

Sucesiones e Inducción Matemática

Definición, ejemplos y demostración
por inducción

Catherine Hardy

¿Qué es una sucesión?

SUCESIONES

Una sucesión es una lista de números escritos en un orden definido:

$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ donde n indica la posición del término.

Notación:

$$\{a_1, a_2, a_3, \dots\}$$

$$\{a_n\}$$

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

$$\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Una sucesión es una función:

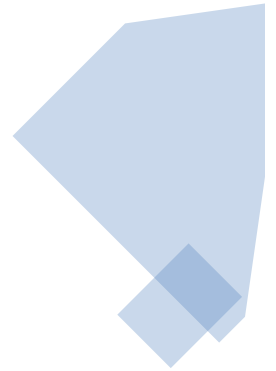
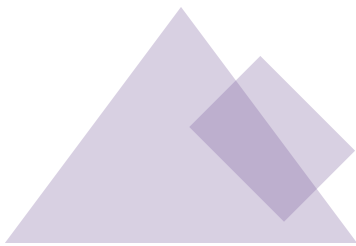
$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$

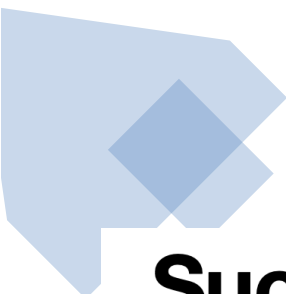
$$n \rightarrow f(n)$$

Ejemplos:

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$a_n = \frac{1}{n^2}$$





Sucesiones definidas por recurrencia

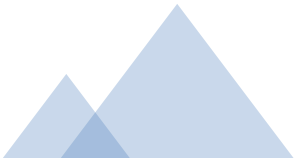
Son aquellas en las que para definir un término se utilizan términos anteriores a el.

Ejemplo: Sucesión de Fibonacci

$$a_1 = 1$$

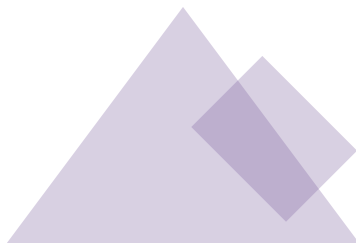
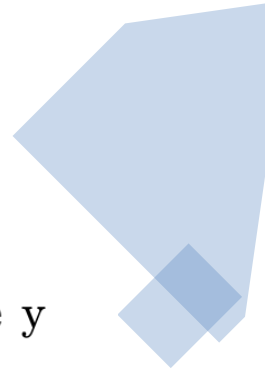
$$a_2 = 1$$

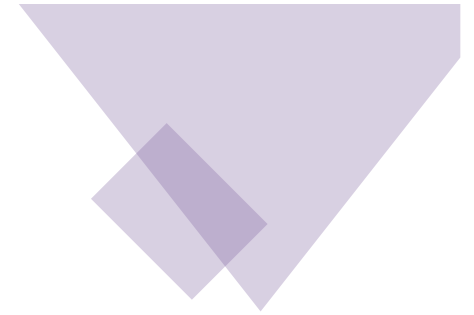
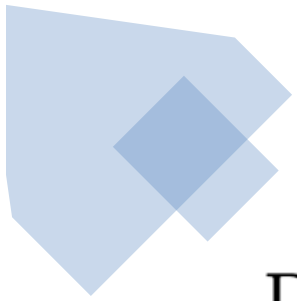
$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$$a_n = \{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots\}$$


Ejemplos:

Dada la sucesión $a_n = \frac{2^{n-1}}{3n+1}$, determine el k -ésimo término, su siguiente y anterior término.





Dada la sucesión: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots$

- a) Determine su término n -ésimo.
- b) Pruebe que $a_k - a_{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.
- c) Calcule $a_1 - a_{n+1}$.



Dada la sucesión: $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$

- a)* Determine el término n -ésimo.
- b)* Determine el anterior y siguiente término al n -ésimo.
- c)* Calcule $a_{2k} - a_{2k+1}$.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

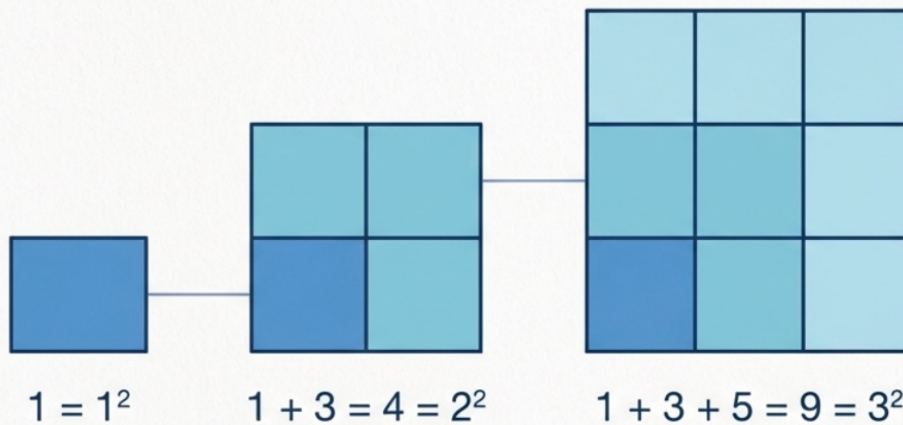
Inducción Matemática: El Arte de la Certeza Infinita

De la observación de patrones a la
demostración rigurosa.



Un método para 'hacer finito lo infinito' (Fuente: UNCUYO).

La trampa de los patrones

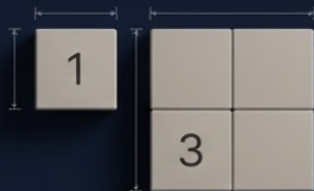


Los seres humanos somos buscadores de patrones. Pero, ¿podemos estar seguros de que esto funciona para el número un billón? No podemos verificar infinitos casos uno por uno.



La observación no es demostración.

Verificar no es Demostrar



La Observación

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 4 = 2^2$$

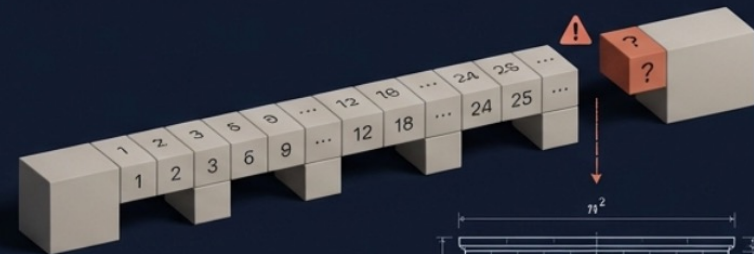
$$1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$$



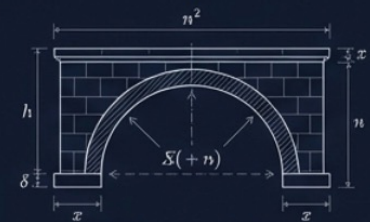
Conjetura: La suma de los n primeros impares es n^2 .

En matemáticas, la disciplina deductiva por excelencia, observar el patrón no es suficiente.

Podríamos **sumar el primer trillón de números impares** y verificar que funciona. Sin embargo, nada asegura que **el patrón no se rompa en el trillón + 1**.



Necesitamos un puente lógico que cubra todos los casos posibles de una sola vez.



El Puente Lógico
(Inducción Matemática)

El Mecanismo: El Efecto Dominó

1. El Empuje (Paso Base): Alguien debe empujar la primera ficha ($n=1$ es verdadera).

2. La Reacción en Cadena (Paso Inductivo): Si se cae la ficha k , obligatoriamente tumba a la ficha $k+1$.



Si garantizamos estas dos condiciones, la fila completa caerá, sin importar qué tan larga sea. La verdad se propaga automáticamente.

Los Cimientos: El Principio del Buen Orden



Para que el efecto dominó funcione, necesitamos un conjunto de números que se comporte como una fila ordenada.

Axiomas de Peano: Todo número natural n tiene un sucesor único $n+1$. No hay números "en medio" de los enteros y hay un primer elemento (el 1).

"Es una estrategia para hacer finito lo infinito." — UNCUIYO

Del Dominó a la Lógica

Visual/Metaphor



La primera ficha cae.



Si una cae, golpea a la siguiente.

Mathematical/Formal

Paso Base ($P(1)$)

Probamos que la fórmula es verdadera para $n = 1$.

Paso Inductivo ($P(k) \Rightarrow P(k + 1)$)

Asumimos que funciona para k (Hipótesis) y probamos que obliga a $k + 1$ (Tesis).

El objetivo es construir una “máquina” lógica que pruebe los números automáticamente.

PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Una proposición $p(n)$ es verdadera para todos los valores de la variable n si se cumplen las siguientes condiciones :

Paso 1.- La proposición $p(n)$ es verdadera para $n = 1$, o bien, $p(1)$ es verdadera.

Paso 2.- **Hipótesis de Inducción** . Se supone que $p(k)$ es verdadera , donde k es un número natural cualesquiera.

Paso 3.- **Tésis de Inducción**. Se demuestra que $p(k + 1)$ es verdadera, o bien,

$$p(k) \text{ verdadera} \Rightarrow p(k + 1) \text{ verdadera.}$$

El Desafío: Un Ejemplo Sencillo

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Proposición de Gauss

Vamos a demostrar que esta igualdad es cierta para todo número entero positivo ($n \in \mathbb{Z}^+$).