CERTAMEN 2
MATEMATICAS III

NOMBRE: _____NºCAD:_____ CURSO: 3°____

1. **DOCENTE(S): S. Baquedano, C. Hardy, A. Rauch.**
2. **FECHA:** 10 / 05 / 2024
3. **UNIDAD TEMÁTICA:** I- Integral Indefinida II- Integral Definida
4. **TIEMPO:** 80 min.
5. **MATERIALES:** de escritorio. Calculadora no algebraica.

INDICACIONES:

- Lea cuidadosamente la prueba antes de comenzar a responder. La comprensión de los enunciados es parte de la prueba.
- Todo resultado debe estar argumentado o justificado a través de sus cálculos explícitos en sus respuestas.
- Escriba con tinta o pasta, en orden, con limpieza y claridad. Si desea anular parte de su trabajo, tárjelo con una línea horizontal encima del escrito (---), no use corrector; no se corregirá lo escrito sobre corrector.
- No utilice lápiz grafito para responder, si utiliza grafito no podrá tener acceso a recorrecciones.

6. RESULTADOS OBTENIDOS:

PREGUNTA	PUNTAJE ASIGNADO	PUNTAJE OBTENIDO
1	38	
2	38	
3	24	
Puntaje total	100	

PREGUNTA Nº 1 (38 puntos)

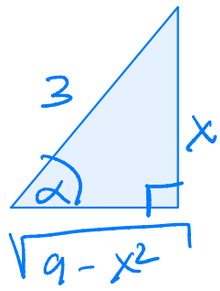
Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. **Aplicar** propiedades y métodos de integración en el cálculo de integrales.
Contenido: Integración por sustitución trigonométrica.

Resolver las siguientes integrales indefinidas, utilizando el método adecuado:

a) $\int \frac{3}{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^3} dx =$

$x = 3\,\mathrm{sen}(\alpha) \quad \Rightarrow \mathrm{sen}(\alpha) = \frac{x}{3}$

$dx = 3\cos(\alpha)\, d\alpha$



$$= \int \frac{3}{\left(\sqrt{9-9\,\mathrm{sen}^2(\alpha)}\right)^3} \cdot 3\cos(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \int \frac{9\cos(\alpha)\, d\alpha}{(3\cos(\alpha))^3} = \int \frac{9\cos(\alpha)}{27\cos^2(\alpha)}\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{\cos^2(\alpha)}\, d\alpha = \frac{1}{3}\int \sec^2(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \frac{1}{3}\,\mathrm{tg}(\alpha) + C$$

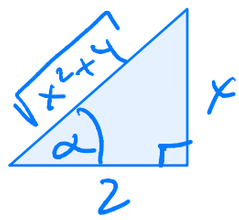
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} + C$$

b) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4}}dx =$

$x = 2\,tg(\alpha)$

$dx = 2\sec^2(\alpha)\,d\alpha$

$tg(\alpha) = \frac{x}{2}$



$$\int \frac{(2\,tg(\alpha)+2)}{\sqrt{4tg^2(\alpha)+4}} \cdot 2\sec^2(\alpha)\,d\alpha$$

$$= \int \frac{(2\,tg(\alpha)+2)\cdot 2\sec^2(\alpha)\,d\alpha}{2\sec(\alpha)}$$

$$= \int 2\sec(\alpha)\cdot tg(\alpha)\,d\alpha + \int 2\sec(\alpha)\,d\alpha$$

$$= 2\sec(\alpha) + 2\ln|\sec(\alpha)+tg(\alpha)| + C$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+4}}{2} + \frac{x}{2}\right| + C$$

PREGUNTA Nº 2 (38 puntos)

Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral indefinida en el cálculo de integrales. **Aplicar** propiedades y métodos de integración en el cálculo de integrales.
Contenido: Integración por fracciones parciales.

a) $\int \frac{4x-2}{x^3-x^2-2x}dx = \int \frac{4x-2}{x(x^2-x-2)}dx = \int \frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)}dx$

$$\frac{4x-2}{x(x-2)(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+1} \quad / \cdot x(x-2)(x+1)$$

$$4x-2 = A(x-2)(x+1) + Bx(x+1) + Cx(x-2)$$

Si $x=0$: $-2 = -2A$, $A = 1$

Si $x=2$: $6 = 6B$, $B = 1$

Si $x=-1$: $-6 = 3C$, $C = -2$

$$= \int \frac{1}{x}dx + \int \frac{1}{x-2}dx + \int \frac{-2}{x+1}dx$$

$$= \ln|x| + \ln|x-2| - 2\ln|x+1| + C$$

b) $\int \frac{3-2x}{(x-2)^2\,(x^2+1)}\,dx =$

$$\frac{3-2x}{(x-2)^2(x^2+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \quad / \cdot (x-2)^2(x^2+1)$$

$$3-2x = A(x-2)(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)(x-2)^2$$

$$3-2x = (Ax-2A)(x^2+1) + Bx^2 + B + (Cx+D)(x^2-4x+4)$$

$$3-2x = Ax^3 + Ax - 2Ax^2 - 2A + Bx^2 + B + Cx^3 - 4Cx^2 + 4Cx + Dx^2 - 4Dx + 4D$$

$$3-2x = x^3(A+C) + x^2(-2A+B-4C+D) + x(A+4C-4D) - 2A + B + 4D$$

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ -2A + B - 4C + D &= 0 \\ A + 4C - 4D &= -2 \\ -2A + B + 4D &= 3 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$A = -6/25$

$B = -1/5$

$C = 6/25$

$D = 17/25$

$$\therefore \int \frac{-6/25}{x-2}\,dx + \int \frac{-1/5}{(x-2)^2}\,dx + \int \frac{\frac{6}{25}x + \frac{17}{25}}{x^2+1}\,dx$$

$u = x-2$, $du = dx$: $-\frac{1}{5}\int u^{-2}\,du$, $-\frac{1}{5}\,\frac{u^{-1}}{-1}$

$$+\frac{6}{25}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{17}{25}\int \frac{dx}{x^2+1}$$

$u = x^2+1$, $du = 2x\,dx$, $\frac{du}{2} = x\,dx$: $\frac{6}{25}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{du}{u}$

$$= \frac{-6}{25}\ln|x-2| + \frac{1}{5}(x-2)^{-1} + \frac{3}{25}\ln|x^2+1| + \frac{17}{25}\arctg(x) + C$$

PREGUNTA Nº 3 (24 puntos: 8 – 16)

Capacidad: Razonamiento Lógico.
Objetivo : Aplicar la definición o propiedades de la integral definida en el cálculo de integrales definidas.
Contenido: Integral definida.

a) Resolver la siguiente integral definida, indicando cada paso de su desarrollo:

$$\int_{-2}^{3} \left(x^2 - 5x + 3 \right) \mathrm{d}x$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3x \right) \Big|_{-2}^{3}$$

$$= \left(9 - \frac{45}{2} + 9 \right) - \left(-\frac{8}{3} - 10 - 6 \right)$$

$$= -\frac{9}{2} - \frac{-56}{3}$$

$$= \frac{85}{6}$$

b) Calcule

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{si} \qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & ; \quad -1 \le x \le 3 \\ 8 & ; \quad 3 < x < 4 \\ 2x & ; \quad 4 \le x \le 5 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^{5} f(x)\,dx = \int_{-1}^{3} (x^2 - 1)\,dx + \int_{3}^{4} 8\,dx + \int_{4}^{5} 2x\,dx$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big|_{-1}^{3} + (8x) \Big|_{3}^{4} + (x^2) \Big|_{4}^{5}$$

$$= \left[(9 - 3) - \left(-\frac{1}{3} + 1 \right) \right] + [32 - 24] + [25 - 16]$$

$$= \frac{16}{3} + 8 + 9$$

$$= \frac{67}{3} \;//$$