

TRANSFORMACIÓN DE LAPLACE - PARTE 2

Octubre de 2023

Resumen de Fórmulas:

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{L}\{\sin(kt)\} = \frac{k}{s^2 + k^2}$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{L}\{\cos(kt)\} = \frac{s}{s^2 + k^2}$$

Transformación Inversa de Laplace

- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \right\} = 1$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{n!}{s^{n+1}} \right\} = t^n$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{s-a} \right\} = e^{at}$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{k}{s^2 + k^2} \right\} = \sin(kt)$
- $\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s}{s^2 + k^2} \right\} = \cos(kt)$

Nota: Esta transformación también tiene propiedad de linealidad

Ejercicios:

Calcular:

$$\textcircled{1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} \right\}$$

Ejercicios:

Calcular:

$$\textcircled{1} \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s^2 + 6s + 9}{(s-1)(s-2)(s+4)} \right\}$$

Solución:

$$\textcircled{1} -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$$

Ejercicios Misceláneos:

$$\textcircled{1} \quad \mathcal{L}\{t^5 - e^{8t} + e^{-8t}\}$$

$$\textcircled{2} \quad \mathcal{L}\{(e^t - e^{-t})^2\}$$

$$\textcircled{3} \quad \mathcal{L}\{\cos(5t) + \sin(2t)\}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$$

$$\textcircled{5} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2 + 49}\right\}$$

$$\textcircled{6} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$$

$$\textcircled{7} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$$

$$\textcircled{8} \quad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$$

Ejercicios Misceláneos:

$$\textcircled{1} \mathcal{L}\{t^5 - e^{8t} + e^{-8t}\}$$

$$\textcircled{2} \mathcal{L}\{(e^t - e^{-t})^2\}$$

$$\textcircled{3} \mathcal{L}\{\cos(5t) + \sin(2t)\}$$

$$\textcircled{4} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{48}{s^5}\right\}$$

$$\textcircled{5} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{5}{s^2 + 49}\right\}$$

$$\textcircled{6} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+1}{s^2+2}\right\}$$

$$\textcircled{7} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+3s}\right\}$$

$$\textcircled{8} \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s+2)(s^2+4)}\right\}$$

Soluciones:

$$\textcircled{1} \frac{120}{s^6} - \frac{1}{s-8} + \frac{1}{s+8}$$

$$\textcircled{2} \frac{1}{s-2} - \frac{2}{s} + \frac{1}{s+2}$$

$$\textcircled{3} \frac{s}{s^2+25} + \frac{2}{s^2+4}$$

$$\textcircled{4} t - 2t^4$$

$$\textcircled{5} \frac{5}{7} \sin(7t)$$

$$\textcircled{6} \frac{\sin(\sqrt{2}t)}{\sqrt{2}} + \cos(\sqrt{2}t)$$

$$\textcircled{7} \frac{1}{3} - \frac{e^{-3t}}{3}$$

$$\textcircled{8} \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\cos(2t)}{4} - \frac{e^{-2t}}{4}$$

Transformada de la Derivada

Si $f, f', \dots, f^{(n)}$ son continuas en $\mathbb{R}_0^+$ y son de orden exponencial y si $f^{(n)}(t)$ es una función continua en $\mathbb{R}_0^+$, entonces, llamando

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$$

se cumple:

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\}$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'\}$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'\} = s^1 Y(s) - s^0 y(0) = sY(s) - y(0)$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'\} = s^1 Y(s) - s^0 y(0) = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\}$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'\} = s^1 Y(s) - s^0 y(0) = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s^1 y(0) - s^0 y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'\} = s^1 Y(s) - s^0 y(0) = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s^1 y(0) - s^0 y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$
- $\mathcal{L}\{y'''\}$

Ejemplos:

Llamando $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$

- $\mathcal{L}\{y\} = s^0 Y(s) = Y(s)$
- $\mathcal{L}\{y'\} = s^1 Y(s) - s^0 y(0) = sY(s) - y(0)$
- $\mathcal{L}\{y''\} = s^2 Y(s) - s^1 y(0) - s^0 y'(0) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0)$
- $\mathcal{L}\{y'''\} = s^3 Y(s) - s^2 y(0) - sy'(0) - y''(0)$

Resolver PVI con transformada de Laplace

Se pueden resolver problemas con valor inicial (PVI) si se siguen los siguientes pasos:

- ➊ Aplicar transformación de Laplace a la ecuación.
- ➋ Usar regla de la transformada de la derivada y despejar Y
- ➌ Aplicar transformada inversa de Laplace.

Nota: Como las EDO que estudiaremos son problemas de valor inicial, la solución no tiene “+c” debido a que las condiciones del problema nos permiten encontrar el valor de la constante

Ejercicio 1

Resolver PVI

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \sin(2t) \quad y(0) = 6$$

Ejercicio 1

Resolver PVI

$$\frac{dy}{dt} + 3y = 13 \sin(2t) \quad y(0) = 6$$

Solución: $y = 8e^{-3t} - 2 \cos(2t) + 3 \sin(2t)$

Ejercicio 2:

Resolver PVI

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t} \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$$

Ejercicio 2:

Resolver PVI

$$y'' - 3y' + 2y = e^{-4t} \quad y(0) = 1, y'(0) = 5$$

Solución: $y = -\frac{16}{5}e^t + \frac{25}{6}e^{2t} + \frac{1}{30}e^{-4t}$

Ejercicios

① $\frac{dy}{dt} - y = 1, y(0) = 0$

② $2\frac{dy}{dt} + y = 0, y(0) = -3$

③ $y' + 6y = e^{4t}, y(0) = 2$

④ $y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

⑤ $y'' - 4y = 6e^{3t} - 3e^{-t}, y(0) = 1, y'(0) = 0$

⑥ $y'' + y = \sqrt{2} \cdot \sin(\text{sqrt}(2)t), y(0) = 10, y'(0) = 0$

① $y = -1 + e^t$

② $y = e^{-t/2}$

③ $y = \frac{1}{10}e^{4t} + \frac{19}{10}e^{-6t}$

④ $y = \frac{4}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t}$

⑤ $y = \frac{1}{20}e^{-2t}(20e^t - 25e^{4t} + 24e^{5t} + 1)$

⑥ $y = 10 \cos(t) + 2 \sin(t) - \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}t)$