

MÉTODO DE INTEGRACIÓN POR FRACCIONES PARCIALES:

Este método nos permite resolver integrales de funciones racionales donde el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

La idea es descomponer dicha fracción en una suma de otras fracciones fáciles de integrar.

CASO 1: FACTORES LINEALES DISTINTOS

El denominador se puede factorizar mediante factores lineales distintos:

$$\frac{f(x)}{(x+a)(x+b)(x+c)} = \frac{A}{x+a} + \frac{B}{x+b} + \frac{C}{x+c}; \quad A, B, C \text{ ctes.}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{7x+3}{x^2+3x-4} dx = \int \frac{7x+3}{(x+4)(x-1)} dx$$

$$\frac{7x+3}{(x+4)(x-1)} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-1} \quad / (x+4)(x-1)$$

$$7x+3 = A(x-1) + B(x+4)$$

$$\text{si } x = 1$$

$$10 = 5B$$

$$B = 2$$

$$\text{Si } x = -4$$

$$-25 = -5A$$

$$A = 5$$

(En clases explicar la otra forma de encontrar A y B)

Luego:

$$\begin{aligned} \int \frac{7x+3}{(x+4)(x-1)} dx &= \int \frac{5}{x+4} dx - \int \frac{2}{x-1} dx \\ &= 5 \ln|x+4| - 2 \ln|x-1| + C \end{aligned}$$

CASO 2: FACTORES LINEALES REPETIDOS

El denominador está compuesto por factores lineales repetidos:

$$\frac{f(x)}{(x+a)^n} = \frac{A}{(x+a)} + \frac{B}{(x+a)^2} + \frac{C}{(x+a)^3} + \dots + \frac{N}{(x+a)^n}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \quad / (x-1)^3 \\ \frac{x^2+1}{(x-1)^3} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} \\ x^2+1 &= A(x-1)^2 + B(x-1) + C \\ x^2+1 &= A(x^2-2x+1) + Bx-B+C \\ x^2+1 &= Ax^2-2Ax+A+Bx-B+C \\ x^2+1 &= Ax^2+(-2A+B)x+A-B+C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1=A \\ 0=-2A+B \\ 1=A-B+C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2+1}{(x-1)^3} dx &= \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{2}{(x-1)^2} dx + \int \frac{2}{(x-1)^3} dx \\ &= \ln|x-1| + \underbrace{\int \frac{2}{(x-1)^2} dx}_{u=x-1, du=dx} \end{aligned}$$

$$2 \int \frac{du}{u^2} + 2 \int \frac{du}{u^3}$$

$$2 \int u^{-2} du + 2 \int u^{-3} du$$

$$-2u^{-1} - \frac{2}{2}u^{-2} + C$$

$$= \ln|x-1| - 2(x-1)^{-1} - (x-1)^{-2} + C$$

CASO 3: FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES DIFERENTES

El denominador está compuesto por factores cuadráticos irreducibles (no se pueden factorizar) diferentes:

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)(a_2x^2+b_2x+c_2)} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+x} dx = \int \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} dx$$

$$\frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Ejemplo:

$$\int \frac{3x^2+2}{x^3+x} dx = \int \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} dx$$

$$\rightarrow \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Caso 1

Caso 3

$$\int \frac{3x^2+2}{x(x^2+1)} dx$$

$$3x^2+2 = A(x^2+1) + x(Bx+C)$$

$$3x^2+2 = Ax^2 + A + Bx^2 + Cx$$

$$\underline{3x^2+2} = \underline{x^2(A+B)} + \underline{x \cdot C} + A$$

$$A+B=3$$

$$0=C$$

$$A=2$$

$$B=1$$

$$= \int \frac{2}{x} dx + \int \frac{x}{x^2+1} dx$$

$$= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \int \frac{du}{u}$$

$$= 2 \ln|x| + \frac{1}{2} \ln|x^2+1| + C //$$

$$u = x^2+1$$

$$du = 2x dx$$

$$\frac{du}{2} = x dx$$

CASO 4: FACTORES CUADRÁTICOS IRREDUCIBLES REPETIDOS

El denominador está compuesto por factores cuadráticos irreducibles repetidos.

$$\frac{f(x)}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)} + \frac{Cx+D}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^2} + \frac{Ex+F}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^3} + \dots + \frac{Mx+N}{(a_2x^2+b_2x+c_2)^n}$$

Ejemplo Caso 4:

jueves, 23 de abril de 2020 12:04

$$\int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} =$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{(x^2+1)} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} \quad | \cdot (x^2+1)^2$$

$$\begin{aligned} x^2+x+1 &= (Ax+B)(x^2+1) + Cx+D \\ x^2+x+1 &= Ax^3 + Ax + Bx^2 + B + Cx + D \\ x^2+x+1 &= Ax^3 + Bx^2 + x(A+C) + B+D \end{aligned}$$

$$\boxed{A=0} ; \boxed{B=1} ; A+C=1 ; B+D=1$$

$$\boxed{C=1} ; \boxed{D=0}$$

$$\frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$\therefore \int \frac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2} dx$$

$$\rightarrow \begin{cases} u = x^2+1 \\ du = 2x dx \\ \frac{du}{2} = x dx \end{cases}$$

$$= \arctan(x) + \int \frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{2}$$

$$= \arctan(x) + \frac{1}{2} \int u^{-2} du$$

$$= \arctan(x) + \frac{1}{2} \frac{u^{-1}}{-1}$$

$$= \arctan(x) - \frac{1}{2} (x^2+1)^{-1} + C //$$