

CLASE

13-05-2022

Ecuación de la Onda.

Objetivos.

- ✓ Determinar la ecuación del movimiento de una onda.
- ✓ Establecer la ecuación de velocidad de propagación de una onda.
- ✓ Representar gráficamente un movimiento ondulatorio.

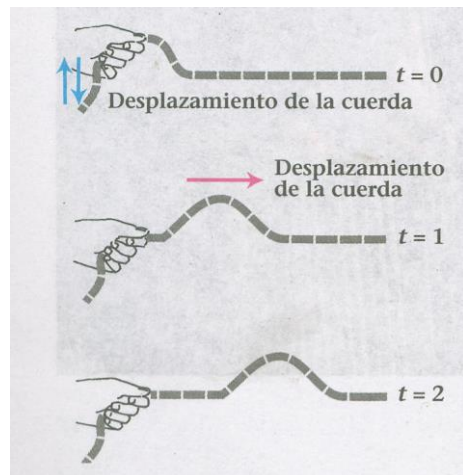
Conceptos Clave.

- ✓ Ecuación de onda.
- ✓ Velocidad de propagación transversal.
- ✓ Velocidad de propagación longitudinal.
- ✓ Potencia promedio.
- ✓ Intensidad.

Introducción.

La forma más sencilla para iniciar el estudio de las ondas es considerar la propagación de un **pulso** a lo largo de una cuerda. Si un extremo de una cuerda estirada tensamente se perturba en forma brusca y vuelta a su posición inicial, la acción genera un pulso de onda que viaja a lo largo de la cuerda hasta el otro extremo.

Como puede ver en la figura, la vibración de la cuerda debido a este pulso de onda es **perpendicular** respecto a la dirección en la cual viaja el pulso. Por esta razón a este tipo de movimiento se le llama **pulso de onda transversal**.



Si observamos muy estrechamente cualquier punto particular de la cuerda, vemos que el movimiento de ese punto a lo largo de la dirección de la cuerda **es muy ligero** en comparación con el movimiento perpendicular a la cuerda.

Cada sección de la cuerda hace una sola oscilación hacia arriba y hacia abajo. Pero las oscilaciones no son independientes, porque cada sección de la cuerda está conectada a las secciones adyacentes. Así, la propagación de un pulso de onda transversal a lo largo de la cuerda es un movimiento colectivo de la cuerda entera, no simplemente el comportamiento aislado de alguna sección.

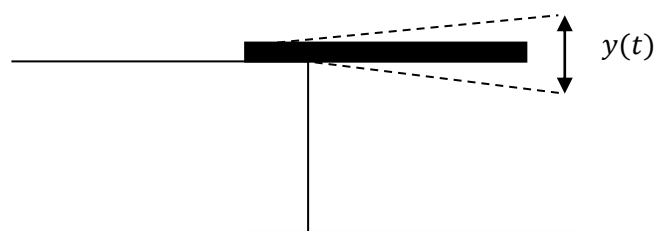
Además de distinguir entre el movimiento de un pulso, o de una onda, y el movimiento del medio (en este caso la cuerda), debemos distinguir la clase de movimientos que participan. Por ejemplo, la **velocidad de una onda** en una cuerda puede ser constante, mientras que la **velocidad transversal** de un punto de la cuerda puede ser senoidal en el tiempo. En este caso, las partículas de la cuerda oscilan hacia atrás y hacia delante respecto a una posición de equilibrio, mientras que la onda se propaga a lo largo de la cuerda a su propia velocidad. **Las ondas electromagnéticas, como las de luz y de radio, son diferentes pues no requieren de un medio para su propagación.**

El pulso que hemos descrito se llama **onda viajera**. El pulso ocurre en un lugar en un momento y en otro lugar en un tiempo posterior. **La distancia que el pulso viaja es proporcional al tiempo transcurrido.** Aquí tenemos una descripción muy general de una onda: **onda es una perturbación que transfiere energía de un punto a otro sin impartir movimiento neto, a través del cual se propaga.** Esta onda es muy general y como se puede apreciar, no requiere que la onda sea repetitiva.

"Energía es la capacidad de realizar un trabajo"

Actividad 1: "Ondas armónicas".

"Supongamos que el extremo de un medio material es obligado a vibrar periódicamente, variando el desplazamiento "y" (transversal o longitudinal) con el tiempo".



Establecer de acuerdo con la ecuación del **movimiento armónico simple** la ecuación que rige el movimiento indicado anteriormente.

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$y(t) = A \sin\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) t\right)$$

$$y(t) = y_{\text{máx}} \sin\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) t\right)$$

La ecuación obtenida se interpreta, como: “durante medio período, a través del medio el desplazamiento es en un cierto sentido, y durante otro medio período se propaga con un desplazamiento en el otro sentido”.

Actividad 2: “Gráfica de ondas armónicas”.

Construya una gráfica de ondas armónicas, de acuerdo a la siguiente tabla:

$y(0, t)$	0	0,707A	A	0,707A	0	-0,707A	-A	-0,707A	0
t	0	$\frac{T}{8}$	$\frac{T}{4}$	$\frac{3T}{8}$	$\frac{T}{2}$	$\frac{5T}{8}$	$\frac{3T}{4}$	$\frac{7T}{8}$	T

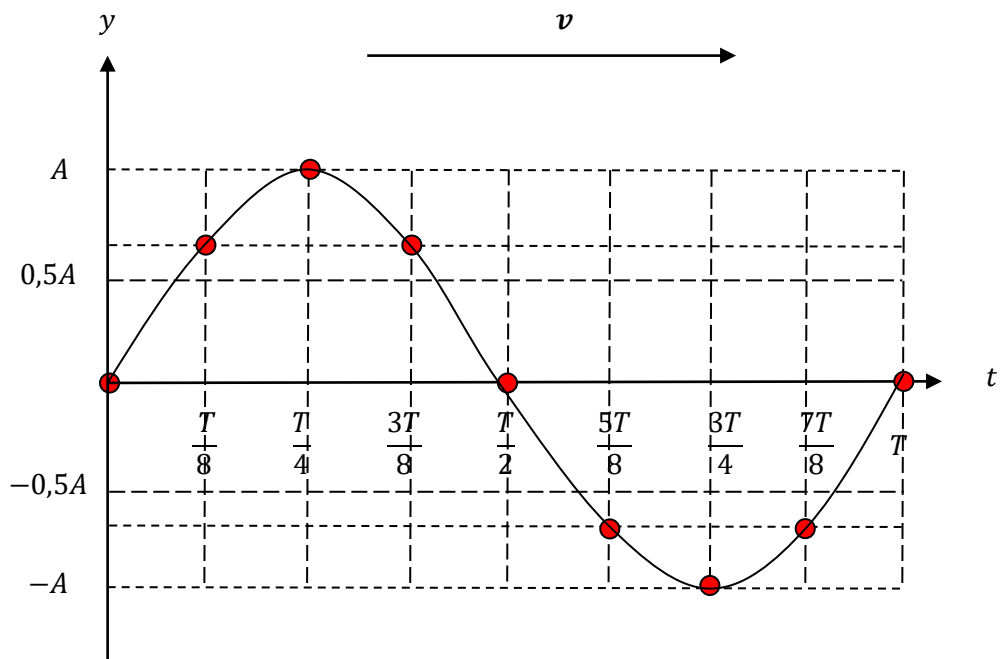
$$y(t) = A \operatorname{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot t\right)$$

$$y(0) = A \operatorname{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot 0\right) = A \operatorname{sen}(0) = 0$$

$$y\left(\frac{T}{8}\right) = A \operatorname{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot \frac{T}{8}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0,707A$$

$$y\left(\frac{T}{4}\right) = A \operatorname{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot \frac{T}{4}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = A$$

$$y\left(\frac{3T}{8}\right) = A \operatorname{sen}\left(\left(\frac{2\pi}{T}\right) \cdot \frac{3T}{8}\right) = A \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 0,707A$$



Actividad 3: “Ecuación de velocidad”.

Deduzca la ecuación de la **velocidad constante** con la que la onda se propaga, también llamada velocidad de fase, cuando avanza una **distancia igual a una longitud de onda** en un **intervalo de tiempo de un período**.

$$\text{Para un MRU: } d = v \cdot t$$

$$d = \lambda$$

$$t = T$$

$$\lambda = vT$$

$$v = \frac{\lambda}{T}$$

$$\text{Se sabe que: } T = \frac{1}{f}$$

$$v = \frac{\lambda}{\frac{1}{f}}$$

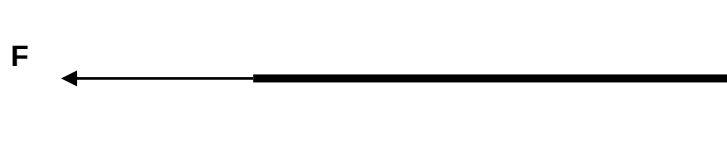
$$v = \lambda f$$

Actividad 4: “Velocidad de propagación **transversal** en una cuerda”.

Consideremos la cuerda representada en la figura, sometida a una tensión **F** y con una densidad lineal (masa por unidad de longitud) “ μ ”.

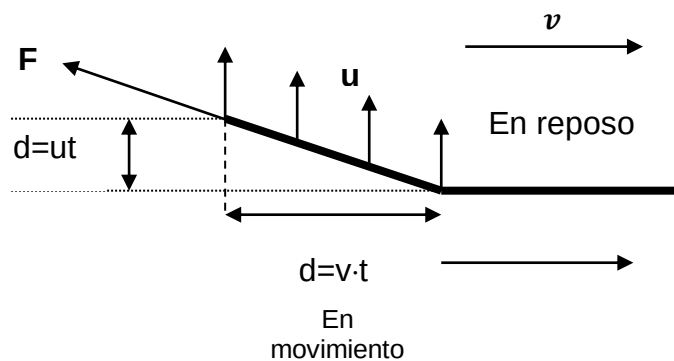
μ : densidad lineal de masa.

$$\mu = \frac{m}{L} \left[\frac{kg}{m} \right]$$



Inicialmente la cuerda se encuentra en reposo. En $t = 0$, se comunica al extremo izquierdo de la cuerda una **velocidad transversal** “**u**”.

La figura siguiente muestra la forma de la cuerda después de transcurrido un tiempo “ t ”.



El límite que separa las partes móvil y fija avanza hacia la derecha con velocidad de propagación “**v**”.

La **velocidad de propagación de las ondas mecánicas transversales**, producidas por ejemplo, en una cuerda de guitarra tensada en su armazón con una fuerza **F**, cuya masa por unidad de longitud es “ μ ”, es:

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

Actividad 5: “Ejemplo”

Un alambre de acero de 6 [m] de longitud tiene una masa de 60 [gr] y está sometido a una tensión de 100 [N]. ¿Cuál es la velocidad de propagación de una onda transversal en el alambre?

$$L = 6 \text{ m}$$

$$m = 60 \text{ g} = 60 \cdot 10^{-3} \text{ kg}$$

$$F = 100 \text{ N}$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$$\mu = \frac{m}{L}$$

$$\mu = \frac{(60 \cdot 10^{-3})}{6} = 0,01 \left(\frac{\text{kg}}{\text{m}}\right)$$

$$v = \sqrt{\frac{100}{0,01}}$$

$$v = 100 \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right)$$

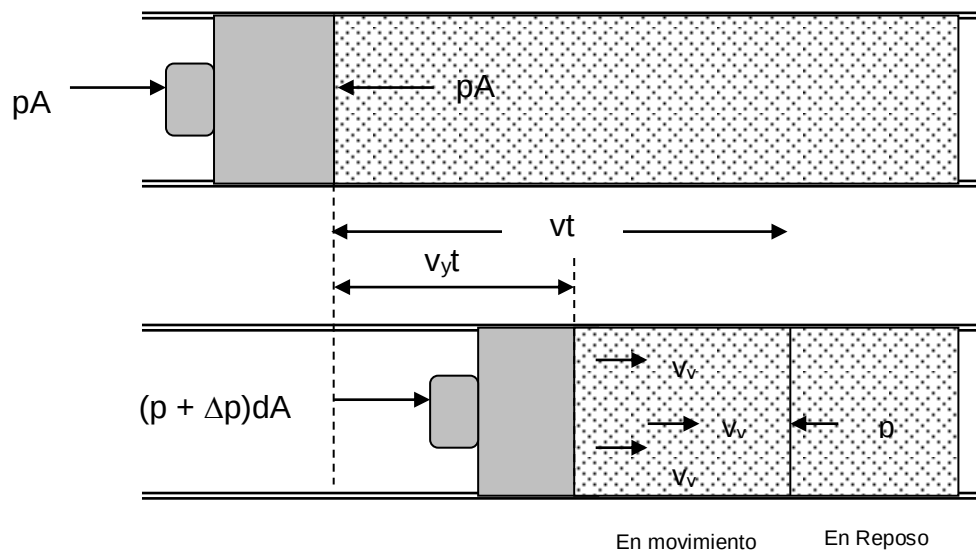
Actividad 6: “Velocidad de propagación longitudinal en un fluido”.

La figura representa un fluido (líquido o gas) de densidad “ ρ ” contenido en un tubo de sección transversal “ A ” y a la presión “ p ”.

p : presión.

$$p = \frac{F}{A}$$

$$F = pA$$



Para determinar el aumento de presión en el fluido en movimiento, consideramos el **módulo de compresibilidad**:

$$B = - \left(\frac{\Delta p}{\frac{\Delta V}{V}} \right)$$

El módulo de compresibilidad permite determinar cuánto aumentó la presión debido a un cambio del volumen (es negativo porque una disminución de volumen = un aumento de la presión. Dicho de otro modo, si $\Delta V < 0$, $\Delta p > 0$).

El volumen original del fluido en movimiento, $V = v \cdot t \cdot A$, ha disminuido una cantidad:

$$\Delta V = -v_y t A$$

$$B = -\Delta p / (-Av_y t / Avt)$$

$$\Delta p = B(v_y/v)$$

La presión en el fluido en movimiento ha aumentado a $(p + \Delta p)$. La fuerza ejercida sobre esta parte del fluido es: $(p + \Delta p)A$.

La fuerza neta es por tanto: $A\Delta p = B(v_y/v)A$.

Según el teorema de impulso = cantidad de movimiento: $B(v_y/v)At = \rho v t A v_y$

De aquí, se obtiene la velocidad de propagación longitudinal en un fluido:

$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

$$\rho = \frac{m}{V}$$

La velocidad aumenta con el módulo de compresibilidad (la fuerza de regreso al equilibrio) y disminuye con la densidad (la inercia).

Actividad 7: “Velocidad de propagación longitudinal para una barra”.

Esto se aplica también para sólidos y líquidos. Para una onda en una barra sólida, por ejemplo, hay una expansión lateral. Esto cambia un poco la rapidez de la onda:

$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

Donde “Y” es el módulo de Young. En todas estas ecuaciones, el numerador es una propiedad elástica del medio y el denominador es una propiedad proporcional a la inercia del medio.

Actividad 8: “Ejemplos”

Ejemplo 1.

Calcular la velocidad del sonido en una varilla de plomo, cuyo Módulo de Young es 1.6×10^{10} Pa y su densidad 11.3×10^3 kg/m³. Comparar con la velocidad del sonido en el aire.

$$v_{\text{sonido aire}} = 340 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$v_{\text{varilla}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,6 \cdot 10^{10}}{11,3 \cdot 10^3}} = 1189,9 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$\frac{v_{\text{varilla}}}{v_{\text{sonido aire}}} = \frac{1189,9}{340} = 3,5$$

$$v_{\text{varilla}} = 3,5 v_{\text{sonido aire}}$$

Ejemplo 2.

Se golpea un extremo de una varilla de cobre de 180.00 m. Una persona en el otro extremo escucha dos sonidos causados por dos ondas longitudinales, una que viaja por la varilla y otra que viaja por el aire. Calcule el intervalo de tiempo entre los sonidos.

Para el cobre $Y = 1.1 \times 10^{11}$ Pa y $\rho = 8900$ kg/m³. La rapidez del sonido en el aire es de 344 m/s.

Para la varilla de cobre:

$$v_{\text{varilla}} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}} = \sqrt{\frac{1,1 \cdot 10^{11}}{8900}} = 3515,6 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$d = v \cdot t$$

$$180 = 3515,6 \cdot t_{\text{cobre}}$$

$$t_{\text{cobre}} = 0,05 \text{ (s)}$$

En el aire:

$$d = v \cdot t$$

$$180 = 344 \cdot t_{aire}$$

$$t_{aire} = 0,5 \text{ (s)}$$

$$\Delta t = 0,5 - 0,05 = 0,45 \text{ (s)}$$

Ejercicio 3.

Una barra metálica de 60.0 m tiene una densidad de 5000 kg/m³. Las ondas longitudinales tardan 1×10^{-2} s en llegar de un extremo al otro. Calcule el **módulo de Young** del metal.

$$v_{varilla} = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

$$L = 60 \text{ (m)}$$

$$\rho = 5000 \left(\frac{kg}{m^3} \right)$$

$$t = 1 \cdot 10^{-2} \text{ (s)}$$

$$d = v \cdot t$$

$$60 = v \cdot (1 \cdot 10^{-2})$$

$$v = 6000 \left(\frac{m}{s} \right)$$

$$6000 = \sqrt{\frac{Y}{5000}} \text{ /O}^2$$

$$6000^2 = \frac{Y}{5000}$$

$$Y = 1,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$$

Actividad 9: “Intensidad de onda de presión”.

$$I = \frac{P_{máx}^2}{2v\rho_0} = \text{Intensidad}$$

$P_{máx}$: presión máxima.

v : velocidad del sonido.

ρ_0 : densidad del aire.

$$[I] = \frac{[Potencia]}{[Área]}$$

$$[I] = \frac{[Watt]}{[m^2]}$$

Actividad 10: “Ejemplo”

Calcule la intensidad de una onda sonora en el aire, en el oído interno, donde $P_{máx} = 3.0 \times 10^{-2}$ Pa a una temperatura de 20 °C, de modo que $\rho = 1.20 \text{ kg/m}^3$ y $v = 344 \text{ m/s}$.

$$I = \frac{P_{máx}^2}{2v\rho_0} = \text{Intensidad}$$

$$I = \frac{(3 \cdot 10^{-2})^2}{2(344)(1,2)}$$

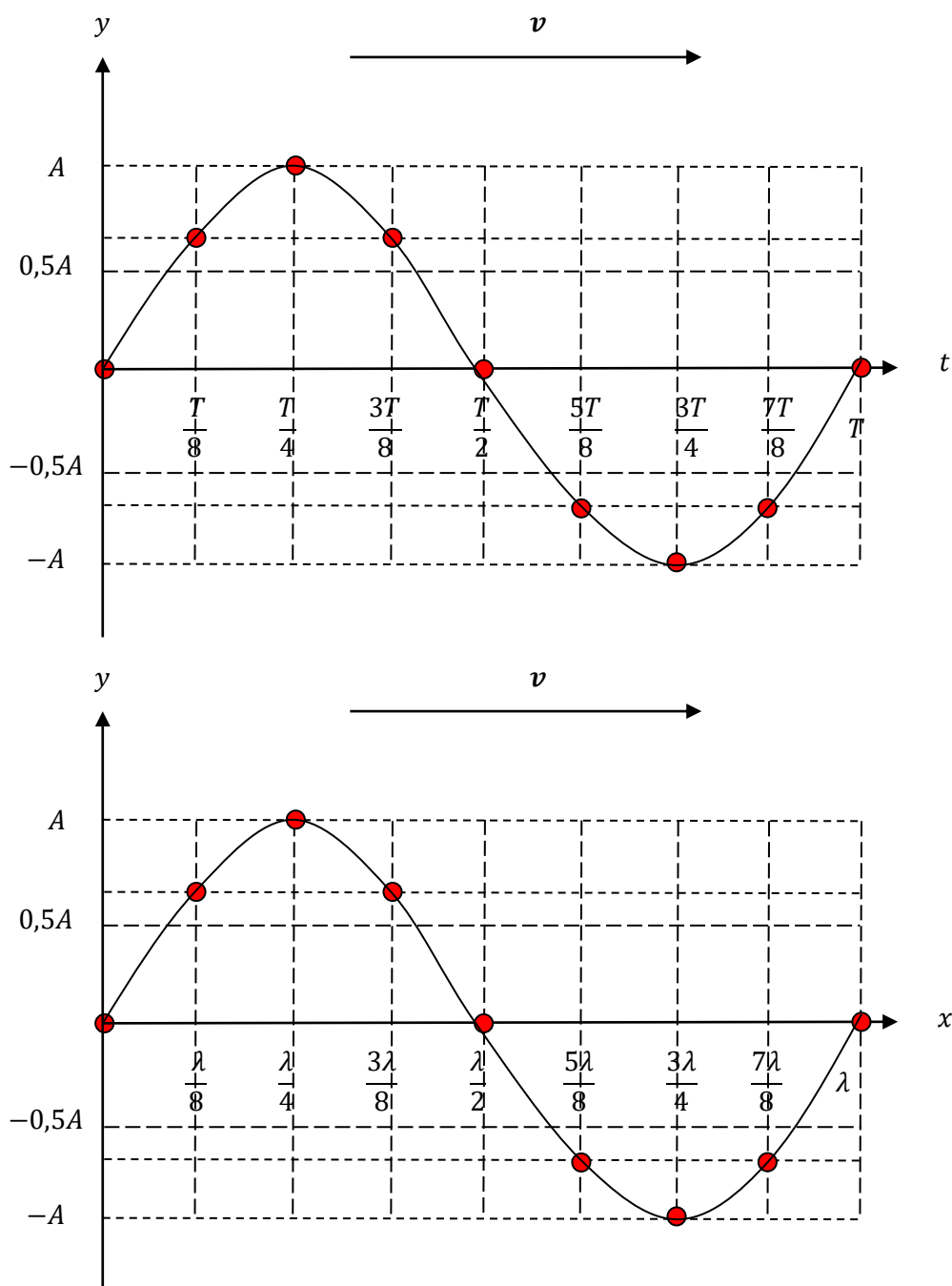
$$I = 1,09 \cdot 10^{-6} \left(\frac{Watt}{m^2} \right)$$

Actividad 11: "Ecuación de una onda".

Supongamos que una onda sinusoidal (**transversal** o longitudinal) está avanzando hacia la derecha en un medio que se extiende indefinidamente en la dirección "x". En un instante cualquiera, "t", la elongación "y" de una partícula depende de su posición, o sea de su abscisa, "x".

12.1 Grafique "y" en función de "t" y luego en función de "x".

12.2 Determine la ecuación de la onda, escribiéndola en función de "t" y luego en función de "x".



$$y(t) = ?$$

$$y(t) = A \sin(\omega t)$$

$$\omega = \frac{\Delta \theta}{\Delta t}$$

Para un ciclo (una vuelta): $\Delta \theta = 2\pi$; $\Delta t = T$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)$$

$$y(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)$$

$$y(x) = ?$$

$$y(x) = A \sin(kx)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\text{rad}}{\text{m}} \right): \text{Número de ondas.}$$

$$y(x) = A \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)$$

Actividad 12: “Ecuación de la onda en un sentido”.

Se observa que “y” es función de las variables independientes “x” y “t”. Escriba la ecuación de la onda sinusoidal (transversal o longitudinal) que se propaga en el sentido positivo de “x”.

$$y(x, t) = y(x) + y(t)$$

$$y(x, t) = y_{\text{máx}} \sin(kx - \omega t + \varphi)$$

Nota: El signo (-) indica que la onda se propaga hacia la derecha.

φ : constante de fase.

Actividad 12: “Onda sinusoidal”.

En las ondas viajeras hemos supuesto que el desplazamiento “y” es cero en la posición $x = 0$ en el tiempo $t = 0$. Esto no tiene que ser siempre así.

La expresión general para una onda sinusoidal que viaje en la dirección “x” positiva es:

$$y(x, t) = y_{\max} \sin(kx - \omega t + \phi)$$

Donde:

$(kx - \omega t + \phi)$: fase de la onda.

“Se dice que dos ondas con la misma fase (o con fases que difieren en cualquier múltiplo entero de 2π) están en “fase”; ejecutan el mismo movimiento al mismo tiempo.

ϕ : constante de fase.

“La constante de fase no afecta a la forma de onda; mueve a la onda hacia delante o hacia atrás en el espacio o en el tiempo”.

Actividad 13: “Potencia Promedio e Intensidad”.

A menudo se considera que la entrada de potencia a la cuerda es el promedio en un periodo del movimiento.

La potencia promedio abastecida, entre t y $(t+T)$, es:

$$P_{\text{promedio}} = (1/T) \int P dt$$

Donde “ T ” es el período.

También se puede anotar como:

$$P_{\text{promedio}} = (1/2) y_m^2 \mu v \omega^2$$

La intensidad “ I ” se define como:

$$I = P_{\text{promedio}}/A$$

A : área normal a la dirección en que viaja la onda.

Nota: Cuando se transmite energía a lo largo de la cuerda, la energía se almacena en cada elemento de la cuerda como una combinación de energía cinética y de energía potencial de deformación. Esto es similar al caso del oscilador armónico simple.

Actividad 14: "Ejemplos".

Ejemplo 1.

La ecuación de una **onda transversal** que se propaga en una cuerda es:

$Y(x,t) = 2\cos[\pi(0,5x - 200t)]$, en la que "x" e "y" se miden en **centímetros** y "t" en **segundos**.

a) Calcular la amplitud, longitud de onda, frecuencia, periodo y velocidad de propagación.

b) Hacer un esquema de la forma de la cuerda para los siguientes valores de t: 0; 0,0025; y 0,005 [s].

c) Si la **masa de la cuerda por unidad de longitud** es 5 [gr/cm], calcular la tensión.

(a)

$$y(x, t) = 2\cos[\pi(0,5x - 200t)]$$

$$y(x, t) = y_{\text{máx}}\text{sen}(kx - wt + \varphi)$$

$y_{\text{máx}}$: amplitud.

k : número de ondas.

x : posición.

w : frecuencia angular.

t : tiempo.

φ : constante de fase.

$$y(x, t) = 2\cos[0,5\pi x - 200\pi t]$$

$$y(x, t) = y_{\text{máx}}\cos(kx - wt)$$

Amplitud: $y_{\text{máx}} = 2 \text{ cm}$

Longitud de onda: (λ)

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{0,5\pi}$$

$$\lambda = 4 \text{ cm}$$

Frecuencia angular:

$$w = 200\pi \left(\frac{rad}{s}\right)$$

Frecuencia:

$$f = \frac{1}{T}$$

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

$$T = \frac{2\pi}{w}$$

$$T = \frac{2\pi}{200\pi}$$

$$T = 0,01 \text{ (s)}$$

$$f = \frac{1}{0,01}$$

$$f = 100 \text{ Hz}$$

Periodo: $T = 0,01 \text{ (s)}$

Velocidad de propagación:

$$v = \lambda \cdot f$$

$$v = (4 \text{ cm})(100 \text{ Hz})$$

$$v = 400 \left(\frac{cm}{s}\right)$$