

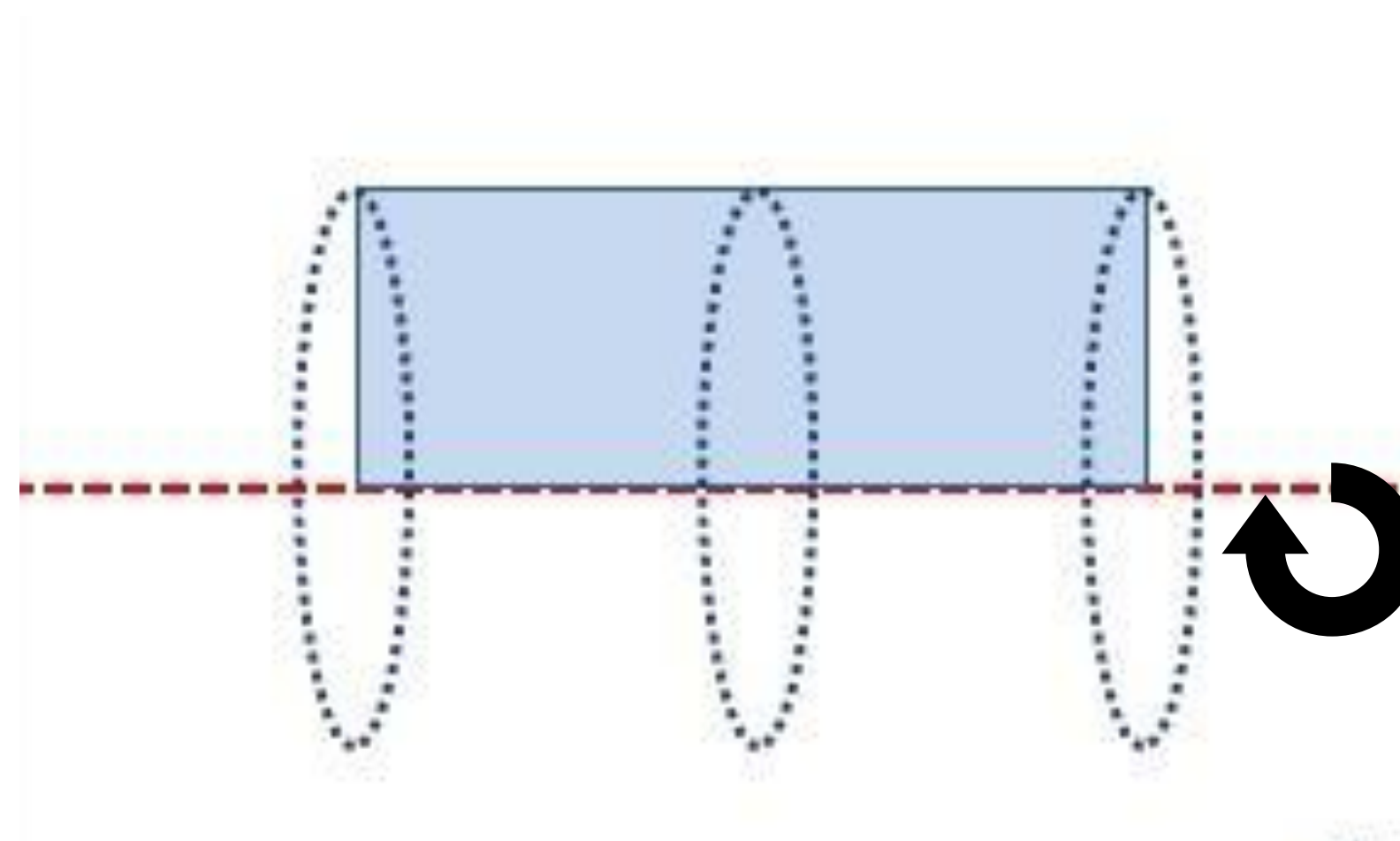
VOLÚMENES DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

CATHERINE HARDY

SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN

Los sólidos de revolución son sólidos que se generan al girar una región plana alrededor de un eje.

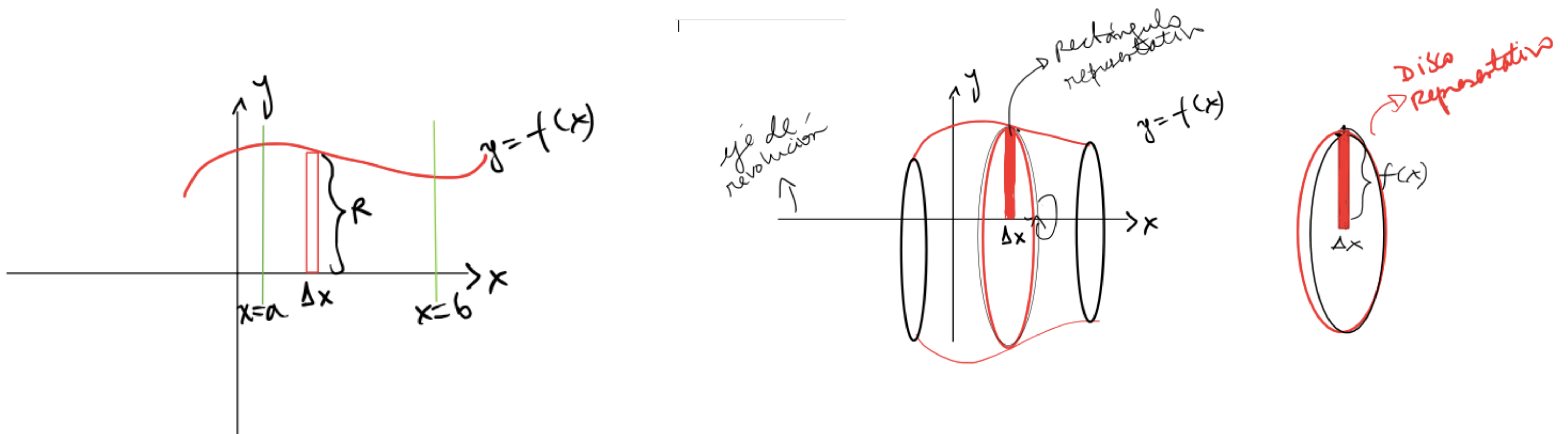
Ej.: Si hacemos girar un rectángulo alrededor de un eje adyacente a dicho rectángulo, el sólido de revolución es un cilindro circular.



$$V = \pi R^2 h$$

Cálculo de Volúmenes

MÉTODO DE LOS DISCOS



$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

→ Eje de revolución horizontal

Cálculo de Volúmenes

MÉTODO DE LOS DISCOS

Si el eje de revolución es el eje y :

$$V = \pi \int_c^d [f(y)]^2 dy$$

EJEMPLOS:

1.- Hallar el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por la gráfica de

a) $f(x) = \sqrt{x}$ entre $x=0$, $x=1$ e $y=0$

b)
$$\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 0 \\ x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$$

Cálculo de Volúmenes

Método de los anillos

Sean f y g funciones continuas en $[a, b]$ y supongamos que $f(x) \geq g(x) \quad \forall x \in [a, b]$

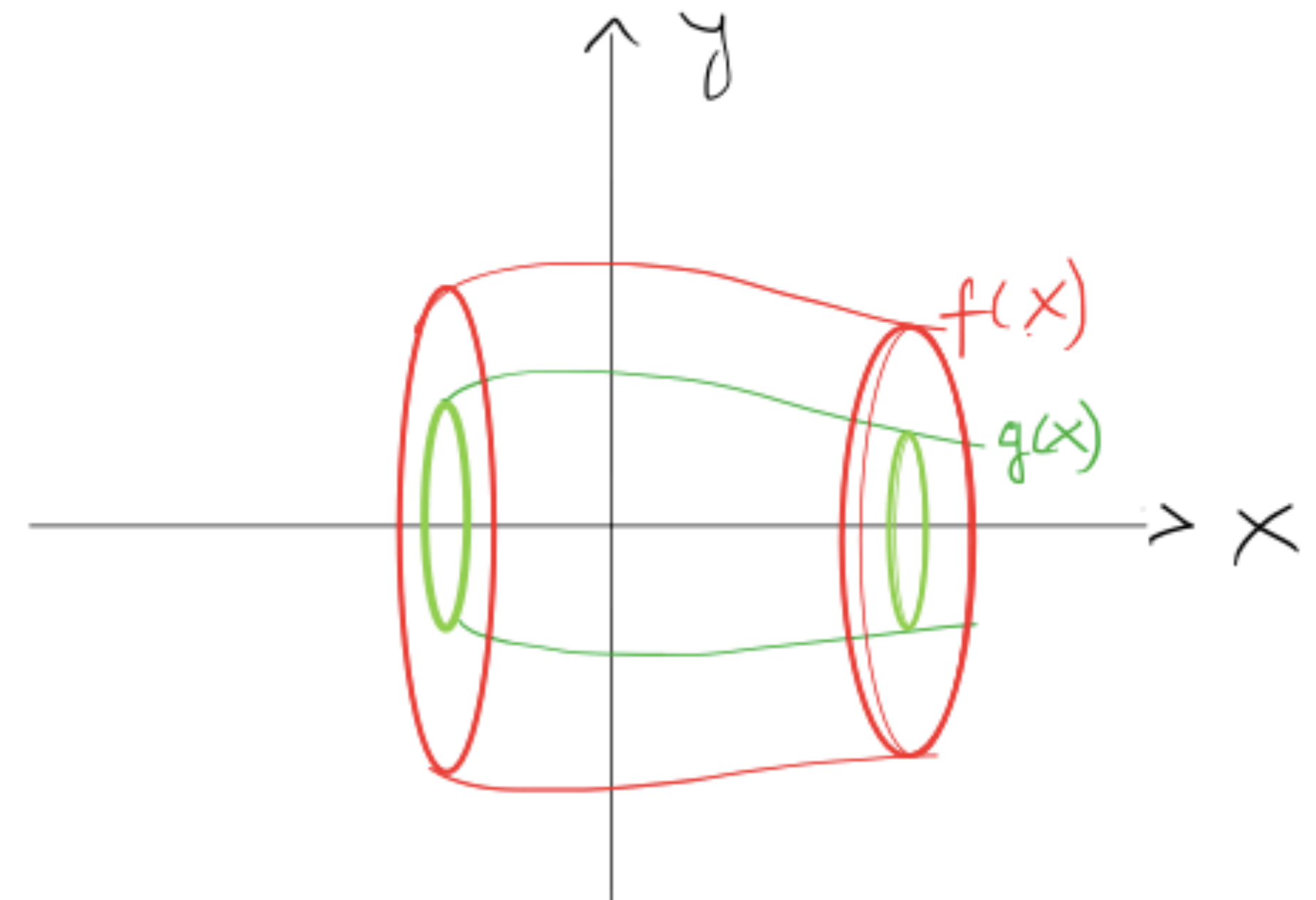
Luego: El Volumen del sólido de revolución generado al girar alrededor del eje x

la región limitada por dos curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y las rectas $x=a$ y $x=b$ es:

$$V = \pi \int_a^b \left[[f(x)]^2 - [g(x)]^2 \right] dx$$

↑
superior
(+ lejos del eje)

↑
inferior
(+ cerca del eje)



Cálculo de Volúmenes

Método de los anillos

Si el eje de revolución es el eje y

$$V = \pi \int_c^d \left[[f(y)]^2 - [g(y)]^2 \right] dy$$



derecha
(+ lejos del eje)



izquierda
(+ cerca
del eje)

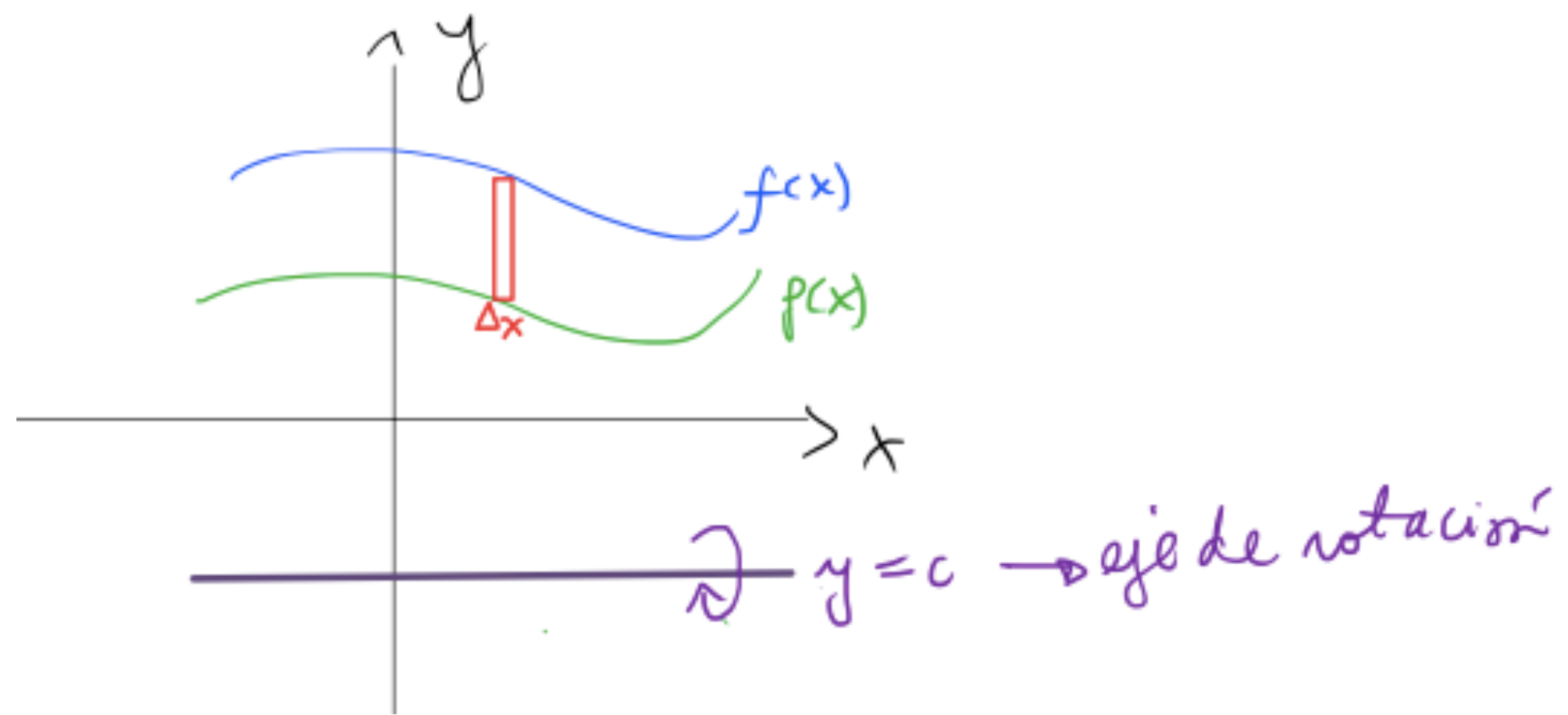
Ejemplos:

Encontrar el volumen del sólido formado al girar las regiones:

a) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x^2 \end{cases}$ alrededor del eje x

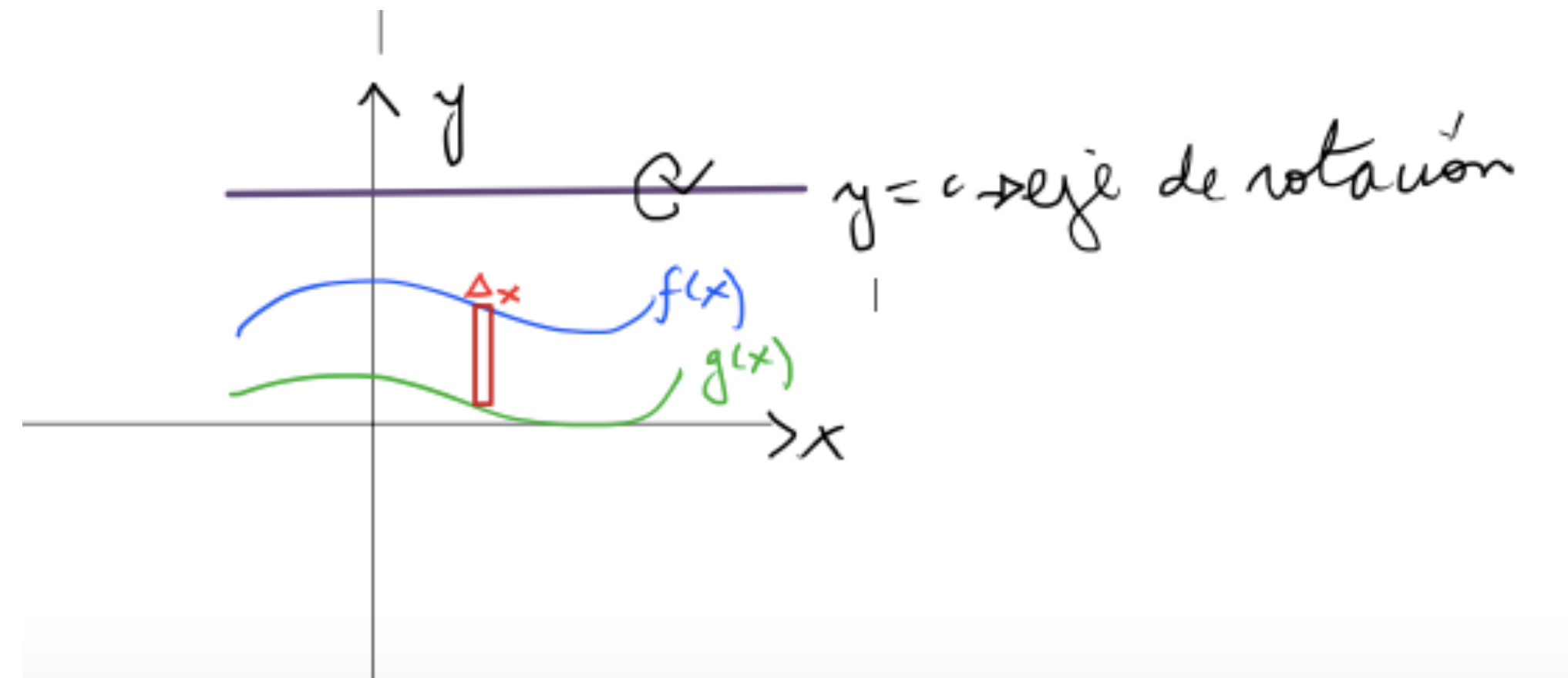
b) $\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ x + 4y - 12 = 0 \end{cases}$ alrededor del eje y

SI EL EJE DE ROTACIÓN ES DISTINTO AL EJE X (paralelo al eje x)



$$V = \pi \int_a^b \left(\left[f(x) - c \right]^2 - \left[g(x) - c \right]^2 \right) dx$$

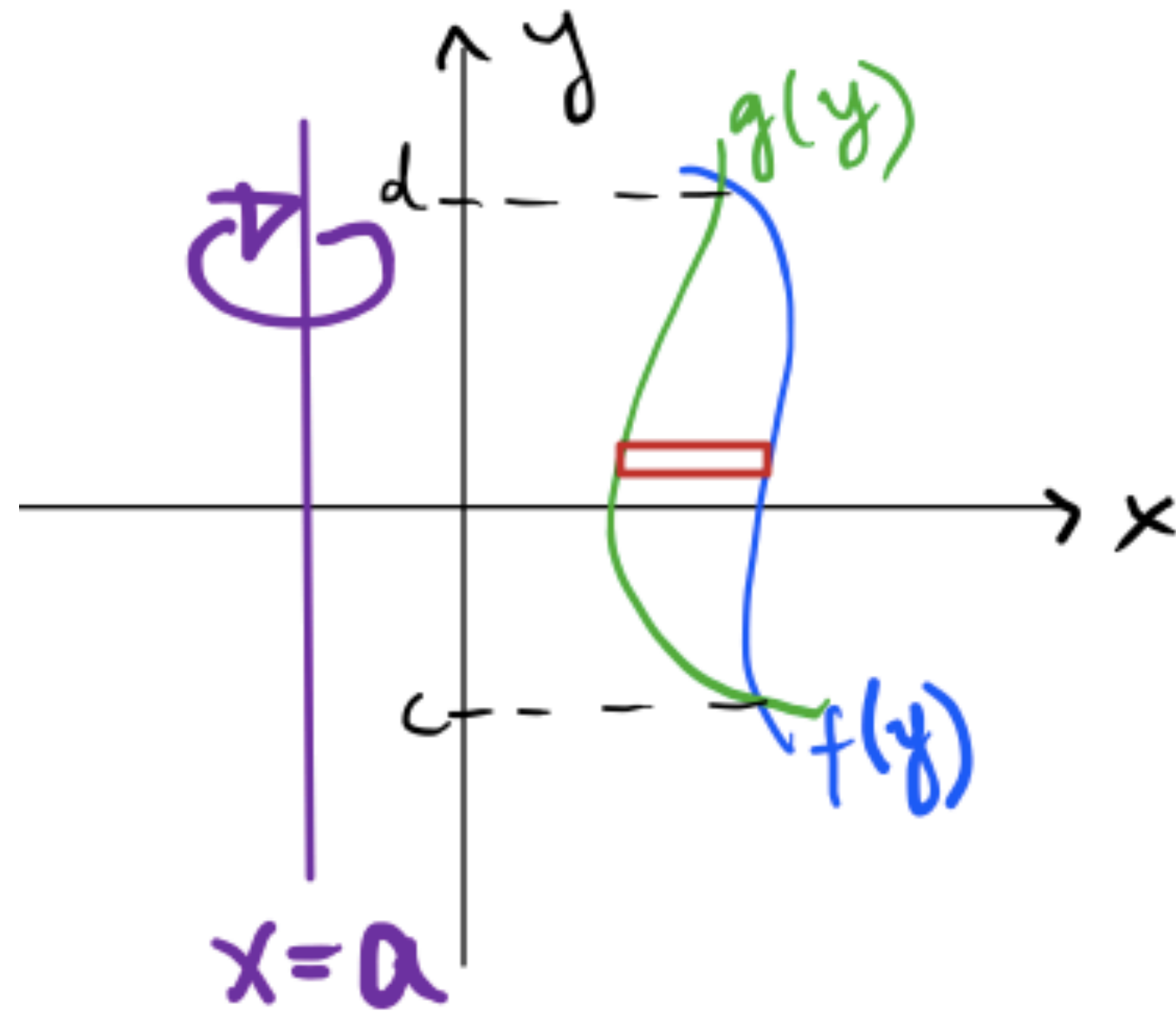
↑ radio mayor ↑ radio menor



$$V = \pi \int_a^b \left(\left[c - g(x) \right]^2 - \left[c - f(x) \right]^2 \right) dx$$

↑ radio mayor ↑ radio mayor

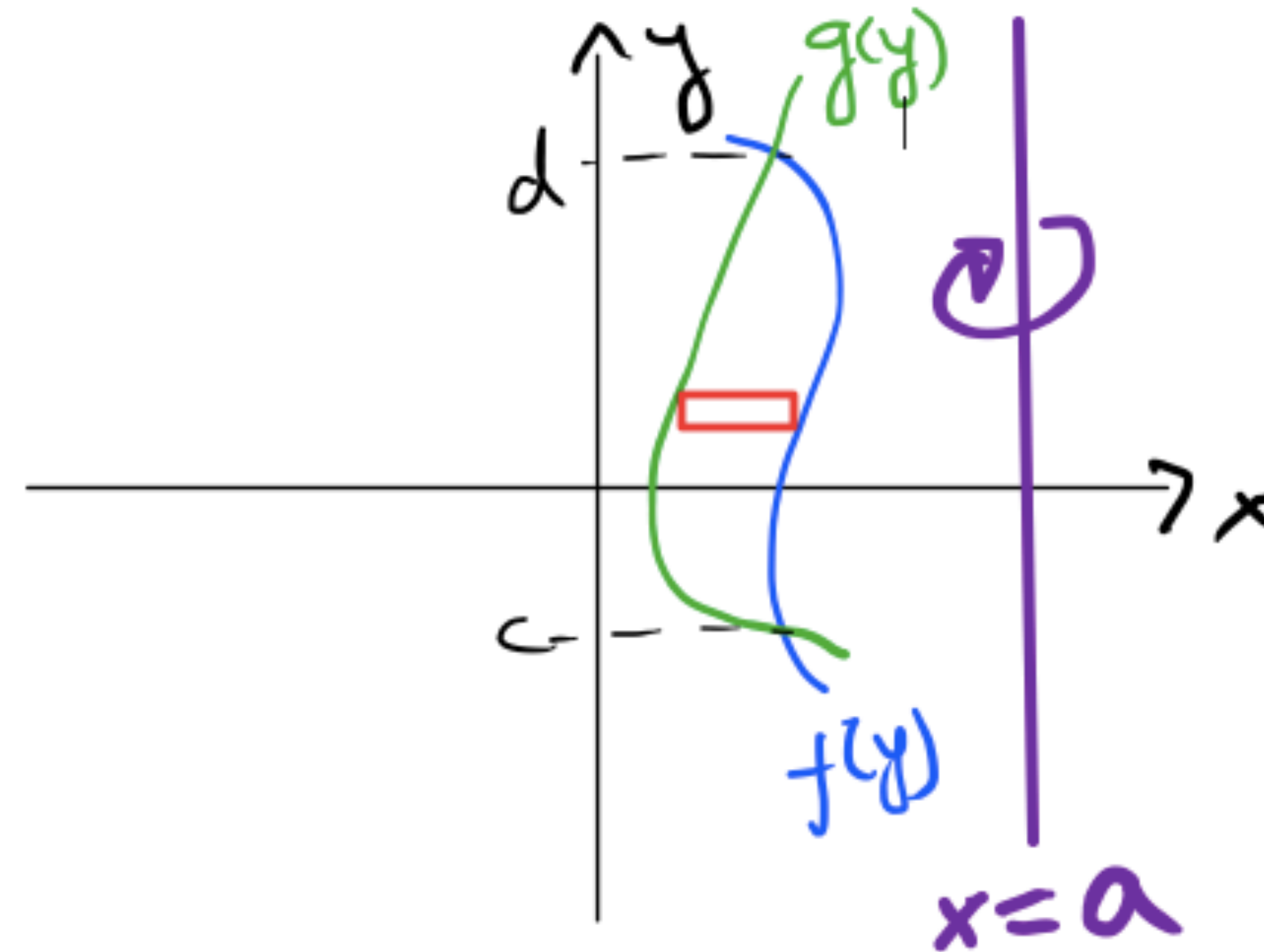
SI EL EJE DE ROTACIÓN ES DISTINTO AL EJE Y (paralelo al eje Y)



$$V = \pi \int_c^d \left([f(y) - a]^2 - [g(y) - a]^2 \right) dy$$

radio
mayor

radio
menor



$$V = \pi \int_c^d \left([a - g(y)]^2 - [a - f(y)]^2 \right) dy$$

radio
mayor

radio
menor