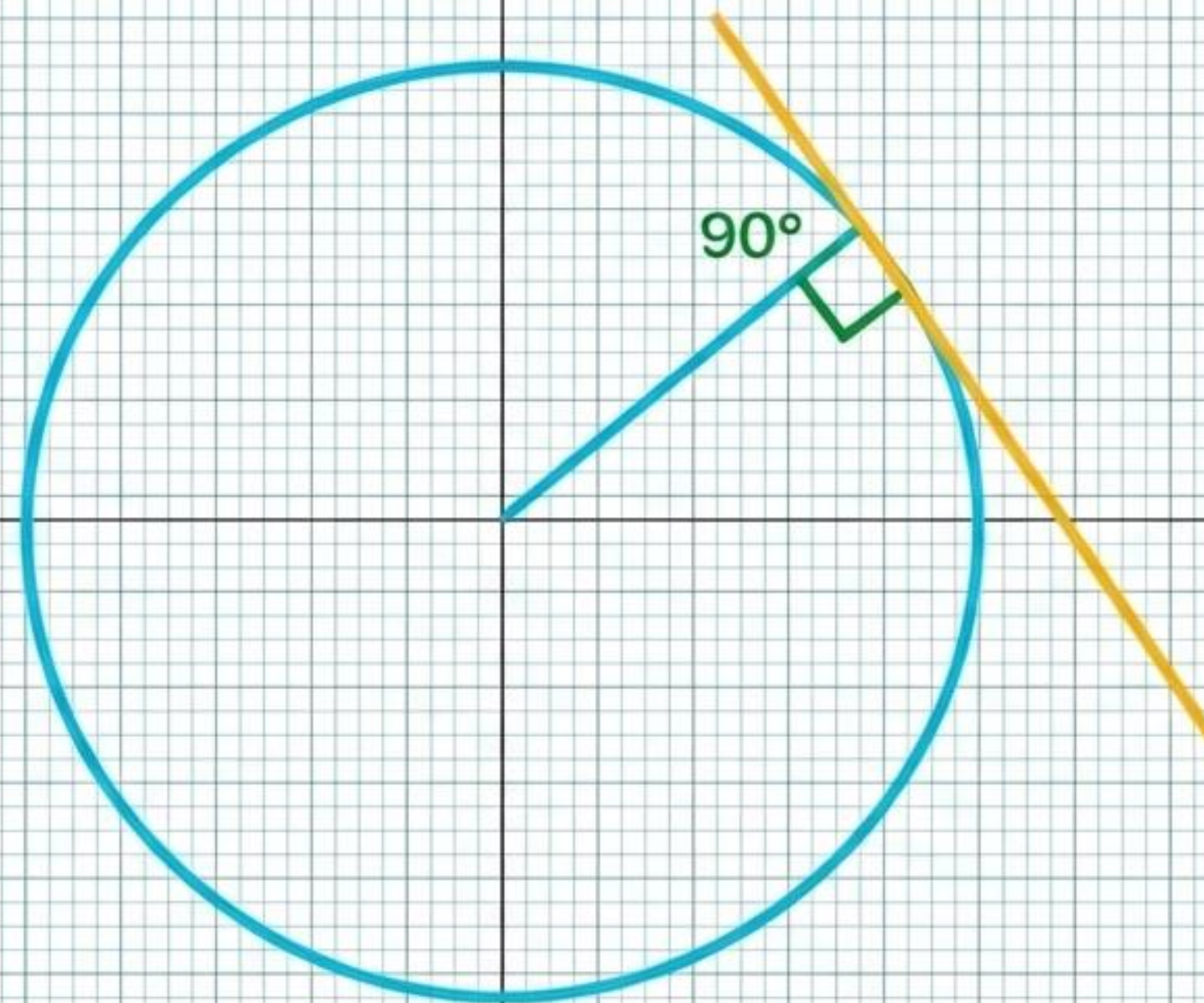
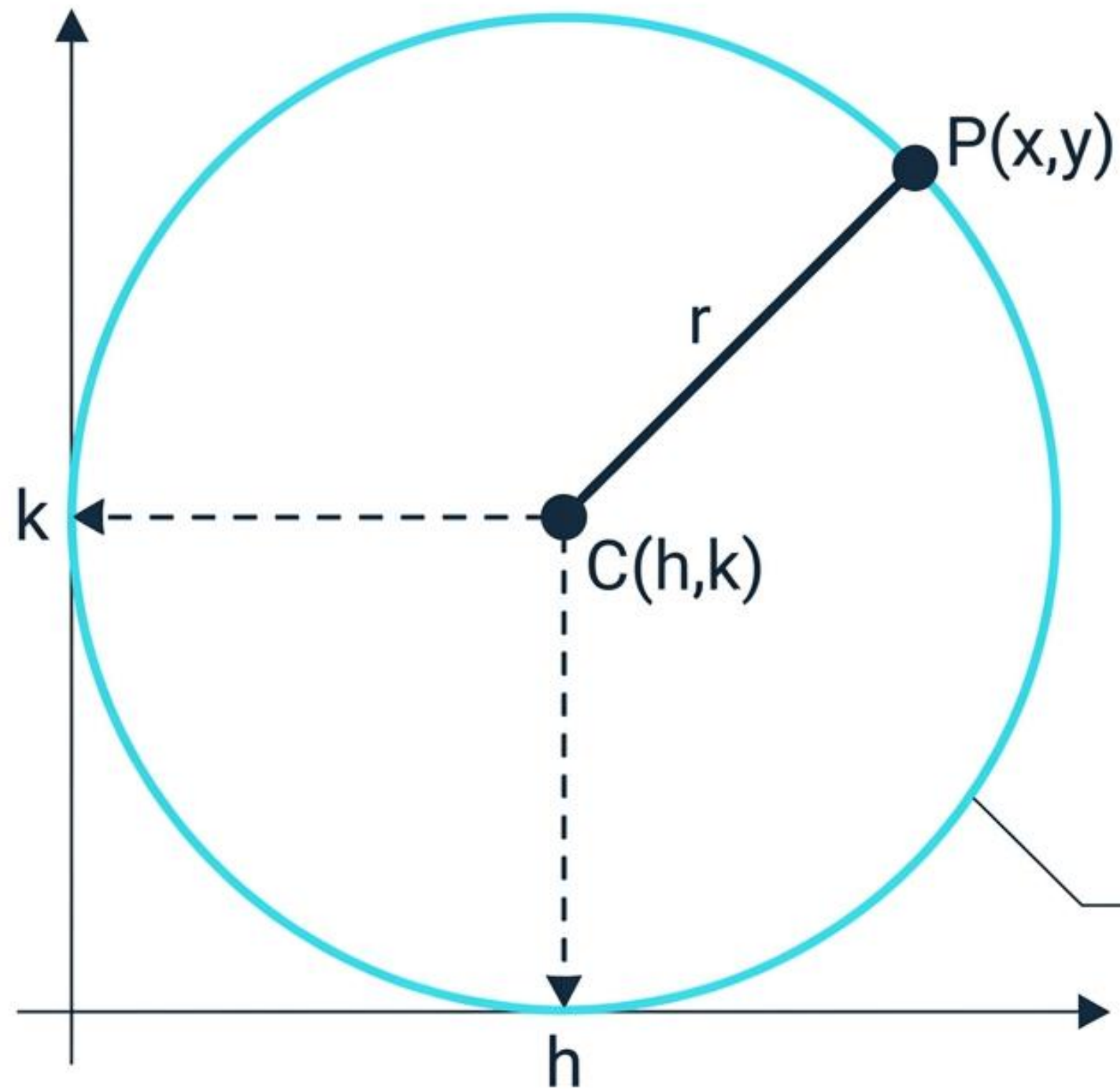


Geometría Analítica: La Circunferencia

Fundamentos, Ecuaciones





Definición

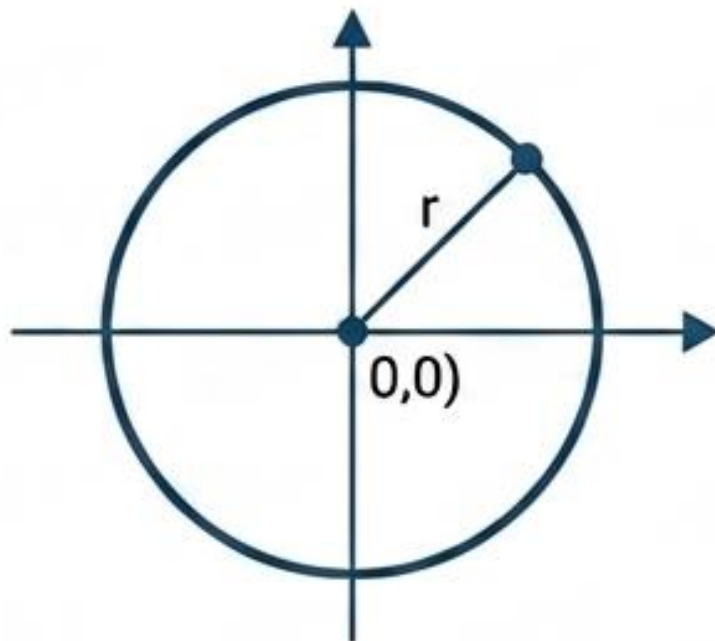
El lugar geométrico de todos los puntos $P(x, y)$ que equidistan de un punto fijo llamado Centro $C(h, k)$. Esa distancia constante es el Radio (r).

El Lenguaje Algebraico: Estados de la Ecuación

Canónica

$$x^2 + y^2 = r^2$$

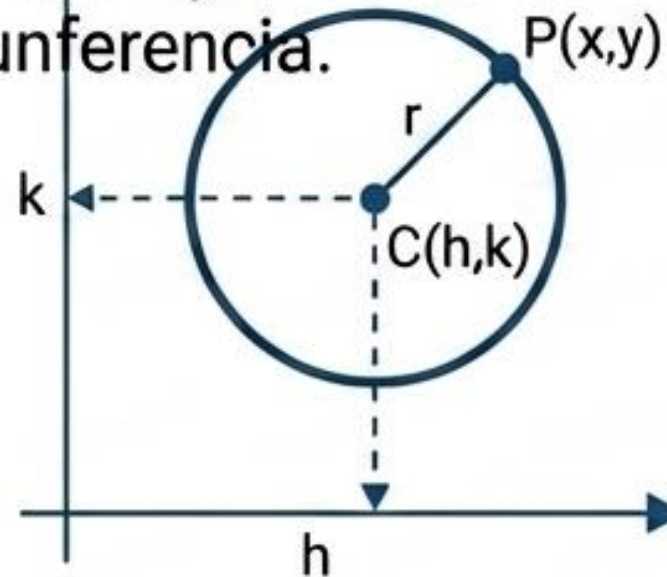
Condición: Centro en el origen (0,0).



Principal

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

Condición: Centro en cualquier punto C(h,k). Esta ecuación nos da información de Centro y radio de la circunferencia.



General

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

Condición: Forma expandida, igualada a cero. Completando cuadrados se llega a la ecuación principal.

Ejercicios de la Ecuación de la Circunferencia

Ejercicio 1: Hallar Centro y Radio de la Ecuación Principal

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 25$$

Comparando con la ecuación principal:

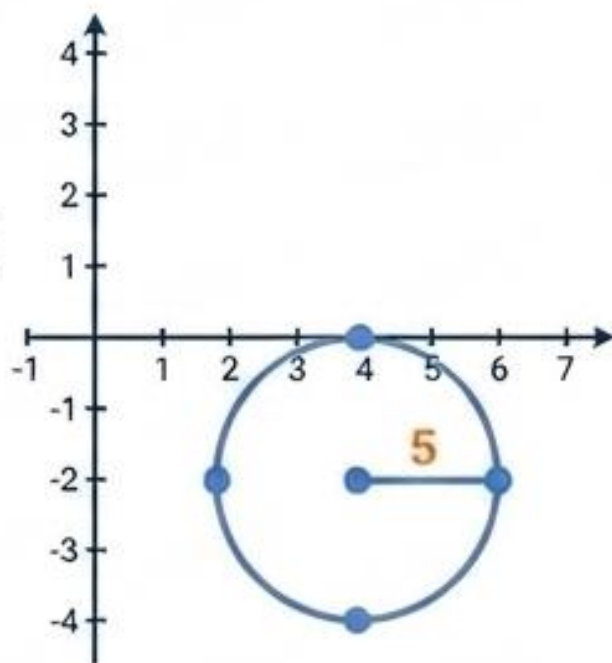
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$h = 4$$

$$k = -3$$

$$r^2 = 25, \text{ por lo tanto, } r = 5$$

**Centro $C(4, -3)$,
Radio $r = 5$**



Ejercicio 2: Completar Cuadrados para la Ecuación Principal

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$$

Agrupar términos y completar cuadrados:

$$(x^2 + 6x + ?) + (y^2 - 8y + ?) = 0 + ? + ?$$

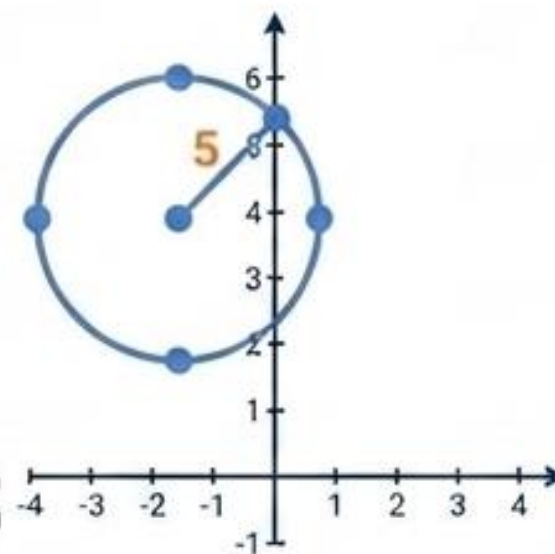
$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 8y + 16) = 9 + 16$$

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$$

Ecuación Principal:

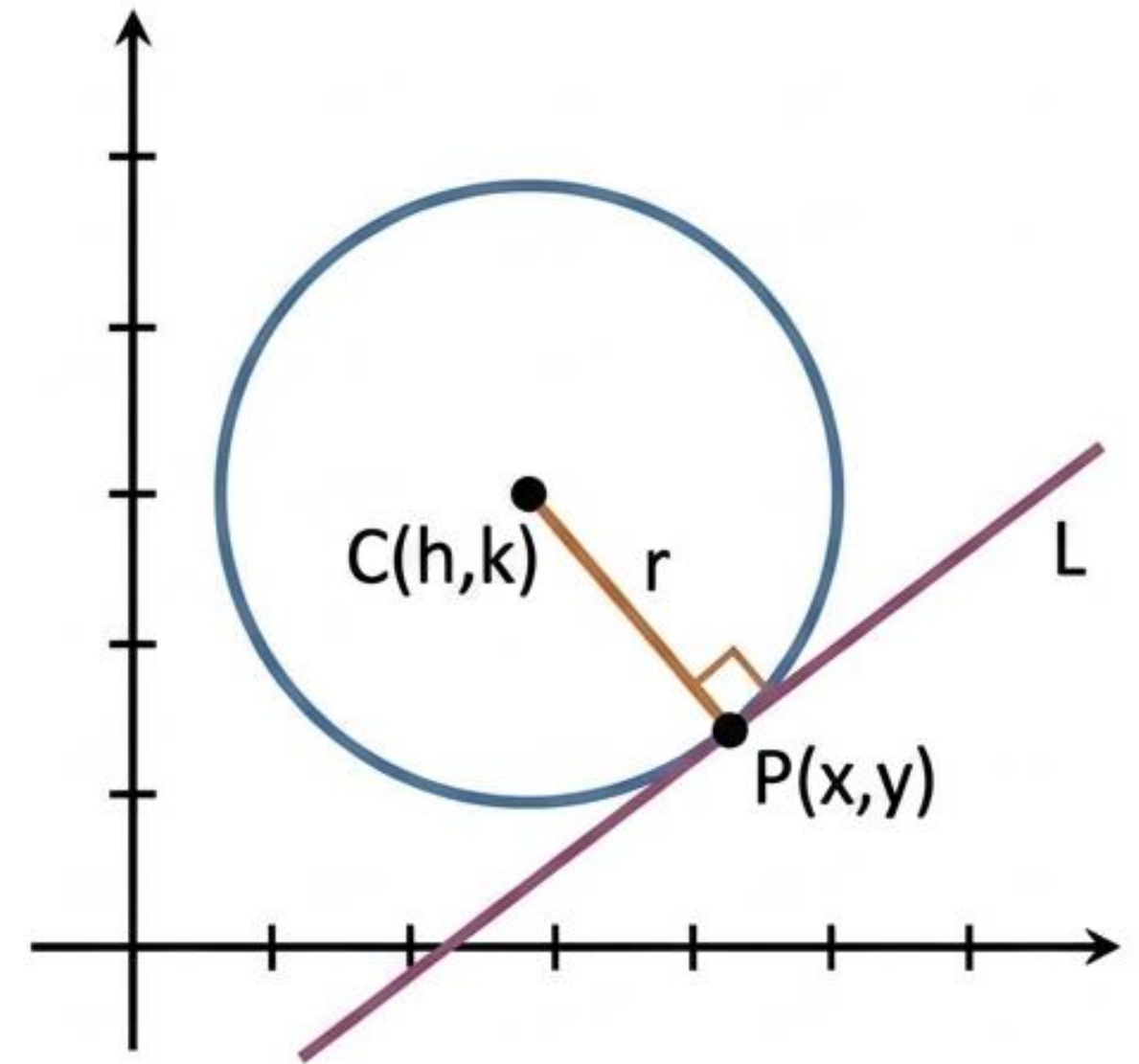
$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25.$$

Centro $C(-3, 4)$, Radio $r = 5$



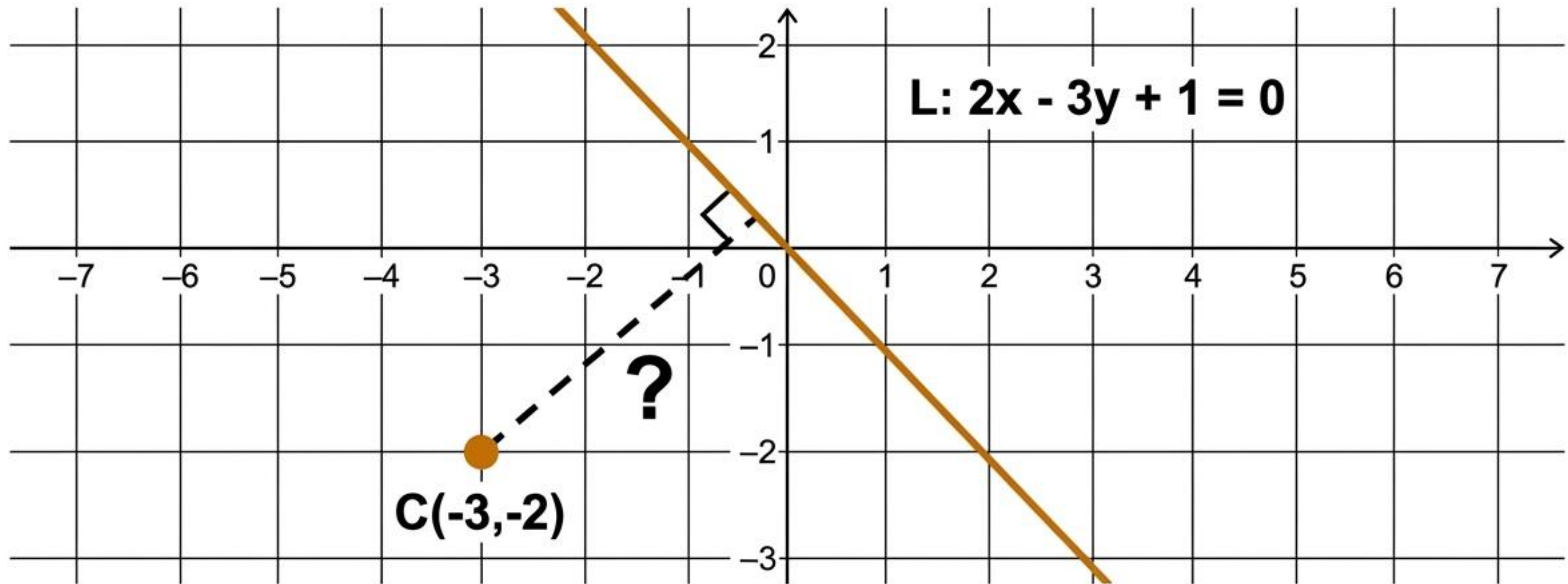
Condiciones para la Recta Tangente a una Circunferencia

1. La distancia desde el centro de la circunferencia (C) a la recta tangente (L) es igual al radio (r): $d(C, L) = r$.
2. La recta tangente y la circunferencia tienen un único punto en común (el punto de tangencia, P).
3. El radio trazado al punto de tangencia es perpendicular a la recta tangente: $r \perp L$ en P .



Ejemplo

Hallar la ecuación general de la circunferencia de centro $C(-3, -2)$ que es tangente a la recta $L: 2x - 3y + 1 = 0$.



Solución

El Álgebra

Paso 1: Calcular Radio

$$r = \frac{|2(-3) - 3(-2) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}}$$

Nota: La importancia de ocupar la fórmula distancia punto recta es que $r = d(C, L)$

Paso 2: Ecuación Principal

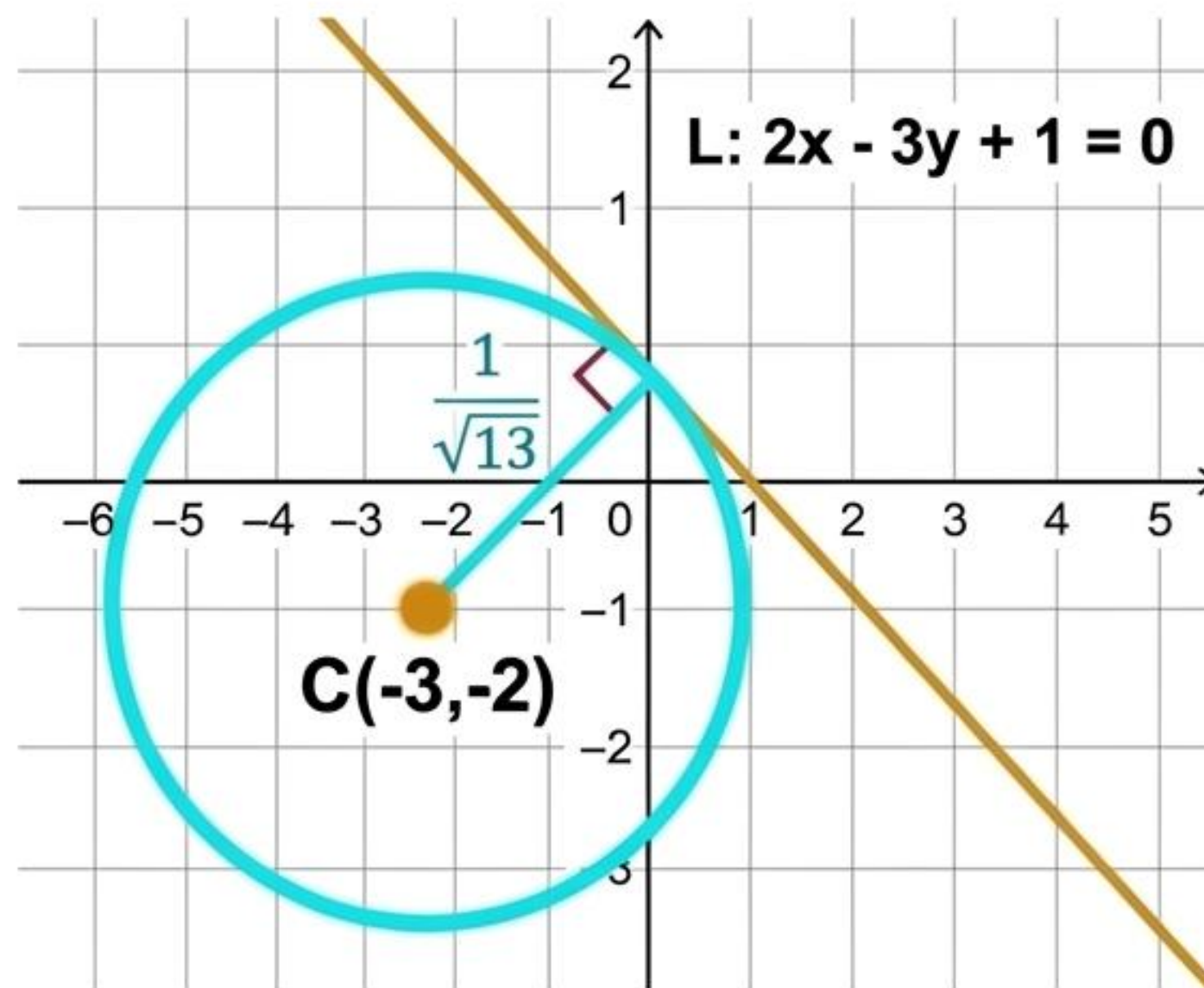
$$(x + 3)^2 + (y + 2)^2 = \frac{1}{13}$$

Paso 3: Ecuación General

(Expandiendo y multiplicando por 13)

$$13x^2 + 13y^2 + 78x + 52y + 168 = 0$$

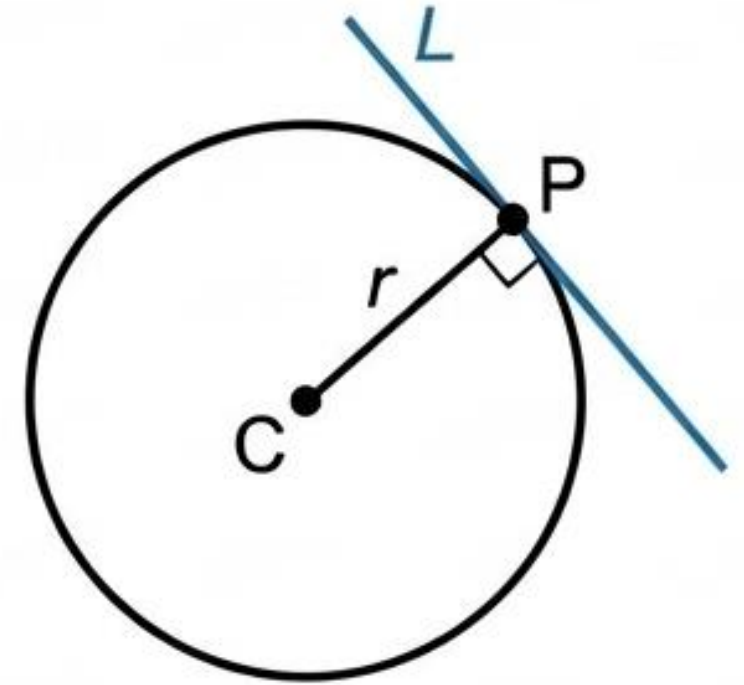
La Geometría



Condición de Perpendicularidad: Recta Tangente y Radio

La recta tangente a una circunferencia en un punto es perpendicular al radio que une el centro con ese punto de tangencia.

Pendiente de la tangente (m_t) * Pendiente del radio (m_r) = -1



Ejemplo: Si la recta $L: 3x - 4y + 5 = 0$ es tangente a una circunferencia en el punto $P(3, 7/2)$, encontrar la pendiente del radio que pasa por P .

1. Pendiente de L (m_t): Llevando a la forma principal: $4y = 3x + 5 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}$.
Entonces $m_t = \frac{3}{4}$.
2. Condición: $m_t * m_r = -1$
3. Pendiente del radio (m_r): $m_r = \frac{-1}{m_t} = \frac{-1}{3/4} = -\frac{4}{3}$

Circunferencias Concéntricas

Dos o más circunferencias son concéntricas cuando comparten el mismo centro.

Ejemplo:

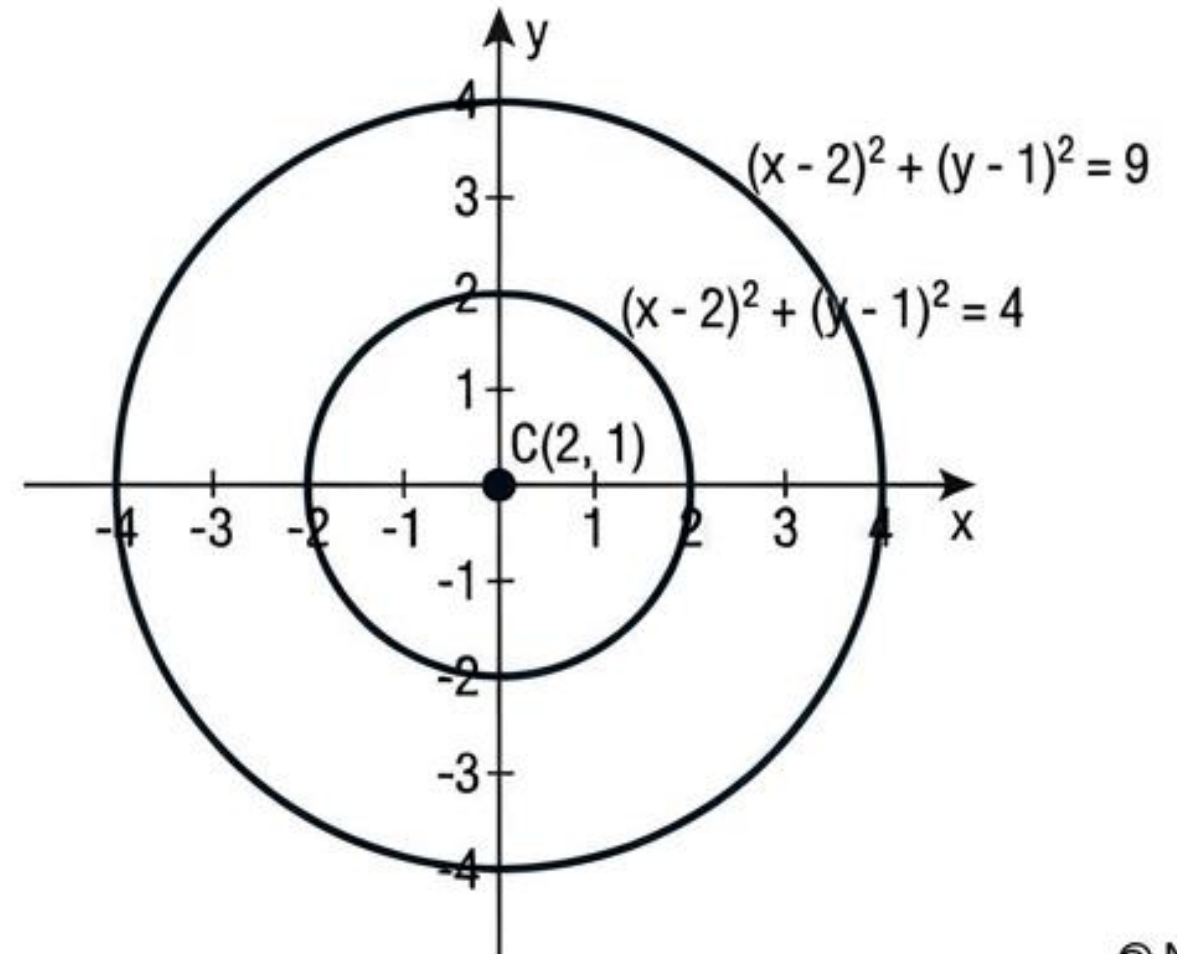
El Álgebra

Circunferencia 1: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$ (Radio $r_1 = 2$)

Circunferencia 2: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 9$ (Radio $r_2 = 3$)

Ambas comparten el centro $C(2, 1)$

La Geometría



Ejemplo de Circunferencias Concéntricas

Encontrar la ecuación de la circunferencia concéntrica a la circunferencia C_1 :
 $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ y que pasa por el punto $P(3, 1)$.

Solución:

1. Centro de C_1 : $C(1, -2)$. Como son concéntricas, la nueva circunferencia C_2 comparte el mismo centro $C(1, -2)$.

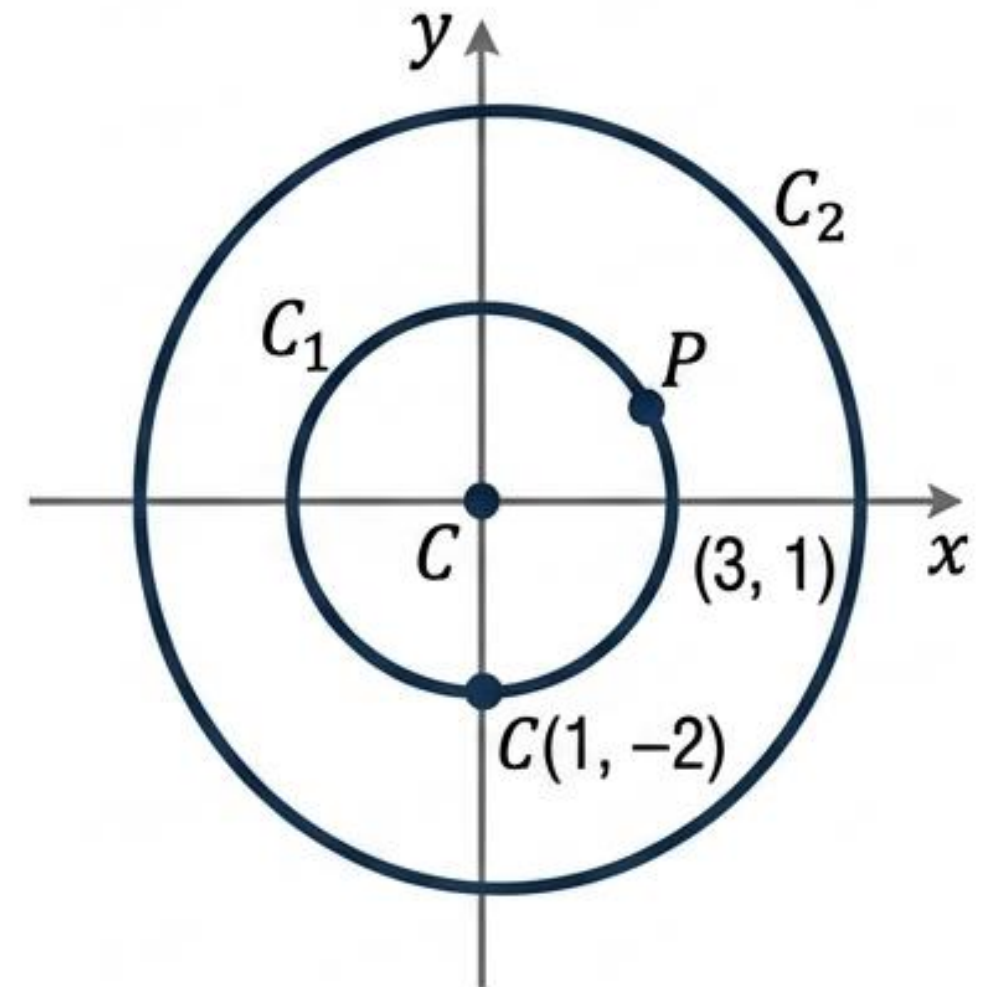
2. El radio de C_2 es la distancia entre C y P :

$$r = \sqrt{(3 - 1)^2 + (1 - (-2))^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}.$$

3. La ecuación de la circunferencia C_2 es:

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = (\sqrt{13})^2 \Rightarrow (x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 13$$



Ejemplo de Ecuación de la Circunferencia

Encontrar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $y = x + 2$ y que es tangente al eje x en el punto $P(3, 0)$.

Cuando una circunferencia es tangente al eje x , el valor absoluto de la ordenada del centro, $|k|$, es igual al radio (r).

Cuando una circunferencia es tangente al eje y , el valor absoluto de la abscisa del centro, $|h|$, es igual al radio (r).