

CAMBIO DE VARIABLE

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

2 de octubre de 2023

Teorema de Cambio de Variable

Teorema

Sea f una función continua, y sea $u = g(x)$ una función derivable, con primera derivada continua. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

Teorema de Cambio de Variable

Teorema

Sea f una función continua, y sea $u = g(x)$ una función derivable, con primera derivada continua. Entonces:

$$\int f(g(x))g'(x) dx = \int f(u) du$$

Nota:

Para efectos del teorema, escribiremos $du = g'(x)dx$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$.

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du =$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx =$$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx = \int \sqrt[5]{u^3} \frac{1}{3} du$$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\begin{aligned}\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \int \sqrt[5]{u^3} \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{3}{5}} du\end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \int \sqrt[5]{u^3} \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{3}{5}} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\begin{aligned} \int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \int \sqrt[5]{u^3} \frac{1}{3} du \\ &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{3}{5}} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \int \sqrt[5]{u^3} \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{3}{5}} du \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 1

Encuentre $\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx$

Solución: Sea $u = 3x - 7$. $du = 3 dx$.

Escribimos $\frac{1}{3}du = dx$. Aplicando el teorema:

$$\begin{aligned}
 \int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \int \sqrt[5]{u^3} \frac{1}{3} du \\
 &= \frac{1}{3} \int u^{\frac{3}{5}} du \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{3}{5}+1}}{\frac{3}{5}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}}$$

$$\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c & c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{5}{24} \cdot u^{\frac{8}{5}} + c & c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt[5]{(3x-7)^3} dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{8}{5}}}{\frac{8}{5}} + c & c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{5}{24} \cdot u^{\frac{8}{5}} + c & c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{5}{24} \cdot (3x-7)^{\frac{8}{5}} + c & c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

$$\int 2xe^{x^2} dx =$$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

$$\int 2xe^{x^2} dx = \int e^{x^2} 2x dx$$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2} dx &= \int e^{x^2} 2x dx \\ &= \int e^u du\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2} dx &= \int e^{x^2} 2x dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2} dx &= \int e^{x^2} 2x dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 2

Encuentre $\int 2xe^{x^2} dx$

Solución: Sea $u = x^2$, luego $du = 2x dx$

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2} dx &= \int e^{x^2} 2x dx \\ &= \int e^u du \\ &= e^u + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= e^{x^2} + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encuentre $\int \frac{2x + 1}{x^2 + x} dx$

Ejemplo 3

Encuentre $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Solución: Sea $u = x^2 + x$. Luego

Ejemplo 3

Encuentre $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Solución: Sea $u = x^2 + x$. Luego $du = (2x+1) dx$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx =$$

Ejemplo 3

Encuentre $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Solución: Sea $u = x^2 + x$. Luego $du = (2x+1) dx$

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx = \int \frac{du}{u}$$

Ejemplo 3

Encuentre $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Solución: Sea $u = x^2 + x$. Luego $du = (2x+1) dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Encuentre $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

Solución: Sea $u = x^2 + x$. Luego $du = (2x+1) dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+1}{x^2+x} dx &= \int \frac{du}{u} \\ &= \ln |u| + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \ln |x^2+x| + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u =$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx =$$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx = \int \frac{\frac{1}{3} du}{\sqrt[3]{u}}$$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3} du}{\sqrt[3]{u}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{3}} du \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3} du}{\sqrt[3]{u}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{3}} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3} + 1} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3} du}{\sqrt[3]{u}} \\ &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{3}} du \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Encuentre $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx$

Solución: Sea $u = x^3 + 10$. Luego $du = 3x^2 dx$. Escribimos $\frac{1}{3} du = x^2 dx$

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx &= \int \frac{\frac{1}{3} du}{\sqrt[3]{u}} \\
 &= \frac{1}{3} \int u^{-\frac{1}{3}} du \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 + 10}} dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c & c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{2}{3}} + c & c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3+10}} dx &= \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + c && c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \cdot u^{\frac{2}{3}} + c && c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{1}{2} \cdot (x^3+10)^{\frac{2}{3}} + c && c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Algunas generalidades:

- $\int f^n(x) f'(x) dx = \frac{f^{n+1}(x)}{n+1} + c, n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$
- $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + c$
- $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + c$

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir,

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, escribimos $F(u) = (F \circ g)(x)$.

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, escribimos $F(u) = (F \circ g)(x)$.

$$(F \circ g)'(x) =$$

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, escribimos $F(u) = (F \circ g)(x)$.

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) =$$

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, escribimos $F(u) = (F \circ g)(x)$.

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Lo que indica que $F \circ g$ es primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$.

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, escribimos $F(u) = (F \circ g)(x)$.

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Lo que indica que $F \circ g$ es primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Como $F(u) = (F \circ g)(x)$ entonces

Explicación del teorema

Sea F antiderivada de f , es decir, $F'(u) = f(u)$. Como $u = g(x)$, escribimos $F(u) = (F \circ g)(x)$.

$$(F \circ g)'(x) = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Lo que indica que $F \circ g$ es primitiva de $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Como $F(u) = (F \circ g)(x)$ entonces

$$\int f(u)du = \int (f(g(x))) g'(x)dx$$

Ejercicios

Calcular las siguientes primitivas:

$$\textcircled{1} \int e^x \sqrt{1 + e^x} dx$$

$$\textcircled{2} \int (3x - 5)^4 dx$$

$$\textcircled{3} \int \frac{(3 \ln(x) - 5)^4}{x} dx$$

Soluciones

$$\textcircled{1} \quad \frac{2}{3}(1 + e^x)^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{(3x - 5)^5}{15} + c$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{(3\ln(x) - 5)^5}{15} + c$$