

TEOREMA DE L'HOPITAL

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

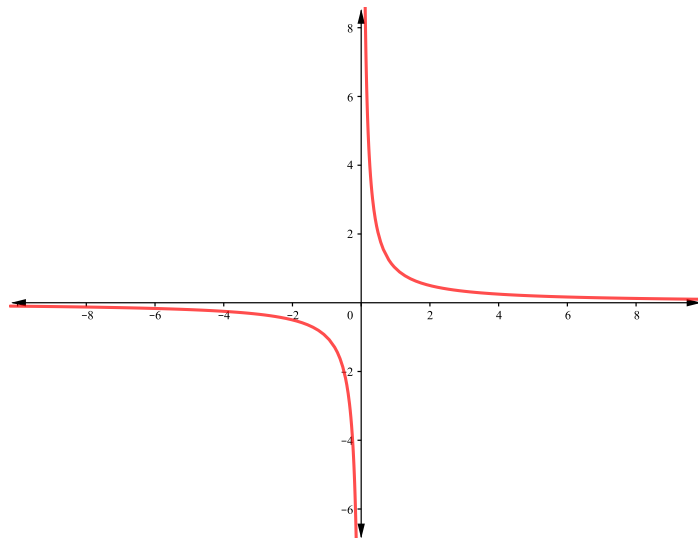
11 DE SEPTIEMBRE DE 2023

Límites infinitos

Ejemplos de funciones que tienden a infinito en un punto:

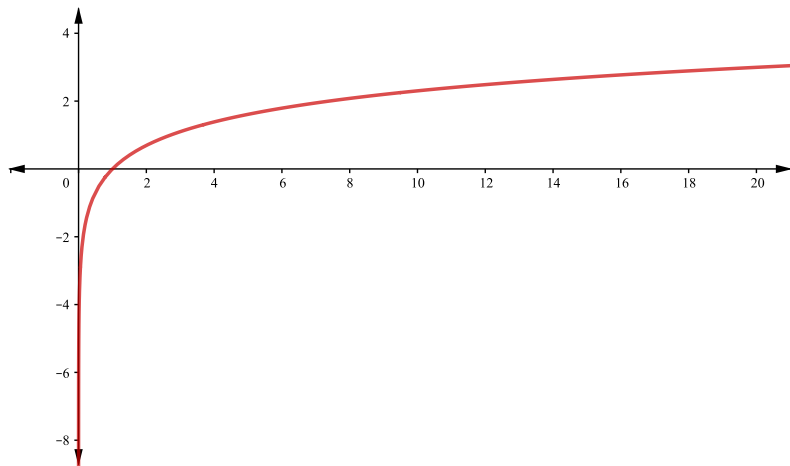
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$



Ejemplos de funciones que tienden a infinito en un punto:

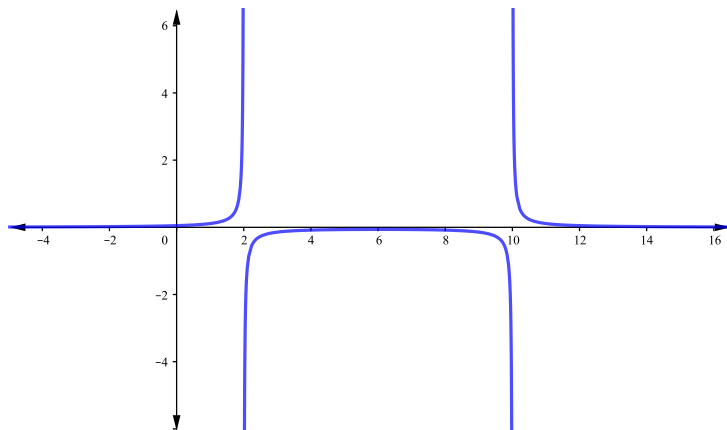
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$



Ejemplos de funciones que tienden a infinito en un punto:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)(x-10)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 10^+} f(x) = \infty$$

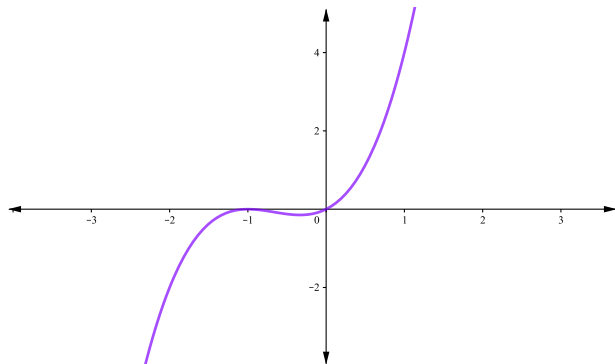


Ejemplos de límites al infinito

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

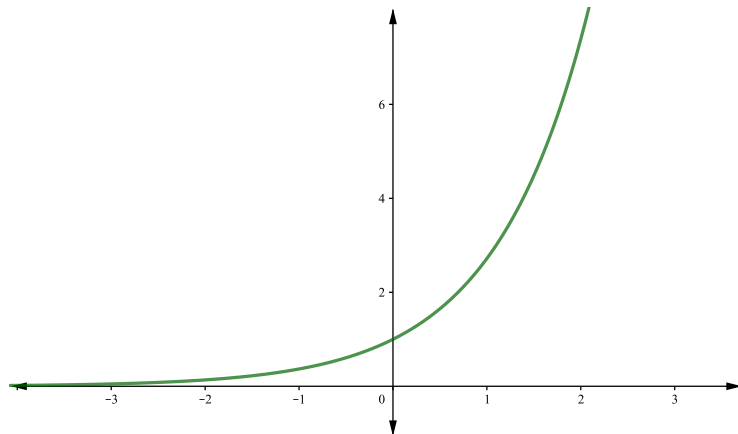


Ejemplos de límites al infinito

$$f(x) = e^x$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



Notación

Sean f, g funciones. Se dice (informalmente) que la división $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación “del tipo $\frac{0}{0}$ ” en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Notación

Sean f, g funciones. Se dice (informalmente) que la división $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación “del tipo $\frac{0}{0}$ ” en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Se dice (informalmente) que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación “del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ” en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

Notación

Sean f, g funciones. Se dice (informalmente) que la división $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación “del tipo $\frac{0}{0}$ ” en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

Se dice (informalmente) que $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación “del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ ” en $x = a$ si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$$

Nota

También se puede hablar de estas indeterminaciones si en lugar de un punto $a \in \mathbb{R}$ se considera $x \rightarrow \infty$.

Teorema de L'Hôpital

Sean f y g funciones derivables. Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación en a de la forma " $\frac{0}{0}$ " o " $\frac{\infty}{\infty}$ ", entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista.

Teorema de L'Hôpital

Sean f y g funciones derivables. Si $\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene una indeterminación en a de la forma " $\frac{0}{0}$ " o " $\frac{\infty}{\infty}$ ", entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

siempre que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ exista.

Tarea: Leer ejemplos de las páginas 320 y 321 de matemáticas para ingeniería.

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Solución: Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Por lo tanto:

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Solución: Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{x'}$$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Solución: Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$

Solución: Sabemos que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin(x))'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) =$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) = 1 - 1 = 0$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Por teorema de L'Hopital:

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Por teorema de L'Hopital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 3^x)'}{x'}$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Por teorema de L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 3^x)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln(2) - 3^x \ln(3)}{1} \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Por teorema de L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 3^x)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln(2) - 3^x \ln(3)}{1} \\ &= \ln(2) - \ln(3) \end{aligned}$$

Ejemplo 2

Calcular

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$$

Solución:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (2^x - 3^x) = 1 - 1 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

Por teorema de L'Hopital:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 3^x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^x - 3^x)'}{x'} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x \ln(2) - 3^x \ln(3)}{1} \\ &= \ln(2) - \ln(3) \\ &= \ln\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{3 \tan(x) - 5}{\sec(x)}$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{3 \tan(x) - 5}{\sec(x)}$

Solución: Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = \infty$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{3 \tan(x) - 5}{\sec(x)}$

Solución: Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = \infty$$

Al variar estas funciones por constantes, el comportamiento hacia el infinito es el mismo. Así:

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{3 \tan(x) - 5}{\sec(x)}$

Solución: Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = \infty$$

Al variar estas funciones por constantes, el comportamiento hacia el infinito es el mismo. Así:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2 \tan(x) - 5) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = \infty$$

Ejemplo 3

Calcular $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{3 \tan(x) - 5}{\sec(x)}$

Solución: Sabemos que

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = \infty$$

Al variar estas funciones por constantes, el comportamiento hacia el infinito es el mismo. Así:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2 \tan(x) - 5) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \sec(x) = \infty$$

Podemos emplear teorema de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec^2(x)}{\sec(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec^2(x)}{\sec(x) \tan(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec^2(x)}{\sec(x) \tan(x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec(x)}{\tan(x)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec^2(x)}{\sec(x) \tan(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec(x)}{\tan(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{2}{\cos(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec^2(x)}{\sec(x) \tan(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec(x)}{\tan(x)} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{2}{\cos(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\sin(x)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \tan(x) - 5}{\sec(x)} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{(2 \tan(x) - 5)'}{(\sec(x))'} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec^2(x)}{\sec(x) \tan(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2 \sec(x)}{\tan(x)} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{\frac{2}{\cos(x)}}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} \\&= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\sin(x)} \\&= 2\end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

$$f(x) = \sqrt[x]{x}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[x]{x} \\ (f(x))^x &= x \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[x]{x} \\ (f(x))^x &= x \\ \ln(f(x)^x) &= \ln(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[x]{x} \\ (f(x))^x &= x \\ \ln(f(x)^x) &= \ln(x) \\ x \cdot \ln(f(x)) &= \ln(x) \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[x]{x} \\ (f(x))^x &= x \\ \ln(f(x)^x) &= \ln(x) \\ x \cdot \ln(f(x)) &= \ln(x) \\ \ln(f(x)) &= \frac{\ln(x)}{x} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x}$

Solución: Escribimos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt[x]{x} \\ (f(x))^x &= x \\ \ln(f(x)^x) &= \ln(x) \\ x \cdot \ln(f(x)) &= \ln(x) \\ \ln(f(x)) &= \frac{\ln(x)}{x} \\ f(x) &= \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \end{aligned}$$

Luego:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right)$$

Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}\right)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'}\right)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\right)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\right) \\ &= \exp(0)\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x)}{x}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(x))'}{x'}\right) \\ &= \exp\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1}\right) \\ &= \exp(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución: Escribimos

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución: Escribimos

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \\ \ln(f(x)) &= x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución: Escribimos

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

Ejemplo 5

Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

Solución: Escribimos

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$\ln(f(x)) = x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$f(x) = \exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)$$

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) =$$

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \ln(1) =$$

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

Por lo tanto

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

Por lo tanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right)$$

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

Observar que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$. Luego

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \ln \left(1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \right) = \ln(1) = 0$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right))'}{\left(\frac{1}{x} \right)'} \right) \end{aligned}$$

$$= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + \frac{1}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} \right)$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + \frac{1}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + \frac{1}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \cdot -\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + \frac{1}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \cdot -\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + \frac{1}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \cdot -\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \\ &= \exp(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln(1 + \frac{1}{x}))'}{(\frac{1}{x})'} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \cdot -\frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \right) \\ &= \exp(1) \\ &= e \end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular los siguientes límites

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{3(x-1)}{x-2} - \frac{3}{\log(x-1)} \right)$$

$$\textcircled{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan(x)}$$

$$\textcircled{3} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^x}$$

$$\textcircled{4} \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln(x)$$

$$\textcircled{5} \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x-1}}$$

Soluciones

① $\frac{3}{2}$

② 1

③ 0

④ 0

⑤ 1