico correspondiente a $h = 1$ [cm] se extiende hacia arriba muy ligeramente. Haga un gráfico especial de estos datos con una escala mayor, para el tiempo.

¿Qué se observa ahora?

Con los datos obtenidos ¿qué conclusión se obtiene acerca de la relación algebraica entre " t " y " d ", para $h = 1$ [cm]?



- (e) Investigue ahora la dependencia de " t " con " h " cuando el diámetro de la abertura permanece fijo. Tome el caso $d = 1,5$ [cm] correspondiente a la primera serie. Haga un gráfico con " h " sobre el eje horizontal y una los puntos extrapolando los resultados hasta el origen. ¿Pasa la curva por él? ¿Esperaba este resultado?
- (f) Aplicando el método ya conocido procure obtener la expresión general del flujo en función de " h " y " d ".