

Primitivas

PROFESOR TADASHII HORTA SALAZAR

25 DE SEPTIEMBRE DE 2023

Derivadas fundamentales

- Si $f(x) = k$ entonces $f'(x) = 0$
- Si $f(x) = x^n$ entonces $f'(x) = nx^{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{Q}$ (Si $n < 1$ entonces se exige $x > 0$)
- Si $f(x) = \sqrt{x}$ entonces $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, si $x > 0$
- Si $f(x) = \sin(x)$ entonces $f'(x) = \cos(x)$
- Si $f(x) = \cos(x)$ entonces $f'(x) = -\sin(x)$
- Si $f(x) = e^x$ entonces $f'(x) = e^x$
- Si $f(x) = \ln(x)$ entonces $f'(x) = \frac{1}{x}$, si $x > 0$

- Si $f(x) = \tan(x)$ entonces $f'(x) = (\sec(x))^2$
- Si $f(x) = \cot(x)$ entonces $f'(x) = -(\csc(x))^2$
- Si $f(x) = \sec(x)$, $f'(x) = \sec(x) \tan(x)$
- Si $f(x) = \csc(x)$, $f'(x) = -\csc(x) \cot(x)$
- $(\arcsin(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arccos(x))' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$

Primitivas

Definición

Diremos que una función F es la **primitiva** o **antiderivada** de una función f si

$$F' = f$$

Primitivas

Definición

Diremos que una función F es la **primitiva** o **antiderivada** de una función f si

$$F' = f$$

Ejemplo

La función $F(x) = 4x^2$ es una primitiva de la función de $f(x) = 8x$.

Primitivas

Definición

Diremos que una función F es la **primitiva** o **antiderivada** de una función f si

$$F' = f$$

Ejemplo

La función $F(x) = 4x^2$ es una primitiva de la función de $f(x) = 8x$.

Notar que la función $G(x) = 4x^2 + 2$ también es una primitiva de f

Proposición

Si la función F es una primitiva de la función f , entonces $F + c$ también es una primitiva, para cualquier $c \in \mathbb{R}$ constante.

Proposición

Si la función F es una primitiva de la función f , entonces $F + c$ también es una primitiva, para cualquier $c \in \mathbb{R}$ constante.

Notación

Para anotar la familia de primitivas de una función f , usaremos el símbolo $\int$.

Proposición

Si la función F es una primitiva de la función f , entonces $F + c$ también es una primitiva, para cualquier $c \in \mathbb{R}$ constante.

Notación

Para anotar la familia de primitivas de una función f , usaremos el símbolo $\int$.
Si F es primitiva de f , anotamos:

$$\int f(x)dx = F(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Polinomios

Ejercicio 1

Encontrar la antiderivada de $f(x) = x$

Polinomios

Ejercicio 1

Entontrar la antiderivada de $f(x) = x$

Solución: Sabemos que la derivada de x^2 es $2x$.

Polinomios

Ejercicio 1

Encontrar la antiderivada de $f(x) = x$

Solución: Sabemos que la derivada de x^2 es $2x$. Para compensar la constante 2, la primitiva debería ser de la forma $\frac{x^2}{2}$. Por lo tanto:

Polinomios

Ejercicio 1

Encontrar la antiderivada de $f(x) = x$

Solución: Sabemos que la derivada de x^2 es $2x$. Para compensar la constante 2, la primitiva debería ser de la forma $\frac{x^2}{2}$. Por lo tanto:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2

Entontrar la antiderivada de $f(x) = x^2$

Ejercicio 2

Entontrar la antiderivada de $f(x) = x^2$

Solución: Sabemos que la derivada de x^3 es $3x^2$.

Ejercicio 2

Entontrar la antiderivada de $f(x) = x^2$

Solución: Sabemos que la derivada de x^3 es $3x^2$. Para compensar la constante 3, la primitiva debería ser de la forma $\frac{x^3}{3}$. Por lo tanto:

Ejercicio 2

Entontrar la antiderivada de $f(x) = x^2$

Solución: Sabemos que la derivada de x^3 es $3x^2$. Para compensar la constante 3, la primitiva debería ser de la forma $\frac{x^3}{3}$. Por lo tanto:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 2

Entontrar la antiderivada de $f(x) = x^2$

Solución: Sabemos que la derivada de x^3 es $3x^2$. Para compensar la constante 3, la primitiva debería ser de la forma $\frac{x^3}{3}$. Por lo tanto:

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Conclusión

Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 3

Entontrar la antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Ejercicio 3

Entontrar la antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solución: Escribimos $f(x) = x^{-2}$. Luego, su antiderivada es $\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} =$

Ejercicio 3

Entontrar la antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solución: Escribimos $f(x) = x^{-2}$. Luego, su antiderivada es $\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$

Ejercicio 3

Entontrar la antiderivada de $f(x) = \frac{1}{x^2}$

Solución: Escribimos $f(x) = x^{-2}$. Luego, su antiderivada es $\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$ Por lo tanto

$$\int \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Raíces

La propiedad anterior también puede aplicarse a potencias racionales:

$$\int \sqrt{x} \, dx =$$

Raíces

La propiedad anterior también puede aplicarse a potencias racionales:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \, dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \end{aligned}$$

Raíces

La propiedad anterior también puede aplicarse a potencias racionales:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \, dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \end{aligned}$$

Raíces

La propiedad anterior también puede aplicarse a potencias racionales:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \, dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \end{aligned}$$

Raíces

La propiedad anterior también puede aplicarse a potencias racionales:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} \, dx &= \int x^{\frac{1}{2}} \, dx \\ &= \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Trigonométricas

Ejercicio 4

Encontrar la antiderivada de $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$

Trigonométricas

Ejercicio 4

Encontrar la antiderivada de $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$

Solución: Sabemos que $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = -\sin(x)$, luego:

Trigonométricas

Ejercicio 4

Encontrar la antiderivada de $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$

Solución: Sabemos que $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = -\sin(x)$, luego:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Trigonométricas

Ejercicio 4

Encontrar la antiderivada de $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$

Solución: Sabemos que $f'(x) = \cos(x)$, $g'(x) = -\sin(x)$, luego:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int \cos(x) dx = \sin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\int (\sec(x))^2 dx =$$

$$\begin{aligned}\int (\sec(x))^2 dx &= \tan(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int -(\csc(x))^2 dx &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\sec(x))^2 dx &= \tan(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int -(\csc(x))^2 dx &= \cot(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int \sec(x) \tan(x) dx &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\sec(x))^2 dx &= \tan(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int -(\csc(x))^2 dx &= \cot(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int \sec(x) \tan(x) dx &= \sec(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int -\csc(x) \cot(x) &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int (\sec(x))^2 dx &= \tan(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int -(\csc(x))^2 dx &= \cot(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int \sec(x) \tan(x) dx &= \sec(x) + c & c \in \mathbb{R} \\ \int -\csc(x) \cot(x) dx &= \csc(x) + c & c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$.

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' =$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} .$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $\ln(-x)$ es antiderivada de g en $\mathbb{R}^-$

$$\int e^x dx =$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $\ln(-x)$ es antiderivada de g en $\mathbb{R}^-$

$$\int e^x dx = e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $\ln(-x)$ es antiderivada de g en $\mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned} \int e^x dx &= e^x + c & c \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{x} dx &= \end{aligned}$$

Ejercicio 4

Encontrar las primitivas de $f(x) = e^x$, $g(x) = \frac{1}{x}$

Recordar que $(e^x)' = e^x$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$, para $x > 0$. El dominio de $\frac{1}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$, por lo tanto necesitamos definir la antiderivada en $\mathbb{R}^-$. Si $x < 0$ entonces $-x > 0$ y podemos escribir:

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$$

Por lo tanto $\ln(-x)$ es antiderivada de g en $\mathbb{R}^-$

$$\begin{aligned}\int e^x dx &= e^x + c & c \in \mathbb{R} \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + c & c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Resumen

- $\int 1 \, dx = x + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad c \in \mathbb{R}, \text{ para todo } n \in \mathbb{Q} - \{-1\}$
- $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx = \sqrt{x} + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \sin(x) \, dx = -\cos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \cos(x) \, dx = \sin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int e^x \, dx = e^x + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{x} \, dx = \ln|x| + c \quad c \in \mathbb{R}$

- $\int (\sec(x))^2 dx = \tan(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int -(\csc(x))^2 dx = \cot(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \sec(x) \tan(x) dx = \sec(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int -\csc(x) \cot(x) dx = \csc(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$
- $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c \quad c \in \mathbb{R}$

Linealidad

Si f y g son funciones, $c \in \mathbb{R}$ y existen las primitivas de f y g , entonces existen las antiderivadas de cf , $f \pm g$, y se cumple:

Linealidad

Si f y g son funciones, $c \in \mathbb{R}$ y existen las primitivas de f y g , entonces existen las antiderivadas de cf , $f \pm g$, y se cumple:

- $\int (f(x) \pm g(x)) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$
- $\int cf(x) \, dx = c \int f(x) \, dx$

Linealidad

Si f y g son funciones, $c \in \mathbb{R}$ y existen las primitivas de f y g , entonces existen las antiderivadas de cf , $f \pm g$, y se cumple:

- $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
- $\int cf(x) dx = c \int f(x) dx$

Nota

JAMÁS intente algo como $\int (f(x) \cdot g(x)) dx = \int f(x) dx \cdot \int g(x) dx$

Ejercicio 5

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2 \sin(x) + \frac{4}{x}$

Ejercicio 5

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2 \sin(x) + \frac{4}{x}$

Solución:

Ejercicio 5

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2 \sin(x) + \frac{4}{x}$

Solución:

$$\int \left(2 \sin(x) + \frac{4}{x} \right) dx = \int 2 \sin(x) dx + \int \frac{4}{x} dx$$

Ejercicio 5

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2 \sin(x) + \frac{4}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned} \int (2 \sin(x) + \frac{4}{x}) dx &= \int 2 \sin(x) dx + \int \frac{4}{x} dx \\ &= 2 \int \sin(x) dx + 4 \int \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

Ejercicio 5

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2 \sin(x) + \frac{4}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned}\int (2 \sin(x) + \frac{4}{x}) dx &= \int 2 \sin(x) dx + \int \frac{4}{x} dx \\&= 2 \int \sin(x) dx + 4 \int \frac{1}{x} dx \\&= 2 \cdot (-\cos(x)) + 4 \cdot \ln(|x|) + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2 \sin(x) + \frac{4}{x}$

Solución:

$$\begin{aligned} \int (2 \sin(x) + \frac{4}{x}) dx &= \int 2 \sin(x) dx + \int \frac{4}{x} dx \\ &= 2 \int \sin(x) dx + 4 \int \frac{1}{x} dx \\ &= 2 \cdot (-\cos(x)) + 4 \cdot \ln(|x|) + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= -2 \cos(x) + 4 \ln(|x|) + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicio 6

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

Ejercicio 6

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

$$\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx = \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx$$

Ejercicio 6

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx &= \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx \\ &= 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx &= \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx \\&= 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx \\&= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicio 6

Encontrar la primitiva de $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3x + 4$

$$\begin{aligned}\int (2x^3 - 5x^2 - 3x + 4) dx &= \int 2x^3 dx - \int 5x^2 dx - \int 3x dx + \int 4 dx \\&= 2 \int x^3 dx - 5 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 4 \int dx \\&= 2 \cdot \frac{x^4}{4} - 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + 4x + c \quad c \in \mathbb{R} \\&= \frac{x^4}{2} - \frac{5x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + 4x + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la antiderivada de $g(x) = \frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}$

Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la antiderivada de $g(x) = \frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$$\int \left(2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} - bx^{-2} + 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \int 2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-2} dx + \int 3x^{\frac{2}{3}} dx$$

Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la antiderivada de $g(x) = \frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \left(2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} - bx^{-2} + 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx &= \int 2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-2} dx + \int 3x^{\frac{2}{3}} dx \\ &= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3 \int x^{\frac{2}{3}} dx\end{aligned}$$

Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la antiderivada de $g(x) = \frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int \left(2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} - bx^{-2} + 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx &= \int 2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-2} dx + \int 3x^{\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3 \int x^{\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2a \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la antiderivada de $g(x) = \frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int \left(2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} - bx^{-2} + 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx &= \int 2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-2} dx + \int 3x^{\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3 \int x^{\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2a \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= 2a \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c \quad c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 7

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Encontrar la antiderivada de $g(x) = \frac{2a}{\sqrt{x}} - \frac{b}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}$

Solución:

$$\begin{aligned}
 \int \left(2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} - bx^{-2} + 3x^{\frac{2}{3}} \right) dx &= \int 2a \cdot x^{-\frac{1}{2}} dx - \int bx^{-2} dx + \int 3x^{\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2a \int x^{-\frac{1}{2}} dx - b \int x^{-2} dx + 3 \int x^{\frac{2}{3}} dx \\
 &= 2a \cdot \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} - b \cdot \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= 2a \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} - b \cdot \frac{x^{-1}}{-1} + 3 \cdot \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c \quad c \in \mathbb{R} \\
 &= 4a\sqrt{x} + \frac{b}{x} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Solución:

$$\int \sqrt{x}(3x - 2) dx =$$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Solución:

$$\int \sqrt{x}(3x - 2) dx = \int (3\sqrt{x} \cdot x - 2\sqrt{x}) dx$$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(3x - 2) dx &= \int (3\sqrt{x} \cdot x - 2\sqrt{x}) dx \\ &= \int (3x^{\frac{1}{2}} \cdot x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx\end{aligned}$$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(3x - 2) dx &= \int (3\sqrt{x} \cdot x - 2\sqrt{x}) dx \\ &= \int (3x^{\frac{1}{2}} \cdot x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx \\ &= 3 \int x^{\frac{1}{2}+1} - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx\end{aligned}$$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(3x - 2) dx &= \int (3\sqrt{x} \cdot x - 2\sqrt{x}) dx \\&= \int (3x^{\frac{1}{2}} \cdot x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx \\&= 3 \int x^{\frac{1}{2}+1} - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\&= 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx\end{aligned}$$

Ejercicio 8

Encontrar $\int \sqrt{x}(3x - 2) dx$

Solución:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x}(3x - 2) dx &= \int (3\sqrt{x} \cdot x - 2\sqrt{x}) dx \\&= \int (3x^{\frac{1}{2}} \cdot x - 2x^{\frac{1}{2}}) dx \\&= 3 \int x^{\frac{1}{2}+1} - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\&= 3 \int x^{\frac{3}{2}} dx - 2 \int x^{\frac{1}{2}} dx \\&= 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

$$= 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} &= 3 \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 3\frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 2\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{6x^{\frac{5}{2}}}{5} - \frac{4x^{\frac{3}{2}}}{3} + c \quad c \in \mathbb{R} \\ &= \frac{6\sqrt{x^5}}{5} - \frac{4\sqrt{x^3}}{3} + c \quad c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ejercicios

Calcular las primitivas de las siguientes funciones:

❶ x^4

❷ $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x}$

❸ $\frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x}$

❹ $\frac{x^3 - 6x + 5}{x}$

❺ $(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2, a \geq 0$

Soluciones

$$\textcircled{1} \quad \frac{x^5}{5} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{x^3}{6} + \frac{2}{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{3} \quad 2x^2 - 4\sqrt{x} + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{4} \quad \frac{x^3}{3} - 6x + 5\ln(x) + c, c \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{5} \quad ax - \frac{4x\sqrt{ax}}{3} + \frac{x^2}{2} + c, a \in \mathbb{R}_0^+, c \in \mathbb{R}$$